

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXIV. Jahrgang 1904.



München.

Verlag der K. Akademie.
1905.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Über das d'Alembert'sche Prinzip.

Von F. Lindemann.

(Eingelaufen 5. März.)

In der analytischen Mechanik kommen zwei verschiedene Ausgangspunkte zur Geltung: erstens geht man von dem Newton'schen Prinzip der Gleichheit von actio und reactio aus und setzt die Komponenten der wirkenden Kräfte gleich den Komponenten der Beschleunigungen multipliziert in die betreffenden Massen, um so zu den Lagrange'schen Differentialgleichungen zu gelangen; zweitens stellt man das d'Alembert'sche Prinzip an die Spitze, nach welchem die virtuelle Arbeit der „verlorenen“ Kräfte in jedem Momente gleich Null sein muss.

Beide Ansätze erweisen sich bei einer freien Bewegung als absolut identisch; bei einer „bedingten“ Bewegung ist diese Identität aber bisher nur an einzelnen einfachen Fällen nachgewiesen, z. B. wenn es sich um die Bewegung eines einzelnen Punktes auf einer vorgeschriebenen (eventuell mit der Zeit veränderlichen) Fläche oder Kurve handelt. Bei komplizierteren Bedingungen stellt man entweder das d'Alembert'sche Prinzip axiomatisch als durch die Erfahrung erprobt an die Spitze, oder man geht ebenso axiomatisch von der Lagrange'schen Methode der Multiplikatoren aus und stellt dem entsprechend die den Bedingungen „äquivalenten Kräfte“ nach Analogie mit jenen einfachsten Fällen analytisch dar.

Will man beide Ausgangspunkte miteinander vereinigen, so handelt es sich darum, den analytischen Ausdruck für diese

äquivalenten Kräfte oder Reaktionskräfte als notwendig zu erweisen. Es erhebt sich also die Frage, durch welche Eigenschaften werden diese äquivalenten Kräfte definiert? Wählt man die Definition so, dass durch dieselben, wenn sie allein zur Wirkung kommen, die Ruhelage aller Punkte nicht gestört wird, dass also alle von ihnen erzeugten Beschleunigungen sich stets gegenseitig zerstören, so lässt sich, wie im Folgenden gezeigt werden soll, in der Tat eine Ableitung des d'Alembert'schen Prinzipes aus den Newton'schen Grundsätzen rein analytisch gewinnen, und zwar für die verschiedenen Fälle, wo entweder nur die Koordinaten der bewegten Punkte, oder auch die Zeit, oder auch die Komponenten der Geschwindigkeiten in den Bedingungen vorkommen.

Hat man einmal das d'Alembert'sche Prinzip gewonnen, so ist durch die Arbeiten von Hölder und Voss¹⁾ der Weg vollkommen klar gelegt, wie man von dort zum Hamilton'schen Prinzip oder zum Prinzip der kleinsten Wirkung fortschreiten kann. Hierauf braucht daher nicht weiter eingegangen zu werden, ebensowenig auf das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, da die Statik als Grenzfall der Dynamik zu behandeln ist.

I. Die Bedingungsgleichungen enthalten nur die Koordinaten der bewegten Punkte.

Es seien n Punkte mit den Massen $m_1, m_2, \dots, m_n$ und den Koordinaten $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$ gegeben, auf die in üblicher Weise die Kräfte mit den Komponenten X_i, Y_i, Z_i

¹⁾ Vgl. Hölder: Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis, Göttinger Nachrichten 1896; Voss: Über die Differentialgleichungen der Mechanik, Math. Annalen Bd. 25, 1884; Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis, Göttinger Nachrichten 1900; Bemerkungen über die Prinzipien der Mechanik, Sitzungsberichte d. math.-phys. Klasse d. K. Bayer. Akad. d. W. Bd. 31, 1901; vgl. auch Routh, Dynamics of a rigid body, vol. 2, 1892, § 445 (S. 329 der deutschen Ausgabe von Schepp).

wirken, so dass für ein „freies“ System die Differentialgleichungen der Dynamik in der Form

$$(1) \quad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i, \\ i = 1, 2, \dots n$$

erscheinen. Es mögen nun die Bedingungsgleichungen

$$(2) \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \dots \dots f_m = 0$$

hinzugefügt werden, wo jede der Funktionen f_i von den Koordinaten der n Punkte (nicht aber von ihren Geschwindigkeiten oder von der Zeit) abhängen soll. Zu den Kräften X_i, Y_i, Z_i treten dann auf den rechten Seiten der Gleichungen (1) die mit Ξ_i, H_i, Z_i zu bezeichnenden Komponenten der sogenannten „Reaktionskräfte“ hinzu, welche das System der Bedingungsgleichungen (2) „ersetzen“; wir erhalten demnach

$$(4) \quad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \Xi_i, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + H_i, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + Z_i;$$

und auf Grund dieser Gleichungen kann das System jetzt wieder als ein freies behandelt werden.

Um die unbekannten Grössen Ξ_i, H_i, Z_i zu bestimmen, ist notwendig diese Reaktionskräfte so zu definieren, dass man aus der Definition den analytischen Ansatz gewinnt; das geschehe durch folgende Festsetzung:

Wir sagen „ein System von Kräften mit den Komponenten Ξ_i, H_i, Z_i ersetzt ein gegebenes System von Bedingungen“ oder „die Kräfte Ξ_i, H_i, Z_i sind diesen Bedingungen äquivalent“ oder „die Kräfte Ξ_i, H_i, Z_i bilden das diesen Bedingungen entsprechende System von Reaktionskräften“, wenn diese Kräfte, sobald sie für sich allein wirken, keine Bewegung hervorrufen, d. h. wenn die Differentialgleichungen

$$(5) \quad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \Xi_i, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = H_i, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i$$

in Folge der Gleichungen (2) nur eine solche Lösung

gestatten, bei der die Geschwindigkeiten aller Punkte dauernd gleich Null sind, sobald dieselben zur Anfangszeit gleich Null angenommen werden, und wenn auch jede Bewegung dieser Art, die mit den Gleichungen (2) verträglich ist, als eine Lösung der Differentialgleichungen (5) betrachtet werden kann.

Diese Festsetzungen entsprechen offenbar dem, was man sich unbewusst unter den Reaktionskräften eines Systems von Bedingungen vorzustellen pflegt. Es ist zu zeigen, dass sich die Komponenten Ξ_i, H_i, Z_i immer diesen Forderungen gemäss bestimmen lassen; diese Bestimmung ist auszuführen.

Bezeichnen wir mit v_i die Geschwindigkeit des Punktes x_i, y_i, z_i zur Zeit t und mit v_{i0} diejenige zur Anfangszeit t_0 , so folgt aus (5) in bekannter Weise

$$(6) \quad \frac{1}{2} \sum_i m_i (v_i^2 - v_{i0}^2) = \int_{t_0}^t [\sum_i (\Xi_i x_i + H_i y_i + Z_i z_i)] dt,$$

wenn x_i', y_i', z_i' die Komponenten von v_i bedeuten. Nun sollen alle $v_{i0} = 0$ sein; und es sollen dann auch alle v_i in Folge von (2) verschwinden; folglich ist die rechte Seite für jede Zeit t gleich Null zu setzen; insbesondere auch für $t + dt$; es muss demnach die Bedingung

$$(7) \quad \sum_{i=1}^{i=m} (\Xi_i dx_i + H_i dy_i + Z_i dz_i) = 0$$

erfüllt sein, und zwar in Folge der Gleichungen (2). Letztere ergeben

$$(8) \quad \sum_i \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} dz_i \right) = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, m.$$

Die Gleichung (7) muss also eine identische Folge der Gleichungen (8) sein; und daraus folgt nach der Theorie der linearen Gleichungen, dass sich Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ bestimmen lassen, mittelst deren sich die Komponenten Ξ_i, H_i, Z_i in der folgenden Form darstellen:

$$(9) \quad \Xi_i = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \quad H_i = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i}, \quad Z_i = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i}.$$

Dadurch haben wir die bekannten und allgemein angenommenen Lagrange'schen Ausdrücke erhalten.¹⁾

Wenn also die verlangte Ruhe eintreten soll, so müssen die Komponenten Ξ_i, H_i, Z_i in der Form (9) angesetzt werden können. Umgekehrt haben unter diesen Annahmen die Gleichungen (5) stets die Ruhe des Systems zur Folge, wenn zur Zeit $t = t_0$ das System sich in Ruhe befand; denn in Folge von (9) und (8) verschwindet die Summe unter dem Integralzeichen der rechten Seite von (6), und es ergibt sich

$$\sum_i m_i v_i^2 = 0,$$

also $v_i = 0$, w. z. b. w.

II. Die Bedingungsgleichungen enthalten neben den Koordinaten die Zeit explicite.

Da sich die Bedingungen mit der Zeit ändern, kann hier nicht von Ruhe gesprochen werden; höchstens könnten unter besonderen Umständen einzelne Punkte des Systems dauernd in Ruhe bleiben. Hier wird man die Reaktionskräfte so definieren, dass ein möglichst hoher Grad von Ruhe erreicht wird. Enthält jede der m Bedingungsgleichungen die Zeit explicite, so kann man $n - m$ Punkte festhalten und nur den übrigen entsprechende Bewegungen erteilen. Wie letztere stattfinden, soll dabei willkürlich bleiben.

Wir definieren hier das System von Reaktionskräften durch folgende Festsetzungen:

¹⁾ Da diese Kräfte im Gleichgewichte sind, sobald die Bedingungen $f_i = 0$ erfüllt sind, könnte man versucht sein zu schliessen, dass in Folge jener Bedingungen die Gleichungen

$$\Xi_i = 0, \quad H_i = 0, \quad Z_i = 0$$

erfüllt sein müssten. Dieser Schluss ist deshalb nicht berechtigt, weil unsere Forderung des Gleichgewichtes voraussetzt, dass die Anfangsgeschwindigkeiten sämtlich verschwinden. Man kann daher nur aus den Integralgleichungen der Gleichungen (5), nicht aus letzteren selbst Schlüsse ziehen.

Handelt es sich um die Bewegung von n Punkten, und enthalten die m Bedingungsgleichungen die Zeit explicite, so verstehen wir unter den Reaktionskräften der Bedingungen ein System von Kräften mit folgenden Eigenschaften: Bleiben irgend $n - m$ der n Punkte in Ruhe, so bewegen sich die übrigen m Punkte in Folge der Wirkung jener Reaktionskräfte mit denjenigen Geschwindigkeiten, die sich aus den m Bedingungsgleichungen ergeben, falls noch die Richtungen der Geschwindigkeiten gegeben werden; setzen wir umgekehrt die Komponenten der Reaktionskräfte in die Gleichungen (5) ein und nehmen an, dass sich irgend m der n Punkte den Bedingungen gemäss auf vorgeschriebenen Bahnen bewegen, so sollen die übrigen $n - m$ Punkte in Ruhe bleiben, falls ihnen keine Anfangsgeschwindigkeiten erteilt werden.

Bleiben die Punkte mit den Indices $m + 1, m + 2, \dots, n$ in Ruhe, so sind die Gleichungen (8) durch die folgenden zu ersetzen:

$$(10) \quad \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} x'_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} y'_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} z'_i \right) + \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0.$$

Bezeichnet man ferner mit $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ die Richtungswinkel der Geschwindigkeit v_i des Punktes x_i, y_i, z_i gegen die Koordinatenachsen, so ist

$$x'_i = v_i \cos \alpha_i, \quad y'_i = v_i \cos \beta_i, \quad z'_i = v_i \cos \gamma_i,$$

wobei diese Richtungswinkel willkürlich bleiben; die Gleichungen (10) werden dann

$$(11) \quad \sum_{i=1}^m v_i \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \cos \alpha_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \cos \beta_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} \cos \gamma_i \right) + \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0$$

für $k = 1, 2, 3, \dots, m$.

Aus diesen m Gleichungen kann man (da die Funktionen f_k von einander unabhängig sein sollen) die m Geschwindigkeiten v_i berechnen, und findet sie in der Form

$$(12) \quad v_i = \mu_{i1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mu_{i2} \frac{\partial f_2}{\partial t} + \cdots + \mu_{im} \frac{\partial f_m}{\partial t} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, m,$$

wo die μ_{ik} von den gegebenen Funktionen f_k und den willkürlich gegebenen Richtungen $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ abhängen.

Setzen wir jetzt wieder die Gleichungen (5) an, bilden die Gleichung der lebendigen Kraft nach (6) und differenzieren die letztere, so wird:

$$(13) \quad \sum_{i=1}^m m_i v_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_i (\Xi_i x_i + H_i y_i + Z_i z_i).$$

Für unser System von „Reaktionskräften“ soll nun diese Gleichung eine identische Folge der Gleichungen (2), also auch der Gleichungen (10) sein. Es müssen deshalb Gleichungen der folgenden Form bestehen ($i = 1, 2, 3, \dots, m$):

$$(14) \quad \begin{aligned} \Xi_i &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_i}, \\ H_i &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_i} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial y_i}, \\ Z_i &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_i} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial z_i}, \\ \sum_{i=1}^m m_i v_i \frac{dv_i}{dt} &= -\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial t} - \cdots - \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial t}. \end{aligned}$$

Andererseits folgt aus (12)

$$\sum_{i=1}^m m_i v_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_{i=1}^m \left(\mu_{i1} \frac{dv_1}{dt} + \mu_{i2} \frac{dv_2}{dt} + \cdots + \mu_{im} \frac{dv_m}{dt} \right) \frac{\partial f_i}{\partial t},$$

nach der letzten Gleichung (14) ist demnach

$$(15) \quad \lambda_k = - \left(\mu_{k1} \frac{dv_1}{dt} + \mu_{k2} \frac{dv_2}{dt} + \cdots + \mu_{km} \frac{dv_m}{dt} \right).$$

Die Koeffizienten μ_{ki} sind vollkommen bestimmt, wenn die Richtungen $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ in (11) gegeben sind, ebenso sind dann die Werte $\frac{dv_i}{dt}$ vollkommen bestimmt. Denkt man sich also

diese Richtungen in beliebiger Weise von den Koordinaten x_i, y_i, z_i und von der Zeit t abhängig, so bleiben auch die Faktoren μ_{ki} in (12), und folglich auch die m „Multiplikatoren“ in (14) und (15) vollkommen unbestimmt.

Man könnte die Frage aufwerfen, weshalb wir bei Definition der „Reaktionskräfte“ durch Bewegungen, die dem Zustande der Ruhe möglichst nahe kommen, nicht über diese Richtungen $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ noch speziellere beschränkende Festsetzungen machten. Sollen aber die allgemeinen Gleichungen (4), welche anzuwenden sind, wenn zu den Reaktionskräften Ξ_i, H_i, Z_i noch äussere Kräfte X_i, Y_i, Z_i hinzutreten, überhaupt eine Bewegung als möglich ergeben, so müssen bekanntlich m noch unbestimmte Funktionen in die Grössen Ξ_i, H_i, Z_i eingehen; man darf daher die bei Definition der Reaktionskräfte zugelassenen Bewegungen nicht so weit spezialisieren, dass weniger als m unbestimmte Funktionen in den Gleichungen (14) auftreten.

Die Gleichungen (14) lassen die Grössen

$$\Xi_{m+1}, H_{m+1}, Z_{m+1}, \dots, \Xi_n, H_n, Z_n$$

noch ganz unbestimmt. Da wir aber statt der Punkte mit den Indices $1, 2, \dots, m$ ebenso gut irgend welche andere Punkte auszeichnen können, so bestimmen sich schliesslich alle Ξ_i, H_i, Z_i in analoger Weise, und wir haben allgemein ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$(16) \quad \begin{aligned} \Xi_i &= \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, & H_i &= \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i}, & Z_i &= \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i}, \\ \sum_{i=1}^n m_i v_i \frac{dv_i}{dt} &= - \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial t}. \end{aligned}$$

Nehmen wir umgekehrt an, dass sich (wie es unsere Definition der Reaktionskräfte erfordert) m Punkte in vorgeschriebener Weise gemäss den Bedingungen bewegen, so können wir ihre Geschwindigkeiten aus den Gleichungen (11) in der Form (12) berechnen, wenn es sich z. B. um die Punkte mit den Indices $1, 2, \dots, m$ handelt. Wir haben dann in (16) die willkürlichen Funktionen λ_k gemäss (15) durch die willkürlichen

Funktionen μ_{hi} auszudrücken, so dass sich die letzte Gleichung (16) in die beiden Gleichungen

$$\sum_{i=1}^m m_i v_i \frac{dv_i}{dt} = - \sum_{h=1}^n \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial t}, \quad \sum_{i=m+1}^n m_i v_i \frac{dv_i}{dt} = 0$$

zerlegt; durch Integration der letzten Gleichung findet man

$$\sum_{i=m+1}^n m_i (v_i^2 - v_{i0}^2) = 0,$$

also in der Tat alle $v_i = 0$ für $i = m+1, \dots, n$, sobald die Anfangsgeschwindigkeiten verschwinden, w. z. b. w.

Die erste Reihe der Gleichungen (16) ergibt sich auch, wenn man von der Vorstellung ausgeht, dass in jedem Zeitmomente das System der Reaktionskräfte sich so verhalten muss, als wenn die Bedingungen von der Zeit unabhängig wären. Da aber ein Zeitmoment immer nur durch eine unendlich kleine Zeit dt , nicht durch die Annahme $dt = 0$, zu charakterisieren ist, so ist diese Vorstellung weniger befriedigend.

III. Die Bedingungen enthalten neben den Koordinaten der bewegten Punkte auch deren Differentialquotienten nach der Zeit.

Enthalten die Bedingungsgleichungen (2) auch die Komponenten x'_i, y'_i, z'_i der Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte in der Form, dass die linken Seiten als lineare homogene Funktionen dieser Komponenten erscheinen, d. h. sind sie von der Form

$$(17) \quad \sum_{i=0}^n (\varphi_{hi} x'_i + \psi_{hi} y'_i + \chi_{hi} z'_i) = 0 \quad \text{für } h = 1, 2, 3, \dots, m,$$

so bleibt der Ansatz derselbe, wie im ersten Falle, wo nur die Koordinaten der bewegten Punkte in den Gleichungen vorkamen. Wir definieren das System der Reaktionskräfte als ein solches, unter dessen Wirkung keine Bewegung zu Stande kommt, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten aller Punkte gleich Null angenommen werden.

Sollen jetzt die Differentialgleichungen (5) eine solche Lösung zulassen, so muss wieder die Gleichung (7) eine Folge der Gleichungen (17) sein, so dass wir

$$(18) \quad \mathcal{E}_i = \sum_k \lambda_k \varphi_{ki}, \quad H_i = \sum_k \lambda_k \psi_{ki}, \quad Z_i = \sum_k \lambda_k \chi_{ki}$$

zu setzen haben,¹⁾ wobei es gleichgültig ist, ob die linken Seiten der Gleichungen (17) vollständige Differentiale sind oder nicht.

Geht man umgekehrt von den Gleichungen (18) aus, so ergibt sich in obiger Weise wieder

$$\sum m_i v_i^2 = 0,$$

also $v_i = 0$, wie es sein sollte.

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Funktionen φ_{ki} , ψ_{ki} , χ_{ki} nur von den Koordinaten der bewegten Punkte abhängen. Kommen in ihnen auch noch die Geschwindigkeiten vor, so sind diese Funktionen durch einen Ansatz von der Form (7) nicht völlig bestimmt; die früheren Schlüsse führen daher nicht zum Ziele.

In diesem allgemeineren Falle definieren wir die Reaktionskräfte ebenso wie vorhin, vorausgesetzt, dass die Ruhe mit den Bedingungen des Systems verträglich ist. Wir bilden aus (2) durch Differentiation nach t die Gleichungen

¹⁾ Diese Gleichungen sind also von derselben Form, als wenn die linken Seiten der Gleichungen (17) aus den Bedingungen $f_k = 0$ (die nur die Koordinaten enthalten) durch Differentiation nach t entstehen. Der Unterschied zwischen holonomen und nichtholonomen Bedingungen, wie ihn Hertz gemacht hat, kommt also bei Aufstellung der Lagrange'schen Gleichungen in ihrer ersten Form nicht in Betracht. Anders ist es, wenn man einige der Variablen durch die Bedingungen eliminieren, also die Lagrange'schen Gleichungen „zweiter Form“ aufstellen will; dabei ist Vorsicht geboten; vgl. Voss, Math. Annalen, Bd. 25, 1885 und die unten erwähnte Schrift von Appell. — Für einen bewegten Punkt und eine Bedingung der Form (17) sind übrigens nach Voss die Gleichungen (18) ebenso geometrisch abzuleiten, wie die entsprechenden bei Bewegung eines Punktes auf einer gegebenen Fläche.

$$(19) \quad \sum_i \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} z_i' + \frac{\partial f_k}{\partial x_i''} x_i'' + \frac{\partial f_k}{\partial y_i''} y_i'' + \frac{\partial f_k}{\partial z_i''} z_i'' \right) = 0$$

für $k = 1, 2, 3, \dots m$.

Diese Bedingungen sollen jetzt die Gleichung

$$(20) \quad \sum_i (\Xi_i x_i' + H_i y_i' + Z_i z_i') = 0$$

zur Folge haben. Dementsprechend setzen wir

$$(21) \quad \begin{aligned} \Xi_i &= \sum_k \lambda_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \frac{\partial f_k}{\partial x_i''} \right), \\ H_i &= \sum_k \lambda_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial y_i} + \frac{\partial f_k}{\partial y_i''} \right), \\ Z_i &= \sum_k \lambda_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial z_i} + \frac{\partial f_k}{\partial z_i''} \right). \end{aligned}$$

Dieser Ansatz ist zwar durch die Gleichungen (19), (20) allein noch nicht vollständig gerechtfertigt; er wird es aber, wenn man bedenkt, dass auch die aus (20) durch Differentiation hervorgehenden Gleichungen

$$\sum \left(\frac{d \Xi_i}{d t} x_i' + \frac{d H_i}{d t} y_i' + \frac{d Z_i}{d t} z_i' + \Xi_i x_i'' + H_i y_i'' + Z_i z_i'' \right) = 0$$

eine identische Folge der aus (19) durch Differentiation hervorgehenden Gleichungen

$$\sum_i \sum_l \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial \xi_i \partial \xi_l} \xi_i \xi_l' + \frac{\partial^2 f_k}{\partial \xi_i' \partial \xi_l} \xi_i' \xi_l + \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} \xi_l'' + \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i''} \xi_l''' \right) = 0$$

sein muss. Hier laufen die Indices i, l von 1 bis $3n$; und es ist

$$\begin{aligned} \xi_i &= x_i \quad \text{für } i = 1, 2, \dots n, \\ \xi_i &= y_i \quad \text{„ } i = n+1, n+2, \dots 2n, \\ \xi_i &= z_i \quad \text{„ } i = 2n+1, 2n+2, \dots 3n. \end{aligned}$$

Da wir verlangen, dass durch Einwirkung der Reaktionskräfte keine Bewegung entsteht, so könnten wir überall $\xi_i'' = 0$ setzen. Aber es sollen auch umgekehrt aus dem Ansatz (21) wieder die Gleichungen $v_i = 0$ durch Integration folgen, und deshalb müssen wir die Glieder mit

x_i^*, y_i^*, z_i^* beibehalten. In der Tat wird dann in bekannter Weise aus (5) die Gleichung

$$\sum_i m_i v_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_i \lambda_k \frac{df_k}{dt} = 0$$

gewonnen, also

$$\sum m_i (v_i^* - v_{i0}^*) = 0,$$

oder wenn alle Anfangsgeschwindigkeiten gleich Null genommen werden

$$v_i = 0, \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n,$$

wie es sein sollte.

Etwas anders muss man verfahren, wenn die Bedingungs-
gleichungen so beschaffen sind, dass die Geschwindigkeiten der
 n Punkte nicht gleichzeitig gleich Null sein können, so dass
man auch die Anfangsgeschwindigkeiten nicht gleich Null an-
nehmen darf. Das tritt z. B. ein, wenn durch die Bedingungs-
gleichungen direkt die Konstanz der Geschwindigkeiten einzelner
Punkte verlangt wird. Hier ist eine neue Definition des
Gleichgewichtes¹⁾ und demnach auch der Reaktionskräfte
notwendig; wir wählen sie analog dem Falle, wo die Zeit
explicite in den Bedingungen vorkam. Die Reaktionskräfte
sollen hier durch folgende Eigenschaften definiert
werden: bleiben irgend $n - m$ (wobei zunächst $n - m > 0$
sei) der n Punkte in Ruhe, so bewegen sich unter
alleiniger Wirkung der Reaktionskräfte die übrigen
 m Punkte mit konstanten Geschwindigkeiten in den-
jenigen Richtungen, die sich aus den Bedingungs-
gleichungen ergeben; setzt man umgekehrt die Kom-
ponenten der Reaktionskräfte in die Gleichungen (5)
ein und nimmt an, dass sich irgend m der n Punkte
mit konstanten Geschwindigkeiten auf Bahnen, die
den Bedingungen entsprechen, bewegen, so bleiben
die übrigen $n - m$ Punkte in Ruhe.

¹⁾ Auch Boltzmann gibt für bewegte Systeme ausdrücklich eine
neue Definition des Gleichgewichtes: Vorlesungen über die Prinzipie
der Mechanik, Teil 1, p. 233, Leipzig 1897; diese Definition stimmt im
Resultate für den von ihm behandelten besonderen Fall mit der unsrigen
überein, ist aber von den äusseren Kräften abhängig.

Bleiben wieder die Punkte mit den Indices $m+1, m+2, \dots, n$ in Ruhe, so ergibt sich in der früheren Weise:

$$\sum_{i=1}^m m_i v_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_{i=1}^m (\Xi_i x_i' + H_i y_i' + Z_i z_i');$$

es ist also (für $i = 1, 2, 3, \dots, m$), wenn alle $\frac{dv_i}{dt}$ verschwinden,

$$\begin{aligned} \Xi_i &= \sum_k \lambda_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \frac{\partial f_k}{\partial x_i'} x_i'' \right), \\ H_i &= \sum_k \lambda_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial y_i} + \frac{\partial f_k}{\partial y_i'} y_i'' \right), \\ Z_i &= \sum_k \lambda_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial z_i} + \frac{\partial f_k}{\partial z_i'} z_i'' \right), \end{aligned} \quad (22)$$

wo die Glieder in x_i'', y_i'', z_i'' aus analogen Gründen, wie oben, hinzugefügt werden mussten. Hiermit ist die Form der Komponenten Ξ_i, H_i, Z_i bestimmt; und da dieselbe Überlegung für irgend $n - m$ feste Punkte Geltung hat, so nehmen wir diese Form für alle Indices ($i = 1, \dots, n$) in Anspruch.

Setzen wir umgekehrt die gefundenen Werte Ξ_i, H_i, Z_i in die Differentialgleichungen (5) ein, so ergibt sich wieder

$$\sum_{i=1}^n m_i v_i \frac{dv_i}{dt} = 0,$$

und durch Integration

$$\sum_{i=1}^n m_i (v_i^2 - v_{i0}^2) = 0.$$

Setzen wir fest, dass $v_i = v_{i0}$ sei für $i = 1, 2, \dots, m$ (wo durch die m Funktionen λ noch nicht spezialisiert sind, da die Bahnen der m Punkte noch willkürlich bleiben), so folgt

$$\sum_{i=m+1}^n m_i v_i^2 = 0,$$

wenn die Anfangsgeschwindigkeiten der übrigen $n - m$ Punkte gleich Null waren, also wieder $v_i = 0$ für $i = m+1, m+2, \dots, n$; w. z. b. w.

Ist insbesondere $n - m = 0$, so kann man die Umkehrung unserer Forderung offenbar (wie aus den aufgestellten Gleichungen hervorgeht) dahin aussprechen, dass der letzte in Ruhe bleibt oder sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, wenn die übrigen $n - 1$ Punkte sich auf Bahnen, die den Bedingungen genügen, mit konstanten Geschwindigkeiten bewegen.

Ferner kann es eintreten, dass man einigen (etwa μ) der übrigen m Punkte eine verschwindende Anfangsgeschwindigkeit erteilen kann, ohne mit den Bedingungsgleichungen in Widerspruch zu kommen; dann genügt es jene umgekehrte Forderung dahin auszusprechen, dass $n - m + \mu$ Punkte in Ruhe bleiben, (unter alleiniger Wirkung der Reaktionskräfte), wenn die übrigen $m - \mu$ Punkte sich auf entsprechenden Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.

In allen diesen Fällen bleibt dann, wenn keine anderen als die Reaktionskräfte wirken, die lebendige Kraft des Systemes stets unveränderlich; diese Forderung umfasst alle Fälle und könnte an die Spitze gestellt werden,¹⁾ wenn man von energetischen Prinzipien ausgeht. Will man aber auf die Newtonschen Grundbegriffe zurückgehen, so müssen die einzelnen Fälle gesondert durch passende, und unser Kausalitätsbedürfnis befriedigende Definitionen erledigt werden.

IV. Einige Beispiele.

1. Es handle sich um die Bewegung eines einzelnen Punktes, auf den allein die Schwerkraft wirkt; und es sei die Bedingung gegeben, dass die Geschwindigkeit konstant ($= a$) sein soll. Diese Bedingung ist also

$$(23) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - a^2 = 0.$$

¹⁾ Sie würde dann mit Boltzmann's Definition des Gleichgewichtes von bewegten Systemen im Wesentlichen übereinstimmen.

Nach (22) haben wir

$$E = 2 \lambda x'', \quad H = 2 \lambda y'', \quad Z = 2 \lambda z''.$$

Die Differentialgleichungen (4) für die Bewegung des Punktes lauten daher

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 2 \lambda x'', \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = 2 \lambda y'', \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = -G + 2 \lambda z'',$$

wo G das Gewicht des Punktes bezeichnet, oder wenn

$$2 \lambda = m \cdot \mu$$

gesetzt wird:

$$(24) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \mu x'', \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \mu y'', \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g + \mu z'',$$

und hieraus (da μ wegen der dritten Gleichung nicht gleich 1 sein kann):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0,$$

und aus (23) durch Differentiieren:

$$z'(\mu z'' - g) = 0,$$

also $z' = 0$, folglich auch $z'' = 0$, und aus der dritten Gleichung $\mu = \infty$, aber $\mu z'' = -g$. Aus $z' = 0$ ergibt sich $z = \text{Const.}$ Der Punkt kann sich also nur in einer horizontalen Ebene bewegen (wie vorauszusehen war).

Man könnte denken, der Bedingung (23) durch Leitung des Punktes zu genügen, indem man ihn mit einem anderen willkürlich bewegten Punkte verbindet; dann aber würde es sich nicht um einen einzelnen Punkt, sondern um zwei bewegte Punkte handeln.

2. Es werde jetzt der gestellten Bedingung die Form

$$(25) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 + a^2 \cdot z = 0$$

gegeben, dann erhalten wir

$$(26) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \mu x'', \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \mu y'', \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g + \mu \left(\frac{a^2}{2} + z'' \right),$$

also $\mu = 1$, oder wie oben:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad z' \left[-g + \mu \frac{a^2}{2} \right] = 0.$$

Nehmen wir $z' = 0$, so folgt, da x' und y' konstant sein müssen, aus (25): $z = \text{Konst.}$, und aus der letzten Gleichung (26)

$$(26^*) \quad \mu a^2 = 2g.$$

Sind also α, β, γ die Komponenten der Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$, so bewegt sich der Punkt in einer Horizontalebene, die durch die Gleichung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + a^2 z = 0$$

bestimmt wird. Geht man von der Bedingung $\mu = 1$ aus, so folgt aus der letzten Gleichung (26): $a^2 = 2g$, was mit (26*) in Übereinstimmung ist; der Fall ist als Grenzfall des allgemeinen zu erledigen.

3. Ist die Bedingungsgleichung in der Form

$$(27) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 + a^2 x = 0$$

gegeben, so erhalten wir

$$(28) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \mu \left(\frac{a^2}{2} + x'' \right), \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \mu y'', \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g + \mu z'',$$

also $z'' = 0$, denn μ kann nicht gleich 1 sein; ferner aus (27) durch Differenzieren und Eliminieren von x'' und z'' :

$$(29) \quad \frac{1}{2} a^2 x' = g z',$$

(dieselbe Gleichung findet man aus dem Satze von der lebendigen Kraft), und durch nochmaliges Differenzieren

$$\mu \frac{a^4}{4} = -g^2;$$

folglich ist μ konstant, und die Gleichungen (28) sind sofort integrierbar:

$$(30) \quad \begin{aligned} x &= -\frac{g^2 a^2}{a^4 + 4g^2} t^2 + a t + a', & y &= \beta t + \beta', \\ z &= -\frac{1}{2} \frac{g a^4}{a^4 + 4g^2} t^2 + \gamma t + \gamma'. \end{aligned}$$

Aus (29) folgt dann $a a^3 = 2 \gamma g$, und aus (27), wenn zur Abkürzung

$$b = \frac{a^2 g}{a^4 + 4g^2}$$

gesetzt wird:

$$(a - 2g b t)^2 + (\gamma - a^3 b t)^2 + \beta^2 + a^2 (-g b t^2 + a t + a') = 0.$$

Folglich besteht die Relation (denn die Faktoren von t und t^2 verschwinden identisch):

$$a^3 + \beta^2 + \gamma^2 + a^3 a' = 0.$$

Der Punkt bewegt sich in der Ebene

$$a^2 x - 2g z = a^2 a' - 2g \gamma',$$

welche zur Y -Axe parallel ist, und beschreibt in dieser eine Parabel. Verlangt man umgekehrt, dass der Punkt sich in dieser Ebene bewege, so erhält man aus den elementaren Formeln:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \lambda a^3, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g - 2\lambda g,$$

was mit den Gleichungen (28) in Übereinstimmung ist.

4. Es werde ferner ein Punkt betrachtet, der sich unter Wirkung der Schwerkraft auf einer Kugel mit konstanter Geschwindigkeit bewegen soll. Hier haben wir die beiden Bedingungsgleichungen

$$(31) \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2, \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= a^2. \end{aligned}$$

Die Gleichungen der Bewegung sind daher

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 2 \lambda x + 2 \mu x'', \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = 2 \lambda y + 2 \mu y'',$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -G + 2 \lambda z + 2 \mu z'',$$

oder:

$$(32) \quad x'' = \lambda_1 x + \mu_1 x'', \quad y'' = \lambda_1 y + \mu_1 y'', \quad z'' = -g + \lambda_1 z + \mu_1 z''.$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit x', y', z' und addiert, so ergibt sich in Folge von (32)

$$z' = 0, \quad \text{also auch} \quad z'' = 0 \quad \text{und} \quad z = z_0, \quad \text{folglich:}$$

$$-g + \lambda_1 z_0 = 0,$$

ferner durch Differenzieren der beiden Gleichungen (31) unter Benutzung von (32):

$$x' x + y' y = 0 \quad \lambda_1 (x' x + y' y) = 0,$$

folglich auch

$$x'' x + y'' y + x'^2 + y'^2 = 0 \quad \text{oder} \quad (1 - \mu_1)(a^2 - z'^2) + \lambda_1(x^2 + y^2) = 0,$$

also auch

$$(1 - \mu_1) a^2 + \lambda_1 (r^2 - z_0^2) = 0,$$

$$(1 - \mu_1) a^2 z_0 = -g (r^2 - z_0^2).$$

Die Grössen μ_1 und λ_1 sind demnach konstant; und wir finden x und y als Integrale der Gleichung

$$\eta'' = \frac{\lambda_1}{1 - \mu_1} \eta,$$

nämlich

$$\eta = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t,$$

wo

$$\alpha^2 = - \frac{\lambda_1}{1 - \mu_1} = \frac{g a^2}{r^2 - z_0^2}.$$

Der Punkt bewegt sich in bekannter Weise in einem horizontalen Kreise, auf dem er ganz herumschwingt.

5. Schliesslich betrachten wir einen Punkt, der sich unter Wirkung der Schwerkraft so bewegt, dass zwischen seinen

Geschwindigkeitskomponenten eine lineare, nicht homogene Gleichung

$$(33) \quad a x' + b y' + c z' = e$$

besteht. Die Differentialgleichungen lauten

$$(34) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = a \lambda \frac{x''}{x'}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = b \lambda \frac{y''}{y'}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g + c \lambda \frac{z''}{z'}.$$

Die auch hier anwendbare Gleichung der lebendigen Kraft gibt, wenn h eine Konstante bedeutet

$$(35) \quad \frac{1}{2} v^2 = -g z + h.$$

Ferner ist entweder $x' = a \lambda$ oder $x'' = 0$, ebenso $y' = b \lambda$ oder $y'' = 0$. Nehmen wir $x' = a \lambda$, $y' = b \lambda$, so folgt aus (33) und (35)

$$\begin{aligned} \lambda (a^2 + b^2) + c z' &= e, \\ \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \lambda^2 + \frac{1}{2} z'^2 &= -g z + h, \end{aligned}$$

und hieraus durch Elimination von z'

$$(36) \quad (a^2 + b^2) \lambda^2 c^2 + [e - \lambda (a^2 + b^2)]^2 = -2 g c^2 z + 2 c^2 h.$$

Durch diese quadratische Gleichung wird λ als Funktion von z bestimmt; es sei $\lambda = \varphi(z)$, so folgt aus der dritten Gleichung (34)

$$z'' z' = -g z' + c \cdot \varphi(z) \cdot z''.$$

Durch Integration ergibt sich z als Funktion von t und dann findet man x und y aus den Gleichungen $x' = a \lambda$, $y' = b \lambda$.

Gehen wir von den Lösungen $x'' = 0$, $y'' = 0$ der ersten beiden Gleichungen (34) aus, so folgt aus (33) auch $z'' = 0$, und die letzte Gleichung (34) gibt $z' = 0$; es wird also

$$(37) \quad x = \beta t + \gamma, \quad y = \beta_1 t + \gamma_1, \quad z = \gamma_2$$

mit der Bedingung

$$a \beta + b \beta_1 = e.$$

Endlich könnten wir auch $x' = a \lambda$, $y'' = 0$ wählen; dann folgt aus (33) und (34), wenn $y = \beta t + \beta'$ gesetzt wird:

$$(37^*) \quad \begin{aligned} a^2 \lambda + b \beta + c z' &= e, \\ a^2 (z'' z' + g z') + b c \beta + c^2 z' &= e c, \end{aligned}$$

also durch Integration

$$a^2 \frac{z'^2}{2} + z(a^2 g + c^2) = c(e - b\beta)t + C,$$

wo C eine Konstante bezeichnet. Die Gleichung ist von der Form

$$z'^2 + A z = B t + C;$$

setzt man also

$$A z + B t = B \tau,$$

so wird

$$\left(\frac{\frac{dz}{d\tau}}{1 - \frac{A}{B} \frac{dz}{d\tau}} \right)^2 + B \tau = C,$$

$$z = \int \frac{B \sqrt{C - B \tau}}{B + A \sqrt{C - B \tau}} d\tau + C',$$

wenn C' eine neue Konstante ist. Hieraus ergibt sich $z = \Phi(t)$, und dann aus (37) $\lambda = \Psi(t)$, womit dann auch

$$x = \int a \Psi(t) dt + C''$$

bestimmt ist.

Wenn in (33) die rechte Seite, d. h. die Konstante c , verschwindet, so kann man das Problem auch nach den Formeln (18) behandeln. Man findet

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \mu a, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \mu b, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g z + \mu c.$$

Durch Differenzieren von (33) erhält man

$$\mu(a^2 + b^2 + c^2) = g z c,$$

also

$$(38) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + c^2} g z,$$

$$z = A \sin a t + B \cos a t, \quad a^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + c^2} g$$

$$\mu = \frac{g c}{a^2 + b^2 + c^2} (A \sin a t + B \cos a t),$$

wo A und B Integrationskonstante sind. Es wird dann

$$x = \frac{g c a}{a^2 + b^2 + c^2} \left(-\frac{A}{a^2} \sin a t - \frac{B}{a^2} \cos a t \right) + C t + C',$$

$$y = \frac{g c b}{a^2 + b^2 + c^2} \left(-\frac{A}{a^2} \sin a t - \frac{B}{a^2} \cos a t \right) + C_1 t + C'_1.$$

Setzt man diese Werte in die Bedingung

$$a x' + b y' + c z' = 0$$

in, so wird dieselbe nicht identisch befriedigt. Die allgemeine Lösung der Gleichung (38) ist daher nicht brauchbar; man muss vielmehr $z = 0$ nehmen; dann ist auch $\mu = 0$, und es wird:

$$x = \alpha t + \alpha', \quad y = \beta t + \beta'$$

mit der Bedingung

$$\alpha \alpha + \beta \beta = 0.$$

Diese Lösung ist mit der in (37) gefundenen wesentlich identisch. In der Tat muss der Fall $e = 0$ im allgemeinen Falle enthalten sein. Man erkennt dies an den Differentialgleichungen nicht ohne weiteres, weil die Identität nur dann eintritt, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten gleich Null angenommen werden.¹⁾

V. Das d'Alembert'sche Prinzip.

Multiplizieren wir die Gleichungen (1) bzw. mit δx_i , δy_i , δz_i und bilden die Summe, so entsteht die eine Gleichung

$$(39) \sum \left[\left(m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - X_i \right) \delta x_i + \left(m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - Y_i \right) \delta y_i + \left(m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - Z_i \right) \delta z_i \right] = 0,$$

welche das System der Gleichungen (1) vollkommen ersetzt, wenn die Grössen δx_i , δy_i , δz_i willkürlich bleiben. Diese „symbolische Zusammenfassung“ der Gleichungen (1) bietet keine besonderen Vorteile, so lange das System der Punkte m keinen beschränkenden Bedingungen unterworfen ist.

¹⁾ Vgl. oben die Anmerkung auf Seite 81.

„Die wahre Bedeutung dieser Darstellung liegt vielmehr darin, dass sie auch noch dann beizubehalten ist, wenn das System nicht mehr ein freies ist, sondern wenn Bedingungen hinzutreten, welche die Verbindungen der Punkte ausdrücken. Aber alsdann sind die Variationen (d. h. die Grössen $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$) nicht mehr als ganz willkürlich und von einander unabhängig zu betrachten, sondern als virtuelle Variationen, d. h. als solche, welche mit den Bedingungen vereinbar sind. Die im Obigen enthaltene Ausdehnung unserer symbolischen Gleichung auf ein durch Bedingungen beschränktes System ist, wie sich von selbst versteht, nicht bewiesen, sondern nur historisch ausgesprochen. Diese Ausdehnung zu beweisen, ist keineswegs unsere Absicht, wir wollen sie vielmehr als ein Prinzip ansehen, welches zu beweisen nicht nötig ist. Dies ist die Ansicht vieler Mathematiker, namentlich auch von Gauss.¹⁾“

Auf diesem Standpunkte scheint man im wesentlichen auch heute noch zu stehen.²⁾ Gleichwertig damit ist es, wenn man die „Reaktionskräfte“, wie es z. B. Kirchhoff tut, in der durch obige Gleichungen (9) gegebenen Form ansetzt, denn da die Grössen $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ den Gleichungen

$$(40) \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, m$$

genügen sollen, fallen die Komponenten dieser Reaktionskräfte auf der linken Seite von (39) heraus.

Durch vorstehende Überlegungen dagegen sind wir mit Notwendigkeit auf den Ansatz (9) geführt worden, indem wir

¹⁾ Wahrscheinlich nach mündlicher Äusserung von Gauss gegen Jacobi, wie Clebsch zu dieser oben angeführten Stelle aus Jacobi's Vorlesungen über Dynamik (p. 14 f.) bemerkt.

²⁾ So postuliert z. B. Volkmann die Ausdehnung des d'Alembert'schen Prinzips auf bedingte Bewegungen über die unmittelbar evidenten einfachen Fälle hinaus: Einführung in das Studium der theoretischen Physik, Leipzig 1900, p. 335 ff.; vgl. auch die Darstellung bei Voss: Die Prinzipien der rationellen Mechanik, Enzyklopädie der math. Wissenschaften, 1901; nach ihm ist auch die Definition des Gleichgewichtes durch eine axiomatische Annahme zu erweitern (p. 65).

zuvor als Reaktionskräfte ein solches System von Kräften definierten, bei dem infolge der Bedingungsgleichungen die Punkte in Ruhe bleiben, und zwar das allgemeinste System dieser Art; und diese Definition ist nicht willkürlich, sondern entspricht genau den Vorstellungen, die wir mit dem Begriffe von Reaktionskräften zu verbinden pflegen.

Für den Fall, dass die Bedingungsgleichungen nur die Koordinaten der bewegten Punkte enthalten, ist hiernach das in Gleichung (39) ausgesprochene d'Alembert'sche Prinzip als eine Folge obiger Definition der Reaktionskräfte dargestellt; die an die Bedingungen (40) gebundenen Grössen $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ können dabei als Komponenten virtueller Verwicklungen des Systems gedeutet werden.

Kommt die Zeit in den Funktionen f_k explicite vor, so ändern sich die Formeln für die Komponenten der Reaktionskräfte, wenn man letztere durch eine Definition bestimmt, die sich als natürliche Erweiterung der im einfachsten Falle benutzten ergibt. Auch in diesem Falle gilt daher wieder das d'Alembert'sche Prinzip in der Form (39), wenn die $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ wieder an die Bedingungen (40) gebunden sind. Eine virtuelle Verrückung ist also jetzt nicht eine solche, die sich mit den Bedingungen in Übereinstimmung befindet, denn dann hätten die Gleichungen (40) durch die folgenden ersetzt werden müssen:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} \delta z_i \right) + \frac{\partial f_k}{\partial t} \delta t = 0.$$

Eine virtuelle Verrückung entsteht also aus einer möglichen, wenn man $\delta t = 0$ wählt, was analytisch stets erlaubt ist, mechanisch aber keine direkte Bedeutung hat, da eine unendlich kleine Bewegung nur unter gleichzeitiger unendlich kleiner Änderung der Zeit möglich wird.

Kommen auch die Differentialquotienten der Koordinaten nach der Zeit in den Bedingungen vor, so genügt wieder die obige erste Definition der Reaktionskräfte (als die allgemeinsten, bei denen infolge

der Bedingungen die Ruhe erhalten bleibt) um die Komponenten dieser Kräfte zu berechnen. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Erstens: die Bedingungen sind linear und homogen in den Differentialquotienten; dann gelten die Formeln (18); das d'Alembert'sche Prinzip bleibt also gültig, wenn nur die virtuellen Verrückungen den Bedingungen genügen, d. h. wenn die zu (17) analogen Gleichungen

$$\sum_{i=1}^n (\varphi_{ki} \delta x_i + \psi_{ki} \delta y_i + \chi_{ki} \delta z_i) = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, m$$

erfüllt sind. Dieser Fall kommt insbesondere bei der rollenden Bewegung eines Körpers in Betracht; bei einer solchen bleibt also in der Tat das d'Alembert'sche Prinzip anwendbar, und ist somit das von C. Neumann angewandte Verfahren zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen durch unsere Definition der Reaktionskräfte gerechtfertigt.¹⁾

Zweitens: die Bedingungen sind in beliebiger Weise von den Komponenten der Geschwindigkeiten abhängig. In diesem Falle kommen die Formeln (21) zur Anwendung; das d'Alembert'sche Prinzip bleibt also auch hier bestehen, wenn nur jetzt unter den $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ solche Variationen verstanden werden, die den Bedingungen

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \frac{\partial f_k}{\partial x'_i} \frac{x'_i}{x_i} \right) \delta x_i + \left(\frac{\partial f_k}{\partial y_i} + \frac{\partial f_k}{\partial y'_i} \frac{y'_i}{y_i} \right) \delta y_i + \left(\frac{\partial f_k}{\partial z_i} + \frac{\partial f_k}{\partial z'_i} \frac{z'_i}{z_i} \right) \delta z_i \right] = 0$$

für $k = 1, 2, \dots, m$

genügen. Der Vorteil, den das Prinzip bietet, geht allerdings hier, wo die Variationen selbst noch von den Beschleunigungen

¹⁾ Über die rollende Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Horizontalebene unter dem Einflusse der Schwere, Berichte der k. sächsischen Gesellschaft d. Wiss., Oktober 1885, und Math. Annalen, Bd. 27, sowie Hölder a. a. O. Für das Rollen zweier beliebigen Flächen aufeinander, vgl. Appell: Les mouvements de roulement en dynamique, (in der Sammlung „Scientia“) 1899, wo man auch weitere Literaturangaben findet.

x_i, y_i, s_i abhängen, ganz verloren. Solche Bedingungsgleichungen allgemeinsten Form scheinen in der Mechanik überhaupt keine Anwendung zu finden.

Kommt neben den Geschwindigkeiten auch die Zeit in den Bedingungen explicite vor, so lassen sich leicht entsprechende Überlegungen anwenden, wie sie oben unter II. durchgeführt wurden. Ebenso übersieht man sofort, wie sich die Verhältnisse gestalten, wenn von den Bedingungsgleichungen einige von der ersten, andere von der zweiten, wieder andere von der dritten Form vorausgesetzt werden. Auch die für die Mechanik zunächst bedeutungslosen Fälle, wo dritte und höhere Differentialquotienten in den Bedingungen vorkommen, gestatten eine analoge Behandlung.

Setzt man die Ausdrücke (21) bzw. (22) in die Gleichungen (4) ein, so ergeben sich Gleichungen von der gewöhnlichen Form

$$\mu_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \dots$$

wenn man

$$\mu_i = m_i - \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{1}{x_i}$$

setzt. Die Punkte bewegen sich demnach so, als wenn ihre scheinbare Masse μ_i von der wirklichen Masse m_i und von ihrem Orte und ihren Geschwindigkeiten abhinge. Wenn man also in der neueren Theorie der Elektronen dazu geführt wurde, die Masse als veränderlich zu denken, so kann dies dadurch veranlasst sein, dass die Bewegung unter Bedingungen erfolgt, deren analytische Formulierung die Benutzung der Geschwindigkeitskomponenten erfordert.