Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXIV. Jahrgang 1904.

München.
Verlag der K. Akademie.
1905.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Über
die Nicht-Fortsetzbarkeit gewisser Potenzreihen.

Von **Georg Faber.**

(Eingelaufen 6. Februar.)

Es sei n_ν $(\nu = 0, 1, 2 \ldots)$ eine Folge wachsender natürlicher Zahlen und es werde gesetzt:

(1) $$F(x) = \sum_0^\infty{}^\nu a_{n_\nu} x^{n_\nu},$$

wo:

(2) $$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[n_\nu]{|a_{n_\nu}|} = 1,$$

sodass also die Potenzreihe $F(x)$ den Konvergenzradius 1 besitzt. Nachdem man zunächst erkannt hatte, dass für gewisse spezielle Fälle (wie $n_\nu = \nu^2$, $n_\nu = 2^\nu$, $n_\nu = \nu!$) die Reihe $F(x)$ über den Einheitskreis nicht fortsetzbar ist, zeigten zuerst die Herren Hadamard und Borel, dass diese Erscheinung allemal eintritt, wenn:

(3) $$\lim_{\nu=\infty} \frac{n_{\nu+1} - n_\nu}{n_\nu} > \lambda > 0,$$ [1]

bezw. wenn

(4) $$\lim_{\nu=\infty} \frac{n_{\nu+1} - n_\nu}{\sqrt{n_\nu}} > \lambda > 0$$ [2]

ist, und schliesslich gelang es Herrn Fabry das gleiche nachzuweisen, wenn nur

---

[1] Hadamard, Journ. de Math. (4) 8 (1892).

[2] Borel, Comptes rendus de l'Acad. des Sc. vom 5. Okt. 1896.

(5) $$\lim_{\nu=\infty} n_{\nu+1} - n_\nu = \infty, \text{ [1]}$$

ja selbst unter gewissen noch allgemeineren Voraussetzungen.

Der Fabry'sche Beweis bietet durch die verwickelten Rechnungen, deren er bedarf, dem Verständnis nicht unerhebliche Schwierigkeiten. Es dürfte daher nicht unwillkommen sein, wenn ich im folgenden für die Fabry'schen Sätze einen neuen, verhältnismässig einfachen Beweis liefere, der sich lediglich auf ohnehin bekannte Hilfssätze stützt und keine umständliche Rechnung verlangt.

§ 1.

Setzt man, wie zunächst geschehen möge, statt der Beziehung (5) die engere aber (3) und (4) als einfachste Fälle umfassende

(6) $$\lim \frac{n_{\nu+1} - n_\nu}{n_\nu^\sigma} > \lambda > 0 \quad (\sigma > 0)$$

voraus, so lässt sich der Beweis besonders einfach auf die sogleich anzuführenden Hilfssätze stützen. Der Beweis der noch allgemeineren Fabry'schen Sätze folgt im § 3, während im § 2 ein einfacher Beweis der Hilfssätze II und III eingeschoben wird.

Als I. Hilfssatz erwähne ich den folgenden, der in dieser Form von Herrn Fabry, in weniger prägnanter schon von Herrn Hadamard angegeben ist, und verweise wegen des Beweises auf die in der Fussnote[2]) angeführten Stellen:

I. Hilfssatz: Der Punkt $e^{\beta i}$ ist ein singulärer oder regulärer der Funktion $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$, wo $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 1$, je nachdem $\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|\varphi_n(e^{\beta i})|}$ gleich 1 oder kleiner als 1 ausfällt; dabei ist

(7) $$\varphi_n(e^{\beta i}) = a_n + \sum_0^{\lambda n}{}^\nu (C_\nu a_{n+\nu} e^{\nu\beta i} + C_{-\nu} a_{n-\nu} e^{-\nu\beta i})$$

[1]) Fabry, Ann. éc. norm. (3) 13 (1896); acta math. 22 (1898).

[2]) Hadamard und Fabry a. a. O. (s. Fussn. 1 p. 63 und 64); ein anderer Beweis findet sich in meiner Dissertation p. 19.

ein gewisses die Koeffizienten a_ν mit Indices zwischen $n(1-\lambda)$ und $n(1+\lambda)$ enthaltendes Polynom und λ eine beliebige von n unabhängige Zahl zwischen Null und 1.

Aus diesem Hilfssatz ergibt sich sofort der Einheitskreis als natürliche Grenze unter der Annahme (3) (da sich für jedes β die φ_{n_ν} auf die a_{n_ν} reduzieren); und hierauf lässt sich, wie jetzt gezeigt werden soll, die weitere Voraussetzung (6) zurückführen.

Es werde, wie erlaubt ist, angenommen, dass die Grenzbedingung (6) schon von $\nu = 0$ ab gilt, also

$$
\begin{aligned}
&n_1 \quad\; - n_0 > \lambda\, n_0^\sigma \\
&n_2 \quad\; - n_1 > \lambda\, n_1^\sigma \qquad (8)\\
&\cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\
&n_{\nu+1} - n_\nu > \lambda\, n_\nu^\sigma,
\end{aligned}
$$

woraus durch Addition folgt:

$$n_{\nu+1} > \lambda\,(n_0^\sigma + n_1^\sigma + \cdots + n_\nu^\sigma), \tag{9}$$

oder, da wegen der vorhandenen Lücken $n_\nu > \nu$ vorausgesetzt werden darf:

$$
\begin{aligned}
n_{\nu+1} &> \lambda\,(1^\sigma + 2^\sigma + \cdots + \nu^\sigma) \qquad (10)\\
&> \lambda \int_0^\nu x^\sigma\, d\,x = \frac{\lambda}{\sigma + 1}\,\nu^{\sigma+1}.
\end{aligned}
$$

Wird nun ϱ zwischen 0 und 1 so gewählt, dass $\varrho\,(\sigma+1)$ um eine bestimmte Zahl δ grösser als 1 ausfällt, so folgt aus (10):

$$n_{\nu+1}^\varrho > \left(\frac{\lambda}{\sigma+1}\right)^\varrho \nu^{1+\delta}; \tag{11}$$

darnach ist die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu \frac{1}{n_\nu^\varrho}$ konvergent.

Die ganze Funktion $G(x)$, welche die n_ν oder einen Teil derselben zu Nullstellen hat, ist demnach höchstens von der Ordnung ϱ und es besteht daher für ein beliebiges positives ε und für $r > r'$ die Ungleichung:

(12) $$| G(r e^{i\varphi}) | < e^{\varepsilon r^{\varrho}},$$

und umsomehr, da $\varrho < 1$,

(12ᵃ) $$| G(r e^{i\varphi}) | < e^{\varepsilon r}. \text{ [1]}$$

Andererseits gilt für alle reellen $r > r''$, die von jeder Nullstelle der Funktion $G(x)$ um mindestens die Einheitsstrecke entfernt sind, und für jedes noch so kleine ε die Ungleichung:

(13) $$| G(r) | > e^{-r^{\varrho+\varepsilon}}. \text{ [2]}$$

Da $\varrho < 1$ ist, darf auch $\varrho + \varepsilon < 1$ gedacht werden.

Als Nullstellen von $G(x)$ mögen sämtliche n_ν gewählt werden mit Ausnahme einer Folge $m_1, m_2 \ldots$, die der Bedingung

(14) $$\frac{m_{\nu+1} - m_\nu}{m_\nu} > \lambda$$

genügt.

Nach (12) und (13) gelten, sobald m_ν eine gewisse Grenze übersteigt, die Ungleichungen:

$$e^{\varepsilon m_\nu^{\varrho}} > | G(m_\nu) | > e^{-m_\nu^{\varrho+\varepsilon}},$$

also, indem man überall die m_ν^{te} Wurzel nimmt:

$$e^{\frac{\varepsilon}{m_\nu^{1-\varrho}}} > \sqrt[m_\nu]{| G(m_\nu) |} > e^{-\frac{1}{m_\nu^{1-\varrho-\varepsilon}}},$$

und da hier die Exponenten von e mit wachsendem m_ν der Null zustreben:

(15) $$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[m_\nu]{| G(m_\nu) |} = 1.$$

[1] Poincaré, Bull. de la soc. math. de France 11 (1883). — Borel, Leçons sur les fonctions entières (Paris 1900), p. 56. — Lindelöf, acta soc. fenn., Bd. 31 (1902), p. 4. — Pringsheim, Sitzungsber. der Münch. Akad., Bd. 33 (1903), p. 111, Math. Ann. 58 (1904), p. 299 ff.

[2] Hadamard, Journ. de Math. (4) 9 (1893). — Borel, a. a. O., p. 79. — Lindelöf, a. a. O., p. 6. — Für die oben benutzte spezielle Funktion $G(x)$ lässt sich der Beweis bedeutend vereinfachen (vgl. § 3).

Nun bestehen folgende Hilfssätze:

Hilfssatz II.[1]) Genügt die ganze Funktion $G(x)$ für ein beliebiges positives ε und für $r > r'$ der Ungleichung:

$$(12^a) \qquad |G(re^{i\varphi})| < e^{\varepsilon r},$$

so hat die Funktion $\sum_0^\infty{}^\nu\, G(\nu)\, x^\nu$ (d. h. die Reihe und ihre analytische Fortsetzung) keine andere singuläre Stelle als $x = 1$.

Als $G(x)$ denke man sich speziell die vorhin so bezeichnete Funktion.

Hilfssatz III.[2]) Sind α die singulären Stellen der Funktion $\sum_0^\infty{}^\nu\, a_\nu x^\nu$ und β diejenigen der Funktion $\sum_0^\infty{}^\nu\, b_\nu x^\nu$, so befinden sich die Singularitäten der Funktion $\sum_0^\infty{}^\nu\, a_\nu b_\nu x^\nu$ unter den Stellen $\alpha \cdot \beta$.

Wendet man diesen Satz auf die Reihen $\sum_0^\infty{}^\nu\, a_{n_\nu} x^{n_\nu}$ (1) und $\sum_0^\infty{}^\nu\, G(\nu)\, x^\nu$ an, so ergibt sich unter Beachtung des Hilfssatzes II, dass jede singuläre Stelle der Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu\, G(n_\nu) \cdot a_{n_\nu} x^{n_\nu}$, für die nach der Definition von $G(x)$ auch

$$(16) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu\, G(m_\nu)\, a_{m_\nu} x^{m_\nu}$$

geschrieben werden darf, auch eine solche der Funktion $\sum_0^\infty{}^\nu\, a_{n_\nu} x^{n_\nu}$ ist; da infolge von (2) und (15)

$$(17) \qquad \lim \sqrt[m_\nu]{G(m_\nu)\,|a_{m_\nu}|} = 1$$

ist, hat die Reihe (16) als Konvergenzkreis den Einheitskreis; und dieser ist nach der Bestimmung der m_ν (14) und nach Hilfssatz I eine singuläre Linie für (16) und damit auch für (1).

---

[1]) Leau, Journ. de Math. (5) 5 (1899). — Faber, Math. Ann. 57 (1903), p. 374.

[2]) Hadamard, acta math. 22 (1898).

§ 2.

Die Hilfssätze II und III lassen sich, soweit sie hier angewandt wurden, in die folgende Aussage zusammenfassen:

Verhält sich die Funktion

$$F(x) = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu \tag{18}$$

in dem den Nullpunkt enthaltenden von der rektifizierbaren Kurve C begrenzten Gebiete S, sowie auf C selber regulär, so ist in S auch die Funktion

$$F_1(x) = \sum_0^\infty{}^\nu G(\nu) a_\nu x^\nu \tag{19}$$

regulären Verhaltens, wenn $G(x)$ eine ganze Funktion bedeutet, die der Bedingung

$$\lim_{r=\infty} G(r e^{i\varphi}) e^{-\varepsilon r} = 0 \tag{20}$$

für jedes positive ε genügt.

Dieser Satz lässt sich verhältnismässig einfach direkt beweisen: Es genügt zu zeigen, dass $F_1(x)$ in einem Gebiete S' regulär ist, das nur diejenigen Punkte von S nicht enthält, die von C einen Abstand $< \eta$ (< 1) haben. Für jedes x in S' ist

$$F_{(x)}^{(\varkappa)} = \frac{\varkappa!}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)\, dz}{(z-x)^{\varkappa+1}}, \tag{21}$$

also wenn $|F(z)| < G$ auf C und L die Länge dieser Kurve ist:

$$|F_{(x)}^{(\varkappa)}| < \frac{\varkappa!}{2\pi} \frac{G \cdot L}{\eta^{\varkappa+1}}. \tag{22}$$

Bedeutet ferner $\vartheta(F(x))$ die Operation $x\frac{dF}{dx}$, $\vartheta^\nu(F(x))$ die ν malige successive Anwendung derselben und $\vartheta^0(F(x))$ soviel wie $F(x)$, so ergibt sich speziell

$$\vartheta^\varkappa(x^\nu) = \nu^\varkappa x^\nu, \qquad \text{also}$$

$$\vartheta^\varkappa\Big(\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu\Big) = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \nu^\varkappa x^\nu, \tag{23}$$

und allgemein, wie man leicht durch vollständige Induktion nachweist: [1])

(24) $$\vartheta^{\varkappa}(F(x)) = \sum_{1}^{\varkappa}{}^{\nu}\, b_{\nu}^{(\varkappa)} x^{\nu} \frac{d^{\nu} F(x)}{d x^{\nu}},$$

wo

(25) $$b_{\nu}^{(\varkappa)} < \frac{2^{\varkappa} \cdot (\varkappa - 1)!}{\nu!},$$

also wenn das Gebiet S ganz innerhalb des um den Nullpunkt mit dem Radius $R\,(> 1)$ beschriebenen Kreises liegt:

(26) $$|\vartheta^{\varkappa}(F(x))| < 2^{\varkappa} \cdot (\varkappa - 1)! \sum_{1}^{\varkappa}{}^{\nu} \frac{R^{\nu} \cdot |F_{(x)}^{(\nu)}|}{\nu!}$$

und mit Benutzung von (22):

(27) $$|\vartheta^{\varkappa}(F(x))| < \frac{G\,L}{2\pi \cdot \eta} \cdot 2^{\varkappa}(\varkappa - 1)! \sum_{1}^{\varkappa}{}^{\nu} \left(\frac{R}{\eta}\right)^{\nu}$$
$$< \frac{G \cdot L}{2\pi \cdot \eta} \cdot \left(\frac{2R}{\eta}\right)^{\varkappa} \cdot \varkappa!\,.$$

Lautet nun die Potenzreihenentwickelung der oben ((19) und (20)) erwähnten Funktion $G(x)$:

(28) $$G(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\varkappa}\, c_{\varkappa} x^{\varkappa},$$

so folgt aus (20):

(29) $$\lim_{\varkappa=\infty} \sqrt[\varkappa]{|c_{\varkappa}| \cdot \varkappa!} = 0.$$ [2])

Bildet man daher die Reihe $\sum_{0}^{\infty}{}^{\varkappa}\, c_{\varkappa} \vartheta^{\varkappa}(F(x))$, so ist dieselbe wegen (27) und (29) für alle x in S' gleichmässig konvergent, stellt daher nach dem Weierstrass'schen Doppelreihensatze eine in S' reguläre analytische Funktion dar; die

---

[1]) S. Faber, Math. Ann. 57 (1903), p. 375.

[2]) Poincaré, Bull. de la soc. math. de France 11 (1883). — Lindelöf, a. a. O., p. 34. — Pringsheim, Sitzungsber. d. Münch. Akad. Bd. 32 (1902), p. 188; Math. Ann. 58 (1904), p. 266.

letztere ist aber keine andere als $F_1(x)$ (19); denn der Koeffizient von x^ν in der Potenzreihe für $\sum_0^\infty{}^\varkappa c_\varkappa \vartheta^\varkappa(F(x))$ ist (vgl. (23)):

$$a_\nu \sum_0^\infty{}^\varkappa c_\varkappa \nu^\varkappa = a_\nu G(\nu). \tag{30}$$

§ 3.

Es werde jetzt nach Herrn Fabry eine Reihe

$$F(x) = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu \tag{31}$$

angenommen und vorausgesetzt, dass es unendlich viele Indices $m_1, m_2 \ldots$ und zugehörige Intervalle:

$$m_i(1-\lambda) \text{ bis } m_i(1+\lambda) \quad - i = 1, 2 \ldots - \tag{32}$$

gibt von folgenden Eigenschaften: Es ist

$$\lim_{i=\infty} \sqrt[m_i]{|a_{m_i}|} = 1 \tag{33}$$

und

$$\lim_{i=\infty} \frac{s_i}{m_i} = 0, \tag{34}$$

wenn s_i die Anzahl der im i^{ten} der Intervalle (32) ausser a_{m_i} noch vorhandenen nicht verschwindenden Koeffizienten bedeutet. Unter diesen Voraussetzungen, die unter anderem bei den eingangs erwähnten Reihen $\sum_0^\infty{}^\nu a_{n_\nu} x^{n_\nu}$, wo $\lim_{\nu=\infty} n_{\nu+1} - n_\nu = \infty$ ist, zutreffen, wird sich der Einheitskreis als natürliche Grenze ergeben.

Es kann ferner vorausgesetzt werden, dass die m_i so ausgewählt seien, dass die Ungleichungen bestehen:

$$m_{i+1} > 2\,\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\, m_i \tag{35}$$

und

$$\prod_0^\infty{}^\nu \left(1 - \frac{m_i^2(1+\lambda)^2}{(m_{i+1}(1-\lambda)+\nu)^2}\right) > (1-\varepsilon_i)^{m_i}, \tag{36}$$

wo $\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots$ eine gegebene der Null zustrebende Zahlenfolge ist.

Wegen (34) gilt ferner, wenn $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben ist, für ein bestimmtes n und jedes $r \geqq 0$:

$$s_{n+r} < \frac{\varepsilon}{4} m_{n+r}, \tag{37}$$

woraus durch Addition für $r = l,\ l-1,\ \ldots 2, 1, 0$ folgt:

$$\begin{aligned} s_n + s_{n+1} + \cdots + s_{n+l} &< \frac{\varepsilon}{4}(m_{n+l} + m_{n+l-1} + \cdots + m_{n+1} + m_n) \\ &< \frac{\varepsilon}{4}\left(m_{n+l} + \frac{m_{n+l}}{2} + \cdots \frac{m_{n+l}}{2^{l-1}} + \frac{m_{n+l}}{2^l}\right) \\ &\qquad \text{(nach (35))} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} m_{n+l}. \end{aligned} \tag{38}$$

Wählt man noch l so gross, dass

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1} < \frac{\varepsilon}{2} m_{n+l},$$

so ergibt sich für $\varkappa \geqq n + l$:

$$\frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_\varkappa}{m_\varkappa} < \varepsilon. \tag{39}$$

Es wird nun wieder eine ganze Funktion $G(x)$ gebildet, welche die Indices der in den Intervallen (31) nicht verschwindenden Koeffizienten, die $m_1\ m_2 \ldots$ selber ausgenommen, sowie die negativen Werte jener Indices zu Nullstellen hat. Die Beziehung (39) sagt dann aus, dass, wenn $r_1\ r_2 \ldots$ die nach der Grösse ihres absoluten Betrags geordneten Nullstellen von $G(x)$ sind,

$$\lim \frac{\nu}{r_\nu} = 0 \quad \text{oder} \quad \lim \frac{r_\nu}{\nu} = \infty \text{ ist.} \tag{40}$$

Die direkte Vergleichung der Funktion

$$G(x) = \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x^2}{r_\nu^2}\right) \tag{41}$$

mit

$$\sin i\varepsilon x = i \cdot \varepsilon \cdot x \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 + \frac{x^2 \varepsilon^2}{\nu^2 \pi^2}\right) \tag{42}$$

ergibt deshalb

(43) $$\lim_{r=\infty} G(r e^{i\varphi}) e^{-\varepsilon r} = 0$$ [1])

für jedes positive ε.

Andrerseits ist zu zeigen, dass

(44) $$\lim_{i=\infty} \sqrt[m_i]{|G(m_i)|} = 1 \quad \text{ist.}$$

Da durch (43) ein $\lim\limits_{i=\infty} \sqrt[m_i]{|G(m_i)|} > 1$ schon ausgeschlossen ist, so genügt es zu zeigen, dass $\underline{\overline{\lim}} \sqrt[m_i]{|G(m_i)|}$ nicht kleiner als 1 ist. Um diesen Nachweis zu führen, denke man sich das Produkt (41) für $G(m_i)$ in $P_1 \cdot P_2$ zerlegt, wo P_1 die Nullstellen mit einem absoluten Betrage $< m_i(1+\lambda)$, P_2 die übrigen enthält. Da $|P_2|$ grösser ist als das Produkt auf der linken Seite von (36), so kann $\lim\limits_{i=\infty} \sqrt[m_i]{|P_2|}$ nicht < 1 sein; und es erübrigt nur, das gleiche von P_1 zu zeigen; es ist aber

(45) $$|P_1| = \prod_1^{s_1+s_2+\cdots+s_i}{}_\nu \frac{(m_i + r_\nu)\,|m_i - r_\nu|}{r_\nu \cdot r_\nu}.$$

Im Zähler von (45) steht das Produkt der Entfernungen der $2(s_1 + s_2 + \cdots s_i)$ dem absoluten Betrage nach unter $m_i(1+\lambda)$ liegenden Nullstellen vom Punkte m_i, im Nenner das gleiche für den Nullpunkt gebildete Produkt. Solange r_ν nicht im Intervalle $m_i(1-\lambda)$ bis $m_i(1+\lambda)$ liegt, ist nach (35) $m_i > 2r_\nu$, also der von r_ν herrührende Faktor des Zählers in (45) grösser als derjenige des Nenners. Es könnte also $\lim\limits_{i=\infty} |P_1|^{\frac{1}{m_i}}$ höchstens noch durch den Einfluss der s_i im Intervalle $m_i(1-\lambda)$ bis $m_i(1+\lambda)$ — $i = 1, 2 \ldots$ — gelegenen

[1]) Die ganze Funktion $G(x)$ ist hier im allgemeinen nicht — wie im § 1 — von einer Ordnung $\varrho < 1$, sondern von der Ordnung 1, gehört aber dem Minimaltypus an nach der Bezeichnungsweise des Herrn Pringsheim; vgl. Sitzungsber. d. Münch. Akad., Bd. 33 (1903), p. 111 und p. 129.

Nullstellen unter 1 herabgedrückt werden. Unter diesen s_i Nullstellen mögen s_i' grösser, s_i'' kleiner als m_i sein, sodass

(46) $$s_i = s_i' + s_i''.$$

Da aber die Differenz zweier aufeinanderfolgender Nullstellen eine ganze Zahl und daher mindestens $= 1$ ist, so geben diese Nullstellen im Zähler von P_1 zu einem Produkte Anlass, das mindestens $= 1 \cdot 2 \ldots s_i' \cdot 1 \cdot 2 \ldots s_i''$; andrerseits ist jede dieser s_i Nullstellen $< m_i(1+\lambda)$, ihr Produkt im Nenner von P_1 also $< m_i^{s_i}(1+\lambda)^{s_i}$, sodass sich ergibt

(47) $$|P_1| > C \frac{s_i'!\, s_i''!}{m_i^{s_i}(1+\lambda)^{s_i}},$$

wo nach dem vorher Bemerkten $C > 1$, und da allgemein $h! > \left(\frac{h}{e}\right)^h$:

(48) $$|P_1|^{\frac{1}{m_i}} > \frac{C^{\frac{1}{m_i}}}{e^{\frac{s_i}{m_i}}(1+\lambda)^{\frac{s_i}{m_i}}} \left(\frac{s_i'}{m_i}\right)^{\frac{s_i'}{m_i}} \left(\frac{s_i''}{m_i}\right)^{\frac{s_i''}{m_i}}.$$

Mit unendlich wachsendem i konvergieren aber

$$\frac{s_i}{m_i},\ \frac{s_i'}{m_i},\ \frac{s_i''}{m_i}$$

nach Null und die drei Faktoren auf der rechten Seite von (48) einzeln nach 1 (die beiden letzten wie x^x für $x = 0$); damit ist aber die Beziehung (44): $\lim\limits_{i=\infty} \sqrt[m_i]{|G(m_i)|} = 1$ bewiesen.

Die Reihe $\sum\limits_0^\infty{}^{\nu}\, G(\nu)\, a_\nu\, x^\nu$ hat nun in den Intervallen $\nu = m_i(1-\lambda)$ bis $\nu = m_i(1+\lambda)$ jedesmal nur einen nicht verschwindenden Koeffizienten: $a_{m_i} G(m_i)$; auf diesen reduziert sich für jedes β das Polynom $\varphi_{m_i}(e^{\beta i})$ (s. (7)) und es ist

$$\lim_{i=\infty} \sqrt[m_i]{|\varphi_{m_i}(e^{\beta i})|} = \sqrt[m_i]{|a_{m_i}|} \cdot \sqrt[m_i]{|G(m_i)|} = 1$$

(nach (33) und (44)); d. h. (s. Hilfssatz I) die Reihe

$$\sum_0^\infty{}^{\nu}\, G(\nu)\, a_\nu\, x^\nu$$

und die mit ihr in den Singularitäten übereinstimmende (31) hat den Einheitskreis zur natürlichen Grenze.

Zum Schlusse möge ein noch allgemeineres Theorem des Herrn Fabry Platz finden:

Bedeutet γ_n einen beliebigen mit n veränderlichen Bogen und s_n die Anzahl Zeichenwechsel der Realteile

$$\Re\,(a_{m_n+\nu}\, e^{(\nu\beta+\gamma_n)i}),$$

so lange ν zwischen $-\lambda\, m_n$ und $+\lambda\, m_n$ variiert, und ist

$$\text{(49)} \qquad \lim_{n=\infty} (\Re\,(a_{m_n} \cdot e^{\gamma_n i}))^{\frac{1}{m_n}} = 1$$

$$\text{(50)} \qquad \lim_{n=\infty} \frac{s_n}{m_n} = 0,$$

so ist der Punkt $e^{\beta i}$ ein singulärer der Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu (\overline{\lim} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 1)$.

Man wird hier zwischen zwei Indices, die zu Koeffizienten mit verschieden bezeichnetem $\Re\,(a_{m_n+\nu}\, e^{(\nu\beta+\gamma_n)i})$ gehören eine Nullstelle von $G(x)$ legen und so erreichen, dass für die Funktion $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, G(\nu)\, a_\nu\, x^\nu$ die Realteile der einzelnen Summanden in $e^{\gamma_n}\, i\, \varphi_{m_n}(e^{\beta i})$ gleichbezeichnet werden, sodass

$\Re\,(e^{\gamma_n}\, i\, \varphi_{m_n}(e^{\beta i})) > \Re\,(a_{m_n}\, e^{\gamma_n}\, i)$, also $\lim \sqrt[m_n]{|\varphi_{m_n}(e^{\beta i})|} = 1$ wird.

Wenn ein $\lim \dfrac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = e^{\beta i}$ existiert, so befindet man sich in den Voraussetzungen dieses Theorems und der Punkt $e^{\beta i}$ ist also ein singulärer.