

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1935. Heft III

November-Dezember-Sitzung

München 1935

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung



Zur Methodik der Dirac-Gleichung.

Von Walter Franz in München.

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung vom 2. November 1935.

Übersicht.

Einleitung	380
----------------------	-----

Teil I.

Theorie der Dirac-Gleichung.

§ 1. Theorie der Pauli-Gleichung	382
a) Ableitung der Gleichung	382
b) Die Zahlen des Quaternionenkörpers	383
c) Lösungen der Gleichung	384
d) Realitätseigenschaften	385
§ 2. Die Dirac-Gleichung und ihre Adjungierte. Physikalische Deutung	387
§ 3. Der Zahlkörper der Diracschen Operatoren	388
§ 4. Reduktion des Lösungssystems. Unabhängigkeit der physikalischen Ergebnisse von der speziellen Reduktion	391
§ 5. Bildung des Adjungierten. Realitätseigenschaften	392
§ 6. Transformationseigenschaften	394
§ 7. Normierungsbedingung. Vollständigkeitsrelation	397

Teil II.

Fragen der praktischen Rechnung.

§ 8. Rechenregeln	398
§ 9. Wechsel des Koordinatensystems. Normierungsfragen	400
§ 10. Beziehungen zwischen den physikalischen Größen	403
§ 11. Beziehungen zwischen Mittelwerten im stationären Zustand	405
§ 12. Spinmittelung	408

Teil III.

Anwendungen.

§ 13. Übergang von der Dirac- zur Pauli-Gleichung	411
§ 14. Elektron im Zentralfeld	413
§ 15. Bemerkung über die Wellenfunktionen des freien Elektrons	420
§ 16. Iterierte Dirac-Gleichung	422
a) Adjungierte Gleichung und Stromausdruck	422
b) Zurückführung auf Quaternionen	424
c) Reduktionsfragen	425
d) Zurückführung der Lösungen auf Lösungen der beiden linearen Gleichungen	426

Anhang.

Algebra der Cliffordschen Zahlen.

a) Satz von Clifford über den Aufbau der C_{2n} aus Quaternionen. Isomorphie von C_{2n} mit den 2^n -reihigen Matrizen	428
b) Zahlentypen des C_{2n} . Rang, Reduktionsvermögen	429
c) Zahlentypen in C_0, C_2, C_4	431
d) Zerfällbarkeit von C_{2n+1}	432
e) Quaternionen und Biquaternionen	434
f) Isotropie der Cliffordschen Zahlbereiche C	435

Einleitung.

Sauter hat in zwei Arbeiten¹ die Anregung gegeben, die Dirac-Gleichung zu lösen, ohne die Diracschen Operatoren und entsprechend die Eigenfunktionen durch Matrizen darzustellen; die Eigenfunktionen lassen sich vielmehr darstellen als hyperkomplexe Zahlen, die dem durch die Dirac-Operatoren erzeugten Zahlkörper angehören. Diese Methode bietet offensichtlich Vorteile mnemotechnischer Art, indem sie das Eingehen auf die etwas unübersichtlichen (insbes. Vorzeichen-) Verhältnisse der Matrizen überflüssig und statt dessen die einfachen Rechenregeln der Dirac-Operatoren zur Grundlage aller Rechnungen macht. Jedoch schien aus folgenden Untersuchungen, insbesondere von Bechert,² hervorzugehen, daß die Vorteile der Sauterschen Methode sich hiermit bereits erschöpfen. Freilich bietet es bei der Ableitung allgemeiner Beziehungen aus der Diracschen Gleichung (wie etwa die Behandlung des WKB-Verfahrens durch Bechert, ebda. § 2) große Vorteile, die γ -Matrizen nicht explizit hinschreiben, sondern nur die zwischen ihnen bestehenden einfachen Beziehungen zu benützen; dieses Vorgehen ist aber keineswegs für die Sautersche Methode kennzeichnend (eine konsequente Behandlung der Dirac-Gleichung ohne Matrizenansatz für die γ -s wurde kurz vor der ersten Sauterschen Arbeit durch Temple³ gegeben). Das Typische der Sauterschen Methode besteht vielmehr darin, daß man die Lö-

¹ F. Sauter, Z. f. Phys. 63, 803 (1930) und 64, 295 (1930).

² K. Bechert, Z. f. Phys. 79, 26 (1932) und Helv. Phys. Acta 6, 82 (1933).

³ G. Temple, The operational wave equation . . . , Proc. Roy. Soc. 127, 349 (1933).

sungen (nicht nur die Gleichung selbst) als Aggregat in den γ -s ansetzt.

Die folgende Untersuchung will zeigen, daß die Methode nicht nur mnemotechnischen Wert besitzt, sondern sich auch als selbstständiger Ausgangspunkt für allgemeine Überlegungen und spezielle Rechnungen eignet. Die Behandlung der Wellenfunktionen als hyperkomplexe Zahlen bietet zwar so lange keine wesentlichen Vorteile, als man sich darauf beschränkt, diejenigen Verfahren nachzuahmen, welche sich bei der Matrizenbehandlung der Dirac-Gleichung als zweckmäßig erwiesen haben; wenn man aber auf diesen engen historischen Anschluß verzichtet und bei der Wahl der anzuwendenden Verfahren dem Geist des hyperkomplexen Zahlkörpers gebührend Rechnung trägt, ergeben sich Vorteile sowohl für die Theorie der Gleichung wie für ihre praktische Anwendung. Der offensichtlichste Vorteil für die theoretische Behandlung liegt in der begrifflichen Einfachheit und Übersichtlichkeit der Methode, die z. B. einen besonders einfachen Beweis für die Lorentz-Invarianz der Gleichung gestattet (s. § 6). Um die Sautersche Methode bei der praktischen Berechnung von Wellenfunktionen mit Vorteil anzuwenden, benötigt man ein systematisches Lösungsverfahren, welches die in der Dirac-Gleichung vorhandene Zuordnung der γ -s zu den Koordinaten in keinem Augenblick verloren gehen läßt.

Der erste Teil der folgenden Betrachtungen ist ganz der Theorie der Dirac-Gleichung gewidmet, der zweite Teil beschäftigt sich mit Fragen der praktischen Rechnung, während der dritte Teil das Vorhergehende an einigen einfachen und wichtigen Beispielen erläutern soll. Um die Methode der hyperkomplexen Zahlen klar hervortreten zu lassen, werden wir die Existenz aller von der Matrizendarstellung ausgehenden Theorien ignorieren, bzw. die Zusammenhänge mit diesen nur in Einschaltungen behandeln.

Teil I. Theorie der Dirac-Gleichung.

§ 1. Theorie der Pauli-Gleichung.

Um die späteren Darlegungen über die Dirac-Gleichung anschaulicher und leichter verständlich zu machen, sollen die wichtigsten Punkte an dem einfacheren Beispiele der Pauli-Gleichung für ein Elektron erläutert werden. Wir bringen daher in Kürze die Ableitung der Paulischen Gleichung sowie die wichtigsten Gesichtspunkte bei ihrer Deutung; dabei müssen wir natürlich in vielen Punkten die Paulische Arbeit¹ einfach kopieren, während wir in denjenigen Punkten, welche mit der Matrizendarstellung der Paulischen Wellenfunktionen zusammenhängen, die ursprüngliche Arbeit, wie verabredet, ignorieren.

a) Ableitung der Gleichung. Ausgangspunkt ist die klassische Hamilton-Funktion für ein Elektron mit magnetischem Moment

$$(1) \quad H = H_0 + H_1,$$

worin H_0 die Hamilton-Funktion eines Elektrons ohne Spin (einschließlich angemessener Relativitätskorrekturen) ist, während

$$(2) \quad H_1 = -\frac{e\hbar}{4m^2c^2} (\mathfrak{s} [\mathfrak{E} \mathfrak{p}]) - \frac{e\hbar}{2mc} (\mathfrak{s} \mathfrak{H})$$

der spektroskopisch bekannten Tatsache Rechnung trägt, daß das Elektron ein magnetisches Moment von der Größe eines Bohrschen Magnetons besitzt. $\mathfrak{s}$ ist der Einheitsvektor in Richtung des Moments.

Bei der Quantisierung der Gleichung (1) entsteht die Aufgabe, den Einheitsvektor $\mathfrak{s}$ durch einen geeigneten Operator-Vektor σ zu ersetzen. Die Vertauschungsrelation für Momente

$$(3) \quad [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}] = -\frac{\hbar}{i} \mathfrak{M}$$

angewandt auf das Spinnmoment $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} \hbar \sigma$ ergibt

$$(4) \quad [\sigma, \sigma] = 2i\sigma.$$

¹ W. Pauli, Z. f. Phys. 43, 601 (1927).

Wenn man noch beachtet, daß σ_x , σ_y , σ_z nur die Werte ± 1 annehmen können, d. h. daß

$$(5) \quad \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1,$$

dann ergibt sich nach kurzer Rechnung:

$$(6) \quad \sigma_y \sigma_z = -\sigma_z \sigma_y = i \sigma_x$$

und zwei entsprechende Gleichungen, die aus (6) durch zyklische Vertauschung der Koordinaten entstehen; damit erweisen sich die drei Komponenten des Operators σ als Quaternionen (von einem Faktor i abgesehen).

Damit der Operator σ wirklich einen sinnvollen Ersatz für den klassischen Vektor $\mathfrak{s}$ bildet, muß man auch ihm notwendig Vektor-Charakter zuschreiben können. Das bedeutet, daß (σe) , das skalare Produkt von σ mit irgendeinem Einheitsvektor e , entsprechend Gleichung (5) das Quadrat $(\sigma e)^2 = 1$ besitzen muß, und daß ferner eine Gleichung wie (6) $((e_y \sigma)(e_z \sigma) = i([e_y e_z] \sigma))$ für zwei beliebige senkrechte Einheitsvektoren gelten muß. Man überzeugt sich leicht, daß dies tatsächlich der Fall ist, und daß man (5) und (6) ersetzen kann durch die folgende bekannte vektorielle Beziehung:

$$(7) \quad (a \sigma)(b \sigma) = (ab) + i([ab] \sigma),$$

worin a und b beliebige Vektoren sind.

b) Die Zahlen des Quaternionenkörpers haben alle die Gestalt $A = a_0 + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3$ oder $a_0 + (a \sigma)$. Die a_i sind gewöhnliche komplexe Zahlen. Das Produkt

$$\{a_0 + (a \sigma)\} \{a_0 - (a \sigma)\} = a_0^2 - a^2,$$

ist eine Quaternionen-freie Größe. Ist diese von Null verschieden, dann besitzt die Zahl A ein Reziprokes $\left(A^{-1} = \frac{a_0 - (a \sigma)}{a_0^2 - a^2} \right)$; wenn dagegen $a_0^2 - a^2 = 0$ ist, dann ist A ein Nullteiler und besitzt kein Reziprokes. Die Nullteiler haben, wie man sich leicht überzeugt, alle die Gestalt $(1 + (e \sigma))$ mit rechten oder linken Faktoren. (e ist ein Einheitsvektor.)

Die für uns wichtigste Eigenschaft der Nullteiler ist ihre Fähigkeit zu „reduzieren“. Multiplizieren wir etwa die allge-

meine vierparametrische Quaternionenzahl A von rechts mit dem Nullteiler $(1 + \sigma_3)$, dann hängt das Produkt $(a_0 + a_1 \sigma_1 + a_2 \cdot i \sigma_1 + a_3)(1 + \sigma_3)$ nur mehr von den zwei Parametern $(a_0 + a_3)$ und $(a_1 + i a_2)$ ab. Multiplizieren wir auch noch von links mit $(1 + \sigma_3)$, dann entsteht die einparametrische Größe $(a_0 + a_3) \cdot (1 + \sigma_3)^2$. Jede Multiplikation mit $(1 + \sigma_3)$ hat die Anzahl der Parameter auf die Hälfte reduziert. Dieselbe Reduktion tritt ein, wenn man statt $(1 + \sigma_3)$ irgend zwei Nullteiler zur Multiplikation von rechts und von links verwendet.

c) Lösungen der Gleichung. Die Lösungen der Pauli-Gleichung müssen ebenso wie deren Koeffizienten dem Körper der Quaternionen angehören. Ein Lösungssystem der Gleichung, welches in dem Körper der Quaternionen vollständig ist, ist aber nicht ohne weiteres physikalisch brauchbar. — Die physikalisch deutbaren Größen haben die Gestalt $\psi_n \Pi \psi_m$, wobei ψ_m eine Lösung der Pauli-Gleichung, ψ_n eine Lösung der adjungierten Gleichung und Π eine dem Quaternionenkörper angehörige Größe ist. Damit ein Lösungssystem physikalisch brauchbar ist, müssen natürlich alle auf diese Weise gebildeten Ausdrücke untereinander, insbesondere zu der die Aufenthaltswahrscheinlichkeit kennzeichnenden Größe, in einem von Quaternionen freien Verhältnis stehen, d. h. es muß sein

$$(8) \quad \bar{\psi}_n \Pi \psi_m = P_{nm} \cdot N,$$

worin die P_{nm} keine Quaternionen enthalten, während N eine universelle konstante Quaternionengröße ist. In die physikalische Deutung gehen nur die Verhältnisse der P_{nm} untereinander ein.

Das unter b) besprochene Reduktionsvermögen der Nullteiler verhilft zur Erfüllung der Forderung (8). Besitzen wir etwa ein im Gesamtkörper der Quaternionen vollständiges System von Lösungen, dann multiplizieren wir die ψ_m von rechts und die $\bar{\psi}_n$ von links mit je einem willkürlichen konstanten Nullteiler. Die Eigenschaft der ψ_m und $\bar{\psi}_n$, Lösung der Pauli-Gleichung und deren Adjungierter zu sein, wird dadurch nicht zerstört. Die Gesamtheit der quadratischen Größen $\bar{\psi}_n \Pi \psi_m$ wird jedoch einparametrisch, wie (8) verlangt. Es läßt sich leicht einsehen, daß die physikalischen Ergebnisse von der speziellen Wahl der beiden Nullteiler unabhängig sind; den allgemeinen Beweis hier-

für werden wir bei der späteren Behandlung der Dirac-Gleichung erbringen (s. § 4).

Der Ansatz von ψ als Matrixspalte ist offensichtlich ein spezieller Fall für die gegebene allgemeine Vorschrift; denn

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_3 \\ \psi_2 & \psi_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist ein Nullteiler, während die Matrix $\begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_3 \\ \psi_2 & \psi_4 \end{pmatrix}$ das allgemeinste Aggregat der Einheitsmatrix und der drei Quaternionen-Matrizen ist. Die größere Allgemeinheit unserer obigen Vorschrift läßt sich beim Aufbau der Theorie mit Vorteil benützen, sofern man eben nicht Matrizen, sondern den hyperkomplexen Zahlbereich zugrunde legt. Während nämlich beim Arbeiten mit Matrizen die Forderung nach der einfachsten Matrizen-Darstellung der σ wie der ψ dazu zwingt, den ψ -s die Transformationseigenschaften von Spinoren zuzuschreiben und die damit verbundenen Umständenlichkeiten in Kauf zu nehmen, die σ dagegen invariant zu lassen (d. h. sie in jedem Bezugssystem durch dieselben einfachsten Matrizen darzustellen), erweist sich auf Grund der Sauterschen Methode die natürliche Behandlung von σ als Vektor und entsprechend von ψ als Invariante auch als die zweckmäßigste; der Grund ist, daß im Körper der Quaternionen jede Komponente von σ ($= (\sigma e)$) ebenso wie jeder Nullteiler ($= (1 + (\sigma e))$) prinzipiell den gleichen einfachen Bau aufweist.

d) Realitätseigenschaften. Die Pauli-Gleichung lautet nach (1):

$$(9) \quad H\psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi.$$

Hierzu ist adjungiert die Gleichung

$$(9a) \quad \bar{\psi} \cdot H^* = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\psi}.$$

(Der Stern soll den Vorzeichenwechsel der imaginären Einheit andeuten; die Differentiationen sollen in H^* nach links wirken.) Hieraus folgt sofort, daß man aus einer Lösung ψ der Gleichung (9) eine Lösung von (9a) gewinnt, indem man i durch $-i$ ersetzt und außerdem die Reihenfolge sämtlicher Faktoren umkehrt (die letzte Vorschrift ist bedeutungslos, wenn man die Lösung in einer Gestalt angeschrieben hat, welche die nichtkommutativen Elemente, die Quaternionen, nur linear enthält).

Die angegebene Vorschrift liefert zu ψ diejenige Lösung $\bar{\psi}$ der adjungierten Gleichung, welche demselben Zustand zugehört wie ψ ; dies folgt daraus, daß bei dieser Vorschrift die Dichte definit wird, wie es sein muß (und daß dies im wesentlichen die einzige Vorschrift ist, welche zu einer definiten Dichte führt); wir können etwa ψ annehmen in der Gestalt

$$(10) \quad \psi = (\psi_0 + \psi_1 (e' \sigma))(1 + (e \sigma))$$

mit $e' \perp e$. Jede Funktion mit dem rechten Faktor $(1 + (e \sigma))$, allgemein von der Form $(\varphi_0 + \varphi_1 (e' \sigma) + \varphi_2 (e \sigma) + \varphi_3 ([e e'] \sigma))(1 + (e \sigma))$, kann auf diese Gestalt gebracht werden, weil

$$(e \sigma)(1 + (e \sigma)) = 1 \cdot (1 + (e \sigma))$$

und

$$([e e'] \sigma)(1 + (e \sigma)) = i(e' \sigma)(1 + (e \sigma)).$$

Die zu (10) adjungierte Funktion lautet

$$(11) \quad \bar{\psi} = (1 + (e \sigma))(\psi_0^* + \psi_1^* (e \sigma));$$

daraus folgt

$$\bar{\psi} \psi = (\psi_0 \psi_0^* + \psi_1 \psi_1^*)(1 + (e \sigma)^2),$$

was tatsächlich definit ist.

Die Hermitizität der zu selbstadjungierten Operatoren Π gehörigen quadratischen Größen $\bar{\psi}_m \Pi \psi_n$ (oder genauer der ihnen entsprechenden Gleichung (8) zugeordneten Quaternionen-freien Ausdrücke) ist eine triviale Folge unserer adjungiert-Definition sowie deren Verträglichkeit mit den σ -Rechenregeln (7). Denn die in (8) auftretende Größe N kann offenbar als selbstadjungiert angenommen werden (z. B. $= (1 + (e \sigma))^2$), worauf aus

$$\{\bar{\psi}_n \Pi \psi_m\}_{\text{adj}} = \bar{\psi}_m \Pi \psi_n$$

folgt

$$\{P_{nm}\}_{\text{adj}} = P_{mn}.$$

Da aber bei Quaternionen-freien Größen adjungiert und konjugiert komplex dasselbe bedeutet, können wir hierfür schreiben:

$$P_{nm}^* = P_{mn},$$

womit die behauptete Hermitizität bewiesen ist.

§ 2. Die Dirac-Gleichung und ihre Adjungierte. Physikalische Deutung.

Die Diracsche Gleichung des Elektrons lautet:

$$(12) \quad D\psi \equiv \left\{ \sum_{h=1}^4 \gamma_h \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_h} - \frac{e}{c} \Phi_h \right) - i \frac{E_0}{c} \right\} \psi = 0.$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ sind die vier Diracschen Operatoren, welche verknüpft sind durch die Beziehungen:

$$(13) \quad \gamma_i \gamma_h + \gamma_h \gamma_i = 2 \delta_{ih}.$$

Die adjungierte Gleichung $\bar{D}$ ist so zu definieren,¹ daß sich eine Kontinuitätsgleichung in der folgenden Weise ergibt:

$$(14) \quad 0 = \bar{\psi} (D\psi) - (\bar{\psi} \bar{D}) \psi \equiv \sum_{h=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_h} j_h.$$

Daraus folgt, daß die adjungierte Gleichung zu (12) lautet:

$$(15) \quad \bar{\psi} \bar{D} \equiv \bar{\psi} \left\{ \sum_{h=1}^4 \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_h} - \frac{e}{c} \Phi_h \right) - i \frac{E_0}{c} \right\} = 0.$$

Als Kontinuitätsgleichung ergibt sich

$$(16) \quad \sum_{h=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_h} \bar{\psi} \gamma_h \psi = 0$$

oder

$$(16a) \quad \sum_{h=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_h} j_h = 0,$$

wobei j_h der Viererstrom ist

$$(17) \quad j_h = \bar{\psi} \gamma_h \psi.$$

Es ist jedoch zu bemerken, daß sich j_h aus der Kontinuitätsgleichung (16) nur bis auf eine additive Div-freie Größe be-

¹ Siehe A. Sommerfeld, Wellenmechanischer Ergänzungsband S. 124 (1929).

stimmt. (Siehe das Beispiel der iterierten Dirac-Gleichung § 16a.) Die genaue Form des Stromausdrucks muß aus anderen Bedingungen erschlossen werden.

Neben dem Viererstrom kann man noch andere physikalische Größen P einführen, indem man die Kontinuitätsgleichung auf das Ergebnis einer geeigneten Störungsrechnung anwendet. Diese Größen sind gegeben durch die quadratischen Ausdrücke

$$(18) \quad \Pi_{nm} = \bar{\psi}_n \Pi \psi_m,$$

worin Π der Operator ist, welcher der Größe P entspricht.¹ Für Π kommen beliebige (selbstadjungierte, s. später) Operatoren in Frage, welche dem durch die Koeffizienten der Dirac-Gleichung erzeugten Zahlkörper angehören. $\bar{\psi}_n$ und ψ_m sind die Mitglieder eines „vollständigen“ Lösungssystems der Dirac-Gleichung. Der Begriff der Vollständigkeit für Dirac-Funktionen muß im nächsten Paragraphen näher erörtert werden.

Den Π_{nm} kann nur dann physikalische Bedeutung beigelegt werden, wenn sie alle in einem γ -freien Verhältnis stehen, d. h. wenn

$$(19) \quad \Pi_{nm} = P_{nm} N,$$

worin P_{nm} von den γ -s frei und N eine universelle konstante Größe ist, die dem Körper der Dirac-Operatoren angehört.

§ 3. Der Zahlkörper der Diracschen Operatoren.

Die für das Folgende wichtigsten algebraischen Eigenschaften des durch die Dirac-Operatoren erzeugten Zahlkörpers sollen jetzt an Hand von Beispielen besprochen werden. Die Beweise werden im Anhang für den allgemeineren Fall von n γ -s nachgetragen.

Die durch Addition, Subtraktion und Multiplikation aus $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ entstehenden Zahlen haben alle die Gestalt

¹ Wegen der Dichtedefinition $\rho = \bar{\psi} \gamma_4 \psi$ lautet die zum Operator Π gehörige Eigenwertgleichung $\gamma_4 \Pi \psi = \rho \cdot \psi$. Die Größe $\psi \Pi \psi$ stellt die P -Dichte dar, während P als individuelle Eigenschaft des Elektrons dem Operator $\gamma_4 \Pi$ entspricht.

$$\begin{aligned}
 (20) \quad A = & a_0 + a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 + a_3 \gamma_3 + a_4 \gamma_4 \\
 & + a_{12} \gamma_{12} + a_{23} \gamma_{23} + \dots + a_{34} \gamma_{34} \\
 & + a_{234} \gamma_{234} + a_{134} \gamma_{134} + a_{124} \gamma_{124} + a_{123} \gamma_{123} \\
 & + a_{1234} \gamma_{1234} \dots (\gamma_{12} = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \text{ usw.})
 \end{aligned}$$

Unter diesen Zahlen gibt es solche, welche ein Reziprokes besitzen, z. B. γ_4 ; Zahlen ohne Reziprokes sind Nullteiler. Die für uns wichtigste Eigenschaft der Nullteiler ist ihre Fähigkeit zu reduzieren. Gegenüber den Quaternionen liegen die Verhältnisse aber jetzt verwickelter, da nicht alle Nullteiler gleiches Reduktionsvermögen besitzen.

Wir betrachten etwa den Nullteiler $(1 + \gamma_4)$. Er ist von derselben Bauart wie unsere früheren Quaternionennullteiler und hat auch algebraisch dieselben Eigenschaften; sein Produkt mit der allgemeinen 16-komponentigen Zahl (20) enthält noch 8 unabhängige Parameter:

$$\begin{aligned}
 A \cdot (1 + \gamma_4) = & ((a_0 + a_4) + (a_1 + a_{14}) \gamma_1 + (a_2 + a_{24}) \gamma_2 \\
 & + (a_3 + a_{34}) \gamma_3 + (a_{12} + a_{124}) \gamma_{12} + (a_{23} + a_{234}) \gamma_{23} \\
 & + (a_{13} + a_{134}) \gamma_{13} + (a_{123} + a_{1234}) \gamma_{123}) (1 + \gamma_4)
 \end{aligned}$$

das beiderseitige Produkt

$$\begin{aligned}
 (1 + \gamma_4) \cdot A \cdot (1 + \gamma_4) = & ((a_0 + a_4) + (a_{12} + a_{124}) \gamma_{12} + (a_{23} + a_{234}) \gamma_{23} \\
 & + (a_{13} + a_{134}) \gamma_{13}) (1 + \gamma_4)^2
 \end{aligned}$$

nur vier. $(1 + \gamma_4)$ reduziert bei jeder Multiplikation die Anzahl der unabhängigen Parameter von A auf die Hälfte. Wir können dieses Verhalten der Zahl $(1 + \gamma_4)$ durch die Zahl $\frac{1}{2}$ kennzeichnen, welche wir als Reduktionsfaktor r bezeichnen wollen.

Das Produkt aus zwei vertauschbaren Zahlen mit $r = \frac{1}{2}$ ist ein besonders starker Nullteiler. Wir betrachten etwa $(1 + \gamma_4)(1 + i\gamma_{12})$.

$$\begin{aligned}
 A(1 + \gamma_4)(1 + i\gamma_{12}) = & ((a_0 + a_4 - ia_{12} - ia_{124}) + (a_1 + a_{14} - ia_2 - ia_{24}) \\
 & \cdot \gamma_1 + (a_3 + a_{34} - ia_{123} - ia_{1234}) \gamma_3 \\
 & + (a_{13} + a_{134} - ia_{23} - ia_{234}) \gamma_{13}) (1 + \gamma_4) \\
 & \cdot (1 + i\gamma_{12})
 \end{aligned}$$

enthält $4 = \frac{16}{4}$ unabhängige Parameter,

$$(1 + \gamma_4)(1 + i\gamma_{12})A(1 + \gamma_4)(1 + i\gamma_{12}) = (a_0 + a_4 - ia_{12} - ia_{124}) \cdot (1 + \gamma_4)^2(1 + i\gamma_{12})^2$$

nur mehr $1 = \frac{16}{4 \cdot 4}$. Der Reduktionsfaktor unserer Zahl ist also

$r = \frac{1}{4}$. Eine stärkere Reduktion gibt es im Körper der Dirac-Operatoren nicht (von der Null mit $r = 0$ abgesehen).

Daß es noch besonders schwache Nullteiler mit $r = \frac{3}{4}$ gibt, sei nur nebenbei erwähnt (z. B. $(1 + \gamma_4) + (1 + i\gamma_{12})$).

Der Körper der Dirac-Operatoren besitzt verschiedenerlei Teilkörper. Wir besprechen kurz diejenigen, welche für uns von praktischer Bedeutung sind.

Durch die hyperkomplexen Größen γ_{21} , γ_{32} , γ_{13} wird ein Quaternionenkörper erzeugt, der durch die Substitution $\sigma_k = -i\gamma_k \cdot \gamma_{123}$ in den früher (§ 1 b) besprochenen Körper über geht.

Auf den 8 Grundgrößen 1 , γ_{12} , γ_{23} , γ_{31} , γ_{14} , γ_{24} , γ_{34} , γ_{1234} baut sich ein Biquaternionenkörper auf. Er läßt sich in zwei Quaternionenkörper zerfällen¹; der eine von diesen beiden Körpern enthält alle Zahlen mit dem Faktor $(1 + \gamma_{1234})$, der zweite alle Zahlen mit dem Faktor $(1 - \gamma_{1234})$. Jede Zahl der ersten Art ergibt mit jeder Zahl der zweiten Art das Produkt Null. Jeder der beiden Quaternionenkörper läßt sich aufbauen aus einer Einheit $e^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_{1234})$ und drei Quaternionen $\gamma_{21} \cdot e^\pm$, $\gamma_{32} \cdot e^\pm$, $\gamma_{13} \cdot e^\pm$.

Die drei Größen γ_1 , γ_2 , γ_3 erzeugen ebenfalls einen Biquaternionenkörper. Er zerfällt in zwei Quaternionenkörper mit den Einheiten $\frac{1}{2}(1 + i\gamma_{123})$ und $\frac{1}{2}(1 - i\gamma_{123})$.

¹ Wir verwenden hier das Wort „zerfällen“ an Stelle des üblichen „reduzieren“, weil wir das Wort „reduzieren“ bereits in anderem Sinne verwendet haben.

Der einfachste Unterkörper des Dirac-Körpers wird durch ein einziges γ , etwa γ_4 , erzeugt. Er läßt sich zerfallen in zwei Körper vom Typus der gewöhnlichen komplexen Zahlen, nämlich die γ -freien Vielfachen von $(1 + \gamma_4)$ und $(1 - \gamma_4)$.

§ 4. Reduktion des Lösungssystems. Unabhängigkeit der physikalischen Ergebnisse von der speziellen Reduktion.

Die Lösungen der Dirac-Gleichung sind hyperkomplexe Zahlen aus dem Diracschen Zahlbereich. Als vollständiges System wäre daher ein System von Funktionen zu bezeichnen, nach welchem sich jede beliebige Funktion aus diesem Zahlbereich entwickeln läßt. Ein solches System würde aber die physikalische Bedingung (19) nicht erfüllen, da die Π_{nm} eine 16-parametrische Mannigfaltigkeit wären. Nun ist es aber leicht, mit Hilfe des in § 3 besprochenen Reduktionsvermögens der Nullteiler die 16-parametrische Mannigfaltigkeit der Π_{nm} zu einer einparametrischen zu reduzieren.

Seien die ψ'_m ein im Diracschen Zahlkörper vollständiges Lösungssystem der Dirac-Gleichung, ψ'_n ein vollständiges System der adjungierten Gleichung. Wir multiplizieren alle ψ'_m von rechts mit einem Nullteiler Γ_1 vom Reduktionsfaktor $r = \frac{1}{4}$, alle ψ'_n von links mit Γ_2 von $r = \frac{1}{4}$. Das entstehende System $\psi_m = \psi'_m \cdot \Gamma_1$ und $\psi_n = \Gamma_2 \cdot \psi'_n$ ist ein System von Lösungen der Dirac-Gleichung bzw. ihrer adjungierten, welches der Forderung (19) genügt. Nach den Lösungen ψ_m lassen sich nicht alle Funktionen des Diracschen Zahlkörpers entwickeln, sondern nur die Funktionen mit dem rechten Faktor Γ_1 .

Wir gelangen so neben dem Begriff eines im Diracschen Zahlkörper vollständigen Lösungssystems zu einem Begriff der physikalischen Vollständigkeit, die wir im folgenden als Vollständigkeit schlechthin bezeichnen wollen: Ein Funktionensystem ist vollständig, wenn sich alle Funktionen mit dem rechten Faktor Γ_1 danach entwickeln lassen.

Die physikalischen Ergebnisse sind von der speziellen Wahl der Nullteiler Γ_1 und Γ_2 unabhängig, sofern diese nur vom Re-

duktionsfaktor $r = \frac{1}{4}$ sind. Um dies zu zeigen, beweisen wir

den Satz: Ein nach (19) brauchbares Funktionensystem erfährt keine wesentliche Änderung, wenn man alle ψ_m von rechts und alle $\bar{\psi}_n$ von links mit je einem gemeinsamen konstanten Faktor C_1 bzw. C_2 multipliziert. Beweis: die Verhältnisse der P_{nm} zueinander werden durch eine solche Multiplikation nicht geändert; es wird lediglich aus N ein $N' = C_2 N C_1$ (Auszuschließen ist nur der Fall, daß $C_2 N C_1 = 0$). Wir denken uns nun durch Γ_1, Γ_2 ein vollständiges Funktionensystem erzeugt. Der vorige Satz sagt aus, daß eine weitere Reduktion mit zwei beliebigen Faktoren Γ'_1, Γ'_2 die physikalischen Ergebnisse nicht ändert. Dasselbe gilt, wenn man ein durch Reduktion mit Γ'_1, Γ'_2 gewonnenes System mit Γ_1, Γ_2 weiter reduziert. Man sieht hieraus, daß jede physikalische Beziehung, welche aus Eigenfunktionen des einen Systems folgt, auch aus Eigenfunktionen des anderen Systems gefolgert werden kann. So ergibt sich eine ein-eindeutige Zuordnung der beiden mit Hilfe von Γ_1, Γ_2 und Γ'_1, Γ'_2 gewonnenen vollständigen Systeme ohne Veränderung der physikalischen Resultate; das bedeutet Unabhängigkeit von der speziellen Wahl der Faktoren Γ_1 und Γ_2 .

Darüber hinaus folgt aus dem angeführten Satz, daß jedes Funktionensystem, welches (19) erfüllt, einem Teilsystem unseres durch Reduktion gewonnenen vollständigen System eindeutig zugeordnet werden kann (indem man es nämlich mit Γ_1, Γ_2 reduziert). Unser Reduktionsverfahren liefert also die im wesentlichen einzige Lösung der folgenden Aufgabe: ein System von möglichst vielen Funktionen aus dem Diracschen Zahlkörper zu finden, welches der Bedingung (19) genügt.

Die Bedingung, daß $C_2 N C_1 \neq 0$ sein muß, macht keine Schwierigkeiten. Wollen wir etwa ein System mit der Norm N durch Faktoren Γ_1, Γ_2 weiter reduzieren, dann wählen wir $C_1 = c_1 \Gamma_1$ $C_2 = \Gamma_2 c_2$. c_1 und c_2 lassen sich immer so wählen, daß $C_2 N C_1$ von Null verschieden wird.

§ 5. Bildung des Adjungierten. Realitätseigenschaften.

Wir schreiben die Dirac-Gleichung (12) und ihre Adjungierte (15) mit Unterscheidung reeller und imaginärer Größen:

$$(21) \quad \left\{ -ic \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \mathfrak{A}, \gamma \right) + \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - V \right) \gamma_4 - E_0 \right\} \psi = 0.$$

$$(22) \quad \bar{\psi} \left\{ -ic \left(-\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \mathfrak{A}, \gamma \right) + \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - V \right) \gamma_4 - E_0 \right\} = 0.$$

Hierbei ist $x_4 = ict$, $\Phi_4 = \frac{ic}{e} V$ und $\Phi_k = \mathfrak{A}_k$ für $k = 1, 2, 3$ eingeführt.

∇ ist der „Vektor“ $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, γ der Vektor $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

Die Gestalt der Gleichungen (21) und (22) zeigt, daß man aus einer Lösung ψ der Dirac-Gleichung (21) eine Lösung $\bar{\psi}$ der adjungierten Gleichung (22) gewinnt, indem man die Reihenfolge aller Faktoren vertauscht und den Größen i , γ_1 , γ_2 , γ_3 das entgegengesetzte Vorzeichen gibt. Es ist zu zeigen, daß eine so erzeugte Funktion $\bar{\psi}$ auch wirklich die zu ψ adjungierte Funktion ist, d. h. daß ψ und $\bar{\psi}$ dem gleichen Zustande zugeordnet werden müssen; der Beweis folgt daraus, daß die angegebene Definition für die adjungierte Funktion im wesentlichen die einzige ist, welche zu einer definiten Dichte $\bar{\psi} \gamma_4 \psi$ führt. Seien etwa ψ und $\bar{\psi}$ je eine Lösung der Dirac-Gleichung und ihrer Adjungierten; wie § 4 zeigt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß ψ einen rechten Faktor $(1 + i\gamma_{12}) \cdot (1 + \gamma_4)$ und $\bar{\psi}$ einen linken Faktor $(1 + i\gamma_{12}) (1 + \gamma_4)$ abspaltet; wir haben die beiden an sich willkürlichen Faktoren Γ_1 und Γ_2 so gewählt, daß sie zueinander adjungiert sind. ψ und $\bar{\psi}$ haben dann die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \psi &= (\psi_0 + \psi_1 \gamma_1 + \psi_3 \gamma_3 + \psi_{13} \gamma_{13}) (1 + i\gamma_{12}) (1 + \gamma_4), \\ \bar{\psi} &= (1 + i\gamma_{12}) (1 + \gamma_4) (\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_1 \gamma_1 - \bar{\psi}_3 \gamma_3 - \bar{\psi}_{13} \gamma_{13}). \end{aligned}$$

Wir haben in ψ überall in den Grundgrößen γ_1 , γ_3 , γ_{13} den Vorzeichenwechsel von γ_1 , γ_2 , γ_3 und die Vertauschung der Faktoren vorgenommen; die komplexen Größen $\bar{\psi}_0$, $\bar{\psi}_1$, $\bar{\psi}_3$, $\bar{\psi}_{13}$ sind zunächst noch nicht in Beziehung gesetzt mit ψ_0 , ψ_1 , ψ_3 , ψ_{13} . Die Dichte wird:

$$\bar{\psi} \gamma_4 \psi = (\bar{\psi}_0 \psi_0 + \bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_3 \psi_3 + \bar{\psi}_{13} \psi_{13}) (1 + i \gamma_{12})^2 (1 + \gamma_4)^2.$$

Hieraus folgt, daß die Dichte tatsächlich definit wird, wenn wir entsprechend der obigen adjungiert-Definition $\bar{\psi}_0 = \psi_0^*$, $\psi_1 = \bar{\psi}_1^*$, $\bar{\psi}_3 = \psi_3^*$, $\bar{\psi}_{13} = \psi_{13}^*$ setzen; ferner sieht man, daß diese Definition im wesentlichen die einzige ist, welche zu einer definiten Dichte führt. Die nach dieser Vorschrift gewonnene Lösung ψ ist also nicht nur überhaupt eine Lösung der adjungierten Gleichung, sondern sie ist schlechthin die zu ψ adjungierte Funktion. Wir können etwas allgemeiner sagen:¹

Das Adjungierte zu einer Größe gewinnt man, indem man die Reihenfolge sämtlicher Faktoren vertauscht und den Größen i , γ_1 , γ_2 , γ_3 das entgegengesetzte Vorzeichen gibt. Für Operatoren ist noch hinzuzufügen: Differentiationen haben ihre Richtung

zu ändern, d. h. aus $\overrightarrow{\nabla}$ wird $\overleftarrow{\nabla}$, aus $\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}$ wird $\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial t}}$ und umgekehrt.

Der Beweis für die Hermitizität der zu selbstadjungierten Operatoren gehörigen quadratischen Ausdrücke ist beinahe wörtlich aus dem betreffenden Beweis für die Pauli-Gleichung zu übernehmen (§ 1 d).

§ 6. Transformationseigenschaften.

Wir müssen bemerken, daß die Frage nach den Transformationseigenschaften der ψ -s zunächst eine völlig inhaltsleere Redensart ist. Sinn hat an sich nur die Forderung, daß sich die physikalischen Größen, nämlich die Verhältnisse der P_{nm} (Formel (19)), als Tensoren entsprechend ihrer physikalischen Deutung transformieren. Alle weiteren Aussagen über die ψ -s sind reine Konvention, da diese nur mathematische Hilfsgrößen darstellen.

Die Frage nach den Transformationseigenschaften einer Lösung ψ ist um so gegenstandsloser, als es nicht einmal möglich ist, diese Lösung einem bestimmten Koordinatensystem in sinnvoller Weise zuzuordnen. Laute etwa die Dirac-Gleichung in einem Koordinatensystem (1)

¹ Siehe F. Sauter, Atomarer Photoeffekt . . . , Ann. d. Phys. 9, 235 (1931).

$$(23) \quad \left\{ \sum_{h=1}^4 \left(\gamma_h^{(1)}, p_h^{(1)} - \frac{e}{c} \Phi_h \right) - i \frac{E_0}{c} \right\} \psi = 0.$$

Wir führen in (23) neue rechtwinkelige Koordinaten ein

$$(24) \quad x_i^{(2)} = \sum_h a_{ih} x_h^{(1)} \text{ mit } \sum_i a_{ik} a_{il} = \delta_{kl}; \text{ die Umkehrung lautet:}$$

$$(24a) \quad x_i^{(1)} = \sum_h a_{hi} x_h^{(2)}.$$

Wenn wir noch als Abkürzung benutzen $\gamma_i^{(2)} = \sum a_{ik} \gamma_h^{(1)}$ mit der Umkehrung $\gamma_i^{(1)} = \sum_h a_{hi} \gamma_h^{(2)}$, dann wird aus (23):

$$(23a) \quad \left\{ \sum_{h=1}^4 \left(\gamma_h^{(2)}, p_h^{(2)} - \frac{e}{c} \Phi_h \right) - i \frac{E_0}{c} \right\} \psi = 0.$$

Wie man sich leicht überzeugt (s. Anhang f), genügen aber die $\gamma_h^{(2)}$ den Relationen der vier Diracschen Operatoren, und (23a) ist die Dirac-Gleichung im System (2). Die Funktion ψ genügt also der Dirac-Gleichung im System (2) genau so wie der Dirac-Gleichung im System (1). Die $\gamma_h^{(1)}$ sind als Grundgrößen nicht besser und nicht schlechter als die $\gamma_h^{(2)}$, vielmehr sind die Beziehungen zwischen ihnen völlig symmetrisch. Es wäre daher vollkommen unmotiviert zu sagen: ψ ist die Lösung der Dirac-Gleichung im Koordinatensystem (1). Wenn vielmehr dem ψ überhaupt eine Bedeutung zukommt, so ist diese unabhängig vom Koordinatensystem.

Ebenso ist es sinnlos zu sagen, (23) wäre die Dirac-Gleichung im System (1), nicht die im System (2); (23) und (23a) sind ja identisch. Jede Dirac-Gleichung „in irgendeinem System“ unterscheidet sich von (23) höchstens infolge einer Änderung der Buchstaben, d. h. überhaupt nicht.

Hierin unterscheidet sich die Sautersche Methode ganz wesentlich von der Behandlung in Matrizen. Wenn man die γ -s und die ψ -s durch Matrizen bzw. Matrixspalten darstellt, dann hat es sehr wohl Sinn, von einer Lösung $\psi^{(1)}$ im System (1) zu sprechen im Gegensatz zu einer Lösung $\psi^{(2)}$ im System (2). Derartige Unterscheidungen sind aber immer Aussagen über Darstellung der γ -s durch Matrizen. Wenn wir z. B. (23)

unter Zugrundelegung des Koordinatensystems (1) lösen wollen, so werden wir zunächst $\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \gamma_3^{(1)}, \gamma_4^{(1)}$ durch vier möglichst einfache Matrizen darstellen, $\psi^{(1)}$ werden wir (ebenfalls aus Gründen der Einfachheit) als Matrixspalte ansetzen. Wollten wir nun nach der Einführung dieser Matrizen die Koordinaten $x_k^{(1)}$ durch $x_k^{(2)}$ ausdrücken, dann erhielten wir (23a), jedoch wären die Koeffizienten von $\beta_k^{(2)}$, die $\gamma_k^{(2)}$, nicht mehr Matrizen von einfachster Bauart. Wenn wir dies zu korrigieren versuchen, indem wir nachträglich die Matrizen einer geeigneten Automorphie unterwerfen, dann verliert $\psi^{(1)}$ seine einfache Gestalt als Matrixspalte. Mit der ursprünglichen Matrizendarstellung der γ -s und des ψ in (23) haben wir uns also tatsächlich auf das Koordinatensystem (1) festgelegt, weil in diesem System die vier Dirac-Gleichungen ihre einfachste Gestalt annehmen. In bezug auf den Diracschen Zahlkörper sind aber alle Formen der Dirac-Gleichung, wie (23) und (23a), gleich einfach.

Die Notwendigkeit, die Lösung zu reduzieren, bereitet keine Schwierigkeiten, da die Vorschrift: „alle ψ -s müssen einen gemeinsamen rechten Faktor vom Reduktionsfaktor $\frac{1}{4}$ abspalten“, gegen Lorentz-Transformationen der γ -s invariant ist.

Es gibt im wesentlichen nur eine Dirac-Gleichung und es gibt bis auf unwesentliche konstante Faktoren nur eine Lösung ψ , welche einen bestimmten Zustand kennzeichnet; das letzte folgt aus der in § 4 bewiesenen Unabhängigkeit der Ergebnisse von der speziellen Reduktion. Die Gleichung wie deren Lösungen haben eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung; eine Lösung ist imstande, den Zustand, dem sie angehört, in jedem Koordinatensystem zu kennzeichnen. — Der Angelpunkt für die physikalische Deutung ist die Kontinuitätsgleichung und die Stromdefinition, welche durch die Dirac-Gleichung in eindeutiger Weise erzwungen wird. Man wird durch (23) gezwungen, dem Strom in der $x_k^{(1)}$ -Richtung die Größe $j_k^{(1)} = \bar{\psi} \gamma_k^{(1)} \psi$, dem Strom in der $x_k^{(2)}$ -Richtung die Größe $j_k^{(2)} = \bar{\psi} \gamma_k^{(2)} \psi \equiv \sum_k a_{ik} \bar{\psi} \gamma_k^{(1)} \psi$ zuzuordnen. D. h. die Dirac-Gleichung zwingt uns, dem Viererstrom die Transformationseigenschaften eines Vierervektors zuzuschreiben, wie es auch physikalisch notwendig ist. In gleicher Weise zwingt uns die Dirac-Gleichung auch bei beliebigen anderen Größen neben ihrer physikalischen Deutung die dieser Deutung zukommenden Transformationseigenschaften auf. Diese Transformationseigenschaften

werden richtig wiedergegeben, wenn wir ψ wie eine Invariante und $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ wie einen Vierervektor behandeln.

Es mag auffallen, daß wir einen Abschnitt über die Transformationseigenschaften der Dirac-Gleichung beschließen, ohne von Spinoren gesprochen zu haben. Dies kommt jedoch daher, daß eine Einführung von Spinoren völlig unmotiviert ist, sofern man nicht von Matrizen spricht. Wenn man mit Matrizen arbeitet, so hat man die Wahl zwischen zwei Unbequemlichkeiten: entweder für die γ -s beliebig komplizierte Matrizendarstellungen zuzulassen, oder den γ -s die Transformationseigenschaften von Spinoren zuzuschreiben. In der Regel zieht man das letzte als das kleinere Übel vor. Da bei Anwendung der Sauterschen Methode die Frage nach einer Matrizendarstellung gar nicht besteht, hat man keine Veranlassung, Spinoren einzuführen. Überdies scheint mir, daß auch unter Zugrundelegung von Matrizen die Transformationseigenschaften der Ströme am besten untersucht werden, ohne von der Spinortransformation der ψ -s Gebrauch zu machen, da hierfür die Spinoren nur unnötiges Beiwerk sind, welches den einfachen Sachverhalt verschleiert.

§ 7. Normierungsbedingung. Vollständigkeitsrelation.

Die Ladungsdichte im Zustande n muß der Größe $\bar{\psi}_n \gamma_4 \psi_n$ zugeordnet werden. Für die wirkliche reelle Ladungsdichte ρ_n gilt entsprechend (19):

$$(25) \quad \bar{\psi}_n \gamma_4 \psi_n = \rho_n \cdot N,$$

wobei N die allen Eigenfunktionen gemeinsame „Norm“ ist. Damit alle Zustände n richtig normiert sind, muß $\int \rho_n d\tau = 1$ sein, d. h.

$$(26) \quad \int \bar{\psi}_n \gamma_4 \psi_n d\tau = N.$$

Diese Norm ist invariant gegen Lorentz-Transformation; denn die Div-Freiheit des Viererstromes $\bar{\psi}_n \gamma_k \psi_n$ und die Randbedingung im räumlich Unendlichen garantieren die Invarianz von $\int \bar{\psi}_n \gamma_4 \psi_n d\tau$. Zusammen mit der Orthogonalitätsbedingung

$$(27) \quad \int \bar{\psi}_n \gamma_4 \psi_m d\tau = 0 \text{ für } n \neq m$$

gibt (26) die Möglichkeit zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten beliebiger Funktionen nach den ψ_n . Die Vollständigkeitsrelation lautet:

$$(28) \quad \sum_n \int \bar{\psi}_n d\tau \cdot \int \psi_n g d\tau = N \cdot \int f \gamma_4 g d\tau$$

mit willkürlichen¹ Funktionen f und g . (28) gilt ebenso für kontinuierliche wie für diskrete Eigenfunktionen, sofern man nur im ersten Falle unter $\sum_n$ eine Integration über die kontinuierlichen Parameter versteht.

Teil II. Fragen der praktischen Rechnung.

§ 8. Rechenregeln.

Die direkte Benutzung der Relationen (13) ist angebracht bei Aufgaben, welche unter Wahrung der vierdimensionalen Symmetrie in Tensorform behandelt werden. Bei der praktischen Rechnung wird in der Regel die vierte Koordinate ausgezeichnet, insbesondere durch die Einführung stationärer Zustände. Die physikalisch vorgegebenen Größen haben dabei die Gestalt von Skalaren und Dreiervektoren. Dementsprechend ist es praktisch, auch beim Rechnen mit den γ_α die vierte Komponente γ_4 auszuzeichnen und die drei ersten Komponenten $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ zu einem Dreiervektor γ zusammenzufassen. Wenn man noch für γ_{123} die Abkürzung τ einführt, so erhält man als Grundgrößen des Diracschen Zahlkörpers

$$(29) \quad \begin{array}{l} \text{Vier Skalare } 1, \tau, \gamma_4, \tau\gamma_4. \\ \text{Vier Dreiervektoren } \gamma, \gamma\tau, \gamma\gamma_4, \gamma\tau\gamma_4, \end{array}$$

worin also

$$(30) \quad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3); \quad \tau = \gamma_{123}.$$

Um mit diesen Größen bequem arbeiten zu können, müssen die Rechenregeln in eine vektorielle Form gebracht werden; man erreicht dies in rationellster Weise, indem man den Diracschen Zahlkörper erzeugt denkt durch die beiden „Skalare“ τ und γ_4 und durch den Vektor γ , verknüpft durch die Beziehungen: ($\mathfrak{b}, \mathfrak{w}$ beliebige komplexe Vektoren)

$$(31) \quad \begin{array}{l} (\mathfrak{b}\gamma)(\mathfrak{w}\gamma) = (\mathfrak{b}\mathfrak{w}) + ([\mathfrak{b}\mathfrak{w}]\gamma)\tau \\ \tau^2 = -1; \quad \gamma_4^2 = 1. \\ \gamma\tau = \tau\gamma; \quad \gamma\gamma_4 + \gamma_4\gamma = 0; \quad \tau\gamma_4 + \gamma_4\tau = 0. \end{array}$$

¹ Im Sinne der Vollständigkeitsdefinition von § 4.

(Multipliziert man die erste Gleichung (31) linkerhand mit $1 = (-i\tau)^2$ und setzt $\sigma = -i\gamma\tau$, so ergibt sich die bekannte vektorielle Relation für die Diracschen Spinmatrizen.)

Die Beziehungen der gewöhnlichen Vektorrechnung lassen sich auf hyperkomplexe Vektoren ohne weiteres anwenden, sofern man nur sorgfältig die unerlaubte Vertauschung von Faktoren vermeidet; wir führen etwa die folgenden Regeln an:

$$(32a) \quad ([ab]c) = (a[b c])$$

$$(32b) \quad ([ab][cd]) = \overbrace{a b c d} - \overbrace{a b c d}$$

$$(32c) \quad [[ab]c] = \overbrace{a \cdot b \cdot c} - a \cdot (bc).$$

Die Nichtvertauschbarkeit macht eine Kennzeichnung der skalaren Multiplikation durch Klammern über oder unter der Zeile erforderlich; im übrigen bietet aber die Anwendung der Relationen keine Schwierigkeiten.

Nützlich sind die folgenden Regeln, welche sich aus (31) ableiten lassen:

$$(33) \quad \begin{cases} \gamma(b\gamma) = b + [b\gamma]\tau \\ (b\gamma) \cdot \gamma = b - [b\gamma]\tau \\ (\gamma\gamma) = 3; \quad [\gamma\gamma] = 2\gamma\tau; \quad (\gamma[\gamma\gamma]) = 6\tau; \\ (\gamma[\gamma b]) = 2(b\gamma)\tau. \end{cases}$$

Es ist bequem, bei Bedarf auch noch Formeln mit mehr Faktoren aufzustellen; wir führen die folgende besonders einfache und wichtige an:

$$(34) \quad \overbrace{[\gamma e] \cdot \gamma \cdot [\gamma e]} = -2e(\gamma e)$$

Vereinfachungen ergeben sich bei der Berechnung selbstadjungierter Ausdrücke. Wir führen an:

$$(35) \quad \begin{cases} \gamma(b\gamma) + \text{adj} = 2b \\ \gamma(b\gamma)i\tau + \text{adj} = -2[b, i\gamma] \\ i\gamma\gamma_4 + \text{adj} = 0. \end{cases}$$

§ 9. Wechsel des Koordinatensystems. Normierungsfragen.

Wenn man zwei Zustände in Beziehung setzen will, welche man durch verschieden normierte Eigenfunktionen wiedergegeben hat, dann entsteht die Aufgabe, diese auf gemeinsame Norm zu bringen, d. h. wenigstens eine von ihnen umzunormieren. Wie man hierbei vorzugehen hat, ist aus § 4 und § 7 zu entnehmen: sei ψ' eine noch nicht in gewünschter Weise normierte Funktion und ψ' ihre adjungierte. Will man sie normieren auf $N = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2$, worin sowohl N wie Γ_1 und Γ_2 den Reduktionsfaktor $r = \frac{1}{4}$ besitzen, dann bilde man $\psi = \psi' \cdot c_2 \Gamma_2$, $\bar{\psi} = \Gamma_1 c_1 \cdot \bar{\psi}'$, worin c_1 und c_2 Konstante sind, die ein Verschwinden des Produkts verhindern. Indem man in c_1 einen geeigneten komplexen Normierungsfaktor einbezieht, erreicht man dann die gewünschte Normierung. Es sei etwa $N' = \int \psi' \gamma_4 \bar{\psi}' d\tau$, dann lautet die Bedingung der richtigen Umnormierung:

$$\Gamma_1 c_1 N' c_2 \Gamma_2 = N.$$

Man braucht sich also beim Umnormieren nicht mit den Funktionen selbst, sondern nur mit der Norm N' bzw. N zu befassen.

Ein wichtiger Spezialfall ergibt sich beim Wechsel des Koordinatensystems. Sei etwa eine Funktion $\psi^{(1)}$ gegeben, welche normiert ist auf $N^{(1)} = F(\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \gamma_3^{(1)}, \gamma_4^{(1)})$, wobei F ein gewisses (einfaches) Polynom in den $\gamma_a^{(1)}$ (den Komponenten des Vierervektors γ_a bezüglich der Achsen eines Koordinatensystems⁽¹⁾) ist. Diese Funktion ist durch Hinzufügen eines rechten Faktors so umzunormieren, daß die Norm wird $N^{(2)} = F(\gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)}, \gamma_3^{(2)}, \gamma_4^{(2)})$; $N^{(2)}$ möge also aus $N^{(1)}$ dadurch hervorgehen, daß überall der Index 1 durch 2 ersetzt wird. Man hat zu bilden

$$(36) \quad \psi^{(2)} = \psi^{(1)} \cdot S; \quad \bar{\psi}^{(2)} = S' \cdot \bar{\psi}^{(1)};$$

Die Faktoren S und S' sind so zu wählen, daß $\psi^{(2)}$ auf $N^{(2)}$ normiert ist. D. h.

$$(37) \quad S' \cdot N^{(1)} \cdot S = N^{(2)}.$$

Geeignete S und S' lassen sich auf zwei verschiedene Weisen aufstellen. Zunächst wollen wir die zu Anfang dieses Paragraphen gegebene allgemeine Vorschrift an dem Beispiel

$$(38) \quad N = (1 + i\gamma_{12})(1 + \gamma_4)$$

durchführen. Wir normieren um, indem wir $\psi^{(1)}$ von rechts und $\psi^{(1)}$ von links mit $N^{(2)}$ multiplizieren und dann mit einem geeigneten reellen Faktor $\sqrt{N}$ dividieren. Wir setzen also

$$(39) \quad S = S' = \frac{(1 + i\gamma_{12}^{(2)})(1 + \gamma_4^{(2)})}{\sqrt{N}}.$$

Aus (37) wird dann:

$$(37a) \quad \frac{1}{N} (1 + i\gamma_{12}^{(2)})(1 + \gamma_4^{(2)})(1 + i\gamma_{12}^{(1)})(1 + i\gamma_4^{(1)})(1 + i\gamma_{12}^{(2)}) \cdot (1 + i\gamma_4^{(2)}) = (1 + i\gamma_{12}^{(2)})(1 + \gamma_4^{(2)}).$$

Zwischen den $\gamma_i^{(1)}$ und den $\gamma_i^{(2)}$ besteht die orthogonale Transformation $\gamma_i^{(1)} = \sum_h a_{hi} \gamma_h^{(2)}$. Daher ist

$$(38a) \quad N^{(1)} = 1 + \sum_h a_{h4} \gamma_h^{(2)} + i \sum_{hl} a_{h1} a_{l2} \gamma_{lh}^{(2)} + i \sum_{hlm} a_{h1} a_{l2} a_{m4} \gamma_{hlm}^{(2)}.$$

In den zwei- und dreifachen Produkten stehen nur Glieder, welche lauter verschiedene $\gamma_h^{(2)}$ enthalten. (Orthogonalitätsbeziehungen, Tensorcharakter der γ_α -Produkte.) Zu $N^{(2)}$ nach (37a) liefern nur diejenigen Glieder von $N^{(1)}$ einen Beitrag, welche mit 1, $\gamma_4^{(2)}$, $i\gamma_{12}^{(2)}$, $i\gamma_{124}^{(2)}$ behaftet sind; alle diese Größen können durch 1 ersetzt werden. Für N ergibt sich hieraus der Wert:

$$(40) \quad N = 1 + a_{44} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Für den Fall einer rein räumlichen Drehung ($a_{44} = 1$) wird

$$(40a) \quad N = 2 \left(1 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right).$$

Noch einfacher wird die Umnormierung, wenn man als Norm benützt

$$(41) \quad N = (1 + i\gamma_{12})(1 + \gamma_{1234}),$$

weil γ_{1234} gegen orthogonale Transformationen invariant ist. (Freilich hat diese Norm den Nachteil, daß sie nicht selbst-

adjungiert ist; dies ist jedoch keine ernstliche Schwierigkeit. Wenn man ψ so bestimmt, daß es einen rechten Faktor $(1 + i\gamma_{12}) \cdot (1 + \gamma_{1234})$ abspaltet, dann spaltet $\bar{\psi}$ zunächst einen linken Faktor $(1 + i\gamma_{12})(1 - \gamma_{1234})$ ab. Multipliziert man alle $\bar{\psi}$ von links mit γ_3 , dann erhält man N als Norm.) Nur der Faktor $(1 + i\gamma_{12})$ muß umnormiert werden; wir setzen

$$(42) \quad S = S' = \frac{1 + i\gamma_{12}^{(2)}}{\sqrt{N}}$$

und erhalten nach (37)

$$\frac{1}{N} \cdot (1 + i\gamma_{12}^{(2)}) (1 + i\gamma_{12}^{(1)}) (1 + i\gamma_{12}^{(2)}) = (1 + i\gamma_{12}^{(2)}),$$

woraus folgt:

$$(43) \quad N = 1 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Die außerordentliche Einfachheit der Umnormierung hängt wesentlich damit zusammen, daß wir die Nullteilereigenschaften von N benützt haben. Ohne diese zu benützen, kann man (37) erfüllen, indem man S' und S so wählt, daß $S' S = 1$, $S' \gamma_i^{(1)} S = \gamma_i^{(2)}$ für $i = 1, 2, 3, 4$. Man kann also die Aufgabe der Umnormierung durch eine Spinortransformation erledigen. Es ist aber klar, daß die Spinortransformation im allgemeinen viel umständlicher wird als die frühere Umformung (41), (42), (43). Eine einzige Größe mit besonders einfachen Eigenschaften wie unsere Norm N läßt sich natürlich mit viel weniger Aufwand transformieren als die Gesamtheit aller Zahlen des Diracschen Körpers. Allerdings möchte man meinen, daß die Spinortransformation besonders gute Dienste tut, wenn man in ψ alle $\gamma_i^{(1)}$ durch die $\gamma_h^{(2)}$ ersetzen will. Dieser Vorteil ist aber nur scheinbar. Es ist nämlich unpraktisch, die $\gamma_i^{(1)}$ mit Hilfe der Spinortransformation und die $x_i^{(1)}$ durch direkte Einführung der Lorentztransformation auf die $\gamma_i^{(2)}$ und $x_i^{(2)}$ zurückzuführen. Die γ_1 und x_1 treten nämlich in ψ in organischer Verbindung auf, so daß es angemessen ist, beide gleichzeitig direkt der Lorentztransformation zu unterwerfen.

Am offenkundigsten wird dies im Falle des freien Elektrons oder der s -Zustände des Elektrons im Zentralfeld (s. § 14, Ende). Trotzdem kann in vielen praktischen Fällen die Verwendung der Spinortransformation zur Umnormierung angebracht sein; den praktisch wichtigen einfachen Fällen, wie einfachen räumlichen Drehungen, entsprechen auch sehr einfache Transformations-Operatoren S , außerdem kann man die Spinortransformation mit Vorteil benutzen, um, wenn auch nicht in der ganzen Eigenfunktion, so doch wenigstens in dem zum Zwecke der Reduktion eingeführten Nullteiler Γ die $\gamma_i^{(1)}$ durch die $\gamma_i^{(2)}$ zu ersetzen; es ist ja $\Gamma^{(1)} \cdot S = S \cdot \Gamma^{(2)}$.

Es muß betont werden, daß die zur Umnormierung eingeführte Spinortransformation sich wesentlich von der üblichen Spinortransformation der Eigenfunktionen unterscheidet; üblicherweise wird nämlich ψ von links, d. h. von der inneren, offenen, empfindlichen Seite mit dem Transformations-Operator multipliziert. Dadurch werden die Eigenschaften der Funktion ganz wesentlich abgeändert; sie genügt nicht mehr derselben Gleichung wie vorher. Anders bei uns: Wir multiplizieren ψ mit dem Transformations-Operator von rechts, also von der äußeren, unempfindlichen Seite, die noch durch den Faktor Γ gepanzert ist. ψ bleibt Lösung derselben Gleichung wie vorher und wird auch sonst in seinen Eigenschaften in keiner Weise verändert.

§ 10. Beziehungen zwischen den physikalischen Größen.

Bei der Anwendung der Diracschen Gleichung ist es wohl immer von Nutzen, das Rechnen mit den expliziten Eigenfunktionen zu vermeiden, solange es irgend geht, und statt dessen Beziehungen zwischen den physikalischen Größen zu benutzen, welche unmittelbar aus der Dirac-Gleichung folgen. Das ideale Ziel wäre, auf diese Weise alle auftretenden Größen γ_α -frei durch die Norm $\int \bar{\psi} \gamma_4 \psi d\tau$ auszudrücken. Wenn sich auch dieses ideale Ziel nicht immer erreichen läßt, so lassen sich doch meistens mit Hilfe der Dirac-Gleichung wesentliche Vereinfachungen vornehmen. Beziehungen, welche man hierzu gebrauchen kann, erhält man aus der Dirac-Gleichung

$$(44) \quad \left\{ -c \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \mathfrak{A}, i\gamma \right) + \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\vec{\partial}}{\partial t} - V \right) \gamma_4 - E_0 \right\} \psi_n = 0$$

und deren adjungierter:

$$(44a) \quad \bar{\psi}_m \left\{ -c \left(-\frac{\hbar}{i} \overleftarrow{\nabla} - \frac{e}{c} \mathfrak{A}, i\gamma \right) + \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t} - V \right) \gamma_4 - E_0 \right\} = 0,$$

indem man (44) von links mit $(\bar{\psi}_{m*})$ und (44a) von rechts mit $(*\psi_n)$ multipliziert und die beiden hierdurch entstehenden Gleichungen addiert oder voneinander abzieht. An die Stelle des Sterns * kann man der Reihe nach die Größen 1, γ , τ , $\gamma\tau$, γ_4 , $\gamma\gamma_4$, $\tau\gamma_4$, $\gamma\tau\gamma_4$ setzen. Man erhält auf diese Weise 16 Beziehungen (8 skalare und 8 vektorielle), die wir kurz zusammenstellen wollen. Die auftretenden Größen enthalten alle einen rechten Faktor ψ_n und einen linken Faktor $\bar{\psi}_m$; diese Faktoren seien der Kürze halber weggelassen. Außerdem führen wir die folgenden Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{i} \left(\vec{\nabla} - \overleftarrow{\nabla} \right) \\ \Delta \mathfrak{p} &= \frac{\hbar}{i} \left(\vec{\nabla} + \overleftarrow{\nabla} \right) \\ E &= -\frac{1}{2} \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial t} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t} \right) \\ \Delta E &= -\frac{\hbar}{i} \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial t} + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Dann lauten die 16 Beziehungen:

$$\begin{aligned} (a) \quad & c (\Delta \mathfrak{p}, i\gamma) - (\Delta E, \gamma_4) = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung}) \\ (b) \quad & c (\mathfrak{p} - \frac{e}{c} \mathfrak{A}) \gamma_4 + \frac{c}{2} [\Delta \mathfrak{p}, \gamma] \tau \gamma_4 - (E - V) i\gamma = 0 \\ (45) \quad (c) \quad & c (\mathfrak{p} - \frac{e}{c} \mathfrak{A}) - \frac{i}{2} \Delta E \gamma_4 \gamma - E_0 i\gamma = 0 \\ (d) \quad & \frac{c}{2} (\Delta \mathfrak{p}, i\gamma) \gamma_4 + (E - V) - E_0 \gamma_4 = 0 \\ (e) \quad & -\frac{i}{2} c \Delta \mathfrak{p} \tau + c [\mathfrak{p} - \frac{e}{c} \mathfrak{A}, i\gamma] + \frac{1}{2} \Delta E \gamma \tau \gamma_4 = 0 \end{aligned}$$

$$(f) \quad -c(p - \frac{e}{c} \mathfrak{A}, i\gamma) + (E - V)\gamma_4 - E_0 = 0$$

$$(g) \quad + \frac{1}{2} (\Delta p, i\gamma) \tau \gamma_4 + \frac{1}{2} \cdot \Delta E \cdot \tau + E_0 \tau \gamma_4 = 0$$

$$(h) \quad -\frac{e}{2} (\Delta p, i\gamma \tau) + (E - V) \tau \gamma_4 = 0$$

$$(i) \quad i c (p - \frac{e}{c} \mathfrak{A}) \tau \gamma_4 - \frac{e}{2} [\Delta p, i\gamma] \gamma_4 + \frac{1}{2} \Delta E \gamma \tau = 0$$

$$(k) \quad -i \frac{e}{2} \Delta p - c [p - \frac{e}{c} \mathfrak{A}, i\gamma] \tau + (E - V) \gamma \gamma_4 = 0$$

$$(45) (l) \quad [p - \frac{e}{c} \mathfrak{A}, i\gamma] \tau \gamma_4 + \frac{i}{2} \Delta p \gamma_4 + \frac{1}{2} \Delta E \gamma - E_0 \gamma \gamma_4 = 0$$

$$(m) \quad -c(p - \frac{e}{c} \mathfrak{A}, \gamma) \gamma_4 + \frac{i}{2} \Delta E = 0$$

$$(n) \quad c[p - \frac{e}{c} \mathfrak{A}, \gamma] \gamma_4 - \frac{e}{2} \Delta p \tau \gamma_4 + (E - V) i \gamma \tau - E_0 i \gamma \tau \gamma_4 = 0$$

$$(o) \quad -c(p - \frac{e}{c} \mathfrak{A}, i\gamma) \tau - \frac{\Delta E}{2} \tau \gamma_4 - E_0 \tau = 0$$

$$(p) \quad c(p - \frac{e}{c} \mathfrak{A}, i\gamma) \tau \gamma_4 + (E - V) \tau = 0$$

$$(q) \quad c(p - \frac{e}{c} \mathfrak{A}) \tau - \frac{e}{2} [\Delta p, \gamma] + (E - V) i \gamma \tau \gamma_4 - i \gamma \tau E_0 = 0.$$

§ 11. Beziehungen zwischen Mittelwerten im stationären Zustand.

Integriert man die Gleichungen (45) über den Raum, dann erhält man Beziehungen zwischen Mittelwerten. Dabei tritt eine Vereinfachung gegenüber (45) ein, weil die Integrale über Δp verschwinden. Wir wollen die Formeln zusammenstellen, die sich ergeben, wenn ψ_n und $\bar{\psi}_m$ demselben stationären Zustand an-

gehören, also $m = n$ ist; dann verschwindet auch ΔE . Es ergibt sich (die räumliche Mittelung deuten wir nicht besonders an):

$$\begin{array}{lcl}
 \begin{array}{l}
 \text{(b)} \quad c(p - \frac{e}{c} \mathfrak{M})\gamma_4 - (E - V)i\gamma = 0 \\
 \text{(c)} \quad c(p - \frac{e}{c} \mathfrak{M}) - E_0 i\gamma = 0 \\
 \text{(d)} \quad (E - V) - E_0 \gamma_4 = 0 \\
 \text{(e)} \quad c[p - \frac{e}{c} \mathfrak{M}, i\gamma] = 0 \\
 \text{(f)} \quad -c(p - e\mathfrak{M}, i\gamma) + (E - V)\gamma_4 - E_0 = 0
 \end{array} & \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{(b)} \\ \text{(c)} \\ \text{(d)} \\ \text{(e)} \\ \text{(f)} \end{array}} \right\} 1, i\gamma, \gamma_4 \\
 \begin{array}{l}
 \text{(g)} \quad \tau\gamma_4 = 0 \\
 \text{(h)} \quad (E - V)\tau\gamma_4 = 0 \\
 \text{(46) (i)} \quad (p - \frac{e}{c} \mathfrak{M}) \cdot \tau\gamma_4 = 0
 \end{array} & \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{(g)} \\ \text{(h)} \\ \text{(46) (i)} \end{array}} \right\} \tau\gamma_4 \\
 \begin{array}{l}
 \text{(k)} \quad -c[p - \frac{e}{c} \mathfrak{M}, i\gamma\tau] + (E - V)\gamma\gamma_4 = 0 \\
 \text{(l)} \quad c[p - \frac{e}{c} \mathfrak{M}, i\gamma]\tau\gamma_4 - E_0\gamma\gamma_4 = 0 \\
 \text{(m)} \quad (p - \frac{e}{c} \mathfrak{M}, \gamma\gamma_4) = 0 \\
 \text{(n)} \quad c[p - \frac{e}{c} \mathfrak{M}, \gamma\gamma_4] + (E - V)i\gamma\tau - E_0 i\gamma\tau\gamma_4 = 0 \\
 \text{(o)} \quad c(p - \frac{e}{c} \mathfrak{M}, i\gamma\tau) - E_0\tau = 0 \\
 \text{(p)} \quad c(p - \frac{e}{c} \mathfrak{M}, i\gamma)\tau\gamma_4 + (E - V)\tau = 0 \\
 \text{(q)} \quad c(p - \frac{e}{c} \mathfrak{M})\tau + (E - V)i\gamma\tau\gamma_4 - i\gamma\tau E_0 = 0.
 \end{array} & \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{(k)} \\ \text{(l)} \\ \text{(m)} \\ \text{(n)} \\ \text{(o)} \\ \text{(p)} \\ \text{(q)} \end{array}} \right\} i\gamma\tau, \gamma\gamma_4, i\gamma\tau\gamma_4, \tau
 \end{array}$$

Die Gleichungen zerfallen in drei Gruppen, von denen die erste Größen mit $1, i\gamma, \gamma_4$ zueinander in Beziehung setzt. Die zweite Gruppe enthält nur $\tau\gamma_4$, für welches die Mittelwerte in allen stationären Zuständen verschwinden. Die übrigen Gleichungen ergeben Beziehungen zwischen Größen, welche mit zwei- und dreifachen Produkten der γ_α behaftet sind. Zwischen Größen, welche verschiedenen der drei Gruppen angehören, lassen sich aus der Wellengleichung keine Beziehungen ableiten.

Die Gleichungen (46) gelten nur für solche Lösungen der Wellengleichung, deren Quadrat über den Raum integrierbar ist. Jedoch gelten sie außerdem im Falle ebener Wellen, ohne räumliche Integration, da für ebene Wellen an jeder Raumstelle $\Delta p = 0$ ist. Ebene Wellen können auftreten, wenn $\mathfrak{A} = 0$ und das Potential V konstant ist bzw. wenn seine Änderung vernachlässigt wird (also insbesondere beim freien Elektron oder bei dem an einem Kern gestreuten oder photoelektrisch ausgelösten Elektron in großer Entfernung vom Kern (reine Kugelwelle)). Die Beziehungen (46) lassen sich dann vollständig ersetzen durch die folgenden, welche wir jetzt ganz ausschreiben wollen ($\vec{\beta} = \frac{cp}{E-V}$;
 $(E-V)^2 = (cp)^2 + E_0^2$):

$$(b) \quad \bar{\psi} i\gamma \psi = \vec{\beta} \bar{\psi} \gamma_4 \psi$$

$$(d) \quad \bar{\psi} \psi = \sqrt{1-\beta^2} \cdot \bar{\psi} \gamma_4 \psi$$

$$(47) (g) \quad \bar{\psi} \tau \gamma_4 \psi = 0$$

$$(k) \quad \bar{\psi} \gamma \gamma_4 \psi = [\vec{\beta}, \bar{\psi} i\gamma \tau \psi]$$

$$(o) \quad \bar{\psi} \tau \psi = -(\vec{\beta}, \bar{\psi} i\gamma \tau \psi)$$

$$(n) \quad \bar{\psi} i\gamma \tau \gamma_4 \psi = \sqrt{1-\beta^2} \cdot \bar{\psi} i\gamma \tau \psi - \frac{\vec{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} (\vec{\beta}, \bar{\psi} i\gamma \tau \psi).$$

(b) und (d) drücken Strom und $\bar{\psi}\psi$ durch die Dichte aus, (k), (o) und (n) führen die Ausdrücke mit zwei- und dreifachen γ_α -Produkten auf $\bar{\psi} i\gamma \tau \psi$ zurück.

Die Gleichungen (b) und (d) klären eine Schwierigkeit auf, welche Sauter¹ erwähnt. Sauter findet nämlich, daß für den Photostrom nach Dirac gilt $S_r (= e c \bar{\psi} i \gamma \psi) = \frac{e v}{V \sqrt{1-\beta^2}} \bar{\psi} \psi$ (46c); er schließt daraus, daß nicht wie im nichtrelativistischen Fall gilt $S_r = e v \cdot \rho$, das hieße $S_r = e v \bar{\psi} \gamma_4 \psi$. Nun ist aber (47) auf die Kugelwellen des Photostroms anwendbar (da $V = 0$ in großer Entfernung vom Kern, und außerdem Glieder $\sim \frac{1}{r^3}$ vernachlässigt werden, was aus der Kugelwelle praktisch eine ebene Welle macht). (47d) zeigt, daß die Gleichungen $S_r = \frac{e v}{V \sqrt{1-\beta^2}} \bar{\psi} \psi$ und $S_r = e v \cdot \bar{\psi} \gamma_4 \psi$ einander nicht ausschließen, sondern identisch sind.

§ 12. Spinmittlung.

Für $\mathfrak{A} = 0$ lautet die Dirac-Gleichung eines stationären Zustands der Energie E :

$$(48) \quad \left\{ -(\gamma \nabla) + \frac{E-V}{\hbar c} \gamma_4 - \frac{E_0}{\hbar c} \right\} \psi = 0.$$

Diese Gleichung enthält außer den 4 γ_x nur reelle Größen; sie ist frei von der imaginären Einheit i . Daraus folgt, daß von jeder Lösung ψ die mit i behafteten Größen und die nicht mit i behafteten Größen für sich der Gleichung genügen.

Es wäre jedoch falsch zu glauben, daß man eine physikalisch brauchbare Lösung ohne Zuhilfenahme der imaginären Einheit gewinnen könnte. Die Lösung muß ja einen rechten Nullteiler mit $r = \frac{1}{4}$ enthalten. Zahlen mit $r = \frac{1}{4}$ gibt es aber im reellen Diracschen Zahlkörper nicht. Zu jeder Lösung gibt es daher eine von ihr linear unabhängige „konjugiert komplexe“ Lösung, welche durch Vorzeichenwechsel der imaginären Einheit aus ihr hervorgeht. Es gelten die folgenden Sätze:

¹ F. Sauter, Atomarer Photoeffekt . . . , Ann. d. Phys., 9, 246, 1931.

Zwei konjugiert komplexe Lösungen

1. sind orthogonal,
2. haben überall gleiche Dichte,
3. haben überall entgegengesetzten Strom und entgegengesetztes magnetisches Moment.

Um 1. zu beweisen, setzen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $\psi = \varphi \cdot (1 + \gamma_4)(1 + i\gamma_{12})$, worin φ von γ_4 und i frei ist. Dann wird $\bar{\psi}^* = (1 - i\gamma_{12})(1 + \gamma_4)\varphi$ (der Stern soll den Vorzeichenwechsel der imaginären Einheit andeuten), und die „Übergangsdichte“

$$\bar{\psi}^* \gamma_4 \psi = (1 - i\gamma_{12})(1 + \gamma_4)\varphi \gamma_4 \varphi (1 + \gamma_4)(1 + i\gamma_{12}) = 0,$$

daher erst recht $\int \bar{\psi}^* \gamma_4 \psi d\tau = 0$ (Orthogonalität). (Um das Verschwinden der Übergangsdichte einzusehen, muß man nur beachten, daß $\bar{\varphi} \gamma_4 \varphi$ selbstadjungiert ist und daher nur Glieder mit γ_4 und $\gamma_4 \gamma_4$ enthalten kann (es sind ja alle Glieder mit genau einem Faktor γ_4 behaftet, da φ und $\bar{\varphi}$ von γ_4 frei sind), und daß $(1 - i\gamma_{12})(1 + i\gamma_{12}) = 0$ und $(1 + \gamma_4)\gamma_4(1 + \gamma_4) = 0$ ist). Die Behauptungen (2) und (3) kann man ebenso beweisen (man muß nur aus Gründen der Normierung zu $\bar{\psi}^*$ einen rechten Faktor $i\gamma_{13}$ hinzufügen, was auch im folgenden zu geschehen hat). Man kann diese Sätze aber auch direkt mit Hilfe der Realitätseigenschaften der physikalischen Größen einsehen: $\bar{\psi} \gamma_4 \psi$, $\bar{\psi} i\gamma \psi$, $\bar{\psi} i\gamma \tau \psi$ und $\bar{\psi}^* \gamma_4 \psi^*$, $\bar{\psi}^* \gamma \psi^*$, $\bar{\psi}^* i\gamma \tau \psi^*$ stehen alle in einem reellen Verhältnis. Daher gilt bis auf den gemeinsamen Normierungsfaktor:

$$\bar{\psi} \gamma_4 \psi = (\bar{\psi} \gamma_4 \psi)^* = \bar{\psi}^* \gamma_4 \psi^*;$$

$$\bar{\psi} i\gamma \psi = (\bar{\psi} i\gamma \psi)^* = -\bar{\psi}^* i\gamma \psi^* \text{ und ebenso}$$

$$\bar{\psi} i\gamma \tau \psi = -\bar{\psi}^* i\gamma \tau \psi^*.$$

Damit ist (2) und (3) bewiesen.

Die durch die Existenz der beiden orthogonalen Eigenfunktionen ψ und ψ^* gegebene Entartung wollen wir kurz, wenn auch nicht ganz korrekt, Spinentartung nennen.

In vielen Fällen geht man von physikalischen Bedingungen aus, durch welche die beiden Zustände ψ und ψ^* nicht unterschieden sind, so daß man von einer wirklichen Entartung spre-

chen kann. Dann interessieren nicht die physikalischen Größen der Zustände für sich, sondern nur das Mittel über die beiden Zustände, das wir kurz als „Spinmittel“ bezeichnen wollen und im folgenden durch eine Wellenlinie andeuten. Wir setzen also

$$\widetilde{\psi \dots \psi} = \frac{1}{2} (\bar{\psi} \dots \psi + \bar{\psi}^* \dots \psi^*).$$

Im Spinmittel gelten die folgenden Beziehungen:

$$\widetilde{\psi i \gamma \psi} = \widetilde{\psi i \gamma \tau \psi} = \widetilde{\psi i \gamma \tau \gamma_4 \psi} = 0$$

und hieraus nach (45)

$$(c) \quad \widetilde{\psi c p \psi} = 0$$

$$(g) \quad \widetilde{\psi \tau \gamma_4 \psi} = 0$$

$$(n) \quad \widetilde{\psi [p, \gamma \gamma_4] \psi} = 0$$

$$(q) \quad \widetilde{\psi p \tau \psi} = 0$$

(Man muß darauf achten, daß aus $\widetilde{\psi i \gamma \psi} = 0$ usw. wohl folgt $\widetilde{\psi \Delta p i \gamma \psi} = 0$, aber nicht $\widetilde{\psi p i \gamma \psi} = 0$.)

Die beiden Zustände, welche wir zur „Spinmittelung“ herangezogen haben, weisen einen Vorzeichenunterschied auf nicht nur im magnetischen Moment, sondern auch in verschiedenen anderen Eigenschaften, wie Strom, Bahnmoment usw. Die Richtung des magnetischen Moments allein stellt keinen so trivialen Fall von Entartung dar wie unser Vorzeichenwechsel der imaginären Einheit.

Eine mehr unmittelbare Art von Spinmittelung wie unsere oben eingeführte ergibt sich bei ebenen Wellen ($V=0$, freien Elektro-

nen) $\psi = a \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(p r)}$ mit konstantem a . Diese passen sich dem vorigen Schema nicht ein, da sie ja wesentlich komplex sind. a kann sich von $\{-i c(p \gamma) + E \gamma_4 + E_0\}$ nur um einen rechten, konstanten Faktor unterscheiden. Es gibt zwei unabhängige redu-

zierte Lösungen, welche entgegengesetztes magnetisches Moment ($\approx i\gamma\tau$) besitzen. Wenn wir über diese beiden Zustände mitteln, dann verschwinden nach (47) alle Größen außer:

$$\bar{\psi} i \gamma \psi = \vec{\beta} \bar{\psi} \gamma_4 \psi; \quad \bar{\psi} \psi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \bar{\psi} \gamma_4 \psi.$$

Teil III. Anwendungen.

§ 13. Übergang von der Dirac- zur Pauli-Gleichung.

Der Übergang von der Dirac-Gleichung

$$(50) \quad \left\{ -ic \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathfrak{A}, \gamma \right) + (E - V) \gamma_4 - E_0 \right\} \psi = 0$$

zur Pauli-Gleichung ergibt sich durch die folgende Aufspaltung von ψ :

$$(51) \quad \psi = (1 + \gamma_4) \psi^+ + (1 - \gamma_4) \psi^-.$$

ψ^+ und ψ^- enthalten nur die $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, aber nicht γ_4 ; (51) bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit. Wir setzen (51) in (50) ein und erhalten:

$$(52) \quad \begin{aligned} & (1 + \gamma_4) \left\{ -ic \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathfrak{A}, \gamma \right) \psi^- + (E - V - E_0) \psi^+ \right\} \\ & + (1 - \gamma_4) \left\{ -ic \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathfrak{A}, \gamma \right) \psi^+ - (E - V + E_0) \psi^- \right\} = 0. \end{aligned}$$

Multipliziert man (52) von links mit $\frac{1}{2} (1 \pm \gamma_4)$, dann bleibt die erste bzw. zweite Zeile ungeändert, während die andere verschwindet. Da die geschweiften Klammern von γ_4 frei sind, folgt, daß sie einzeln verschwinden müssen. Dies ergibt die beiden Gleichungen:

$$(53a) \quad -ic \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathfrak{A}, \gamma \right) \psi^- + (E - V - E_0) \psi^+ = 0$$

$$(53b) \quad -ic(p - \frac{e}{c} \mathfrak{A}, \gamma) \psi^+ - (E - V + E_0) \psi^- = 0.$$

Die Gleichungen zeigen, daß $\psi^+ \gg \psi^-$ in nichtrelativistischer Näherung ($E - E_0 = W \ll E_0$). Man eliminiert daher ψ^- und stellt eine Gleichung für ψ^+ allein auf. Es ergibt sich mit $\psi^+ = \varphi$:

$$(54) \quad \left\{ (W - V)(2E_0 + W - V) - c^2(p - \frac{e}{c} \mathfrak{A}, \gamma)^2 - \frac{\hbar c}{2E_0 + W - V} \cdot (\mathfrak{E}, \gamma) ic(p - \frac{e}{c} \mathfrak{A}, \gamma) \right\} \varphi = 0.$$

Mit Hilfe der ersten Rechenregel (31) lassen sich die Produkte $(p - \frac{e}{c} \mathfrak{A}, \gamma)^2$ und $(\mathfrak{E}, \gamma)(p - \frac{e}{c} \mathfrak{A}, \gamma)$ ausrechnen (man muß dabei beachten, daß $[p\mathfrak{A}] + [\mathfrak{A}p] \neq 0$ usw.); mit der Abkürzung $\sigma = -i\gamma\tau$ ergibt sich:

$$(55) \quad \left\{ (W - V)(2E_0 + W - V) - c^2(p - \frac{e}{c} \mathfrak{A})^2 + \hbar c \cdot e(\mathfrak{E} \sigma) + \frac{\hbar c e}{2E_0 + W - V} \left((\sigma[\mathfrak{E}, p - \frac{e}{c} \mathfrak{A}]) - ic(\mathfrak{E}, p - \frac{e}{c} \mathfrak{A}) \right) \right\} \varphi = 0.$$

Der zunächst als Abkürzung eingeführte Vektor σ genügt der Beziehung (7) der Paulischen Spinoperatoren. Bei gehörigen Vernachlässigungen geht (55) in die durch das Glied $\sim (\mathfrak{E}, p)$ korrigierte Pauli-Gleichung über.

Durch den Ansatz (51) wurde die vierte Koordinate ausgezeichnet und daher die vierdimensionale Symmetrie zerstört. Trotzdem würde sich bei einer exakten Behandlung der Gleichung (55) zwingend eine Lorentz-invariante Physik ergeben; man wäre aber gezwungen, mit einer sehr komplizierten und unschönen Kontinuitätsgleichung und Strom-Dichte-Definition zu arbeiten. Der Übergang von (50) zu (55) hat aber selbstverständlich nur Sinn, wenn man angemessene, nichtrelativistische Vernachlässigungen vornehmen will, welche in den physikalischen Ergebnissen die Lorentz-Invarianz wirklich vernichten. Die Invarianz gegen räumliche Drehungen bleibt beim Übergang zur Pauli-Gleichung jedoch erhalten, nicht nur in den physikalischen Ergebnissen,

sondern auch in der Gleichung selbst. Da wir $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ bei festem γ_4 wie einen räumlichen polaren Dreier-Vektor transformieren, transformiert sich $\sigma = -i(\gamma_2 \gamma_3, \gamma_3 \gamma_1, \gamma_1 \gamma_2)$ wie ein axialer Vektor, ebenso wie $\mathfrak{S}$ und $[\mathfrak{S}, \mathfrak{p}]$; der Operator der Gleichung (55) ist daher eine Invariante. Die Betrachtungen über die Transformationseigenschaften der Dirac-Gleichung (§ 6) bleiben, ins Dreidimensionale übertragen, für die Pauli-Gleichung gültig.

§ 14. Elektron im Zentralfeld.

Ein Elektron im Zentralfeld genügt der Dirac-Gleichung:

$$(56) \quad \left\{ -(\gamma \nabla) + \frac{E - V(r)}{\hbar c} \gamma_4 - \frac{E_0}{\hbar c} \right\} \psi = 0,$$

welche (ein Spezialfall von § 12) die imaginäre Einheit nicht enthält. Wir wollen in systematischer Weise ein vollständiges System von Lösungen dieser Gleichung aufstellen. Am besten sucht man zunächst solche Lösungen von (56), die ebenso wie der Gleichungsoperator von der imaginären Einheit frei sind. Dies hat zwei Vorteile: einmal enthalten gerade diese Lösungen die γ_α in sinnvoller Verbindung mit den zugehörigen Koordinaten, wodurch der Gang der Lösung einfach und übersichtlich wird; andererseits lassen sich aus einer reellen Lösung durch Multiplikation mit zwei konjugiert komplexen Reduktionsfaktoren mit einem Schlag zwei orthogonale reduzierte Lösungen gewinnen. (Die Bezeichnungen reell und komplex sind hier vorübergehend auf das explizite Auftreten der imaginären Einheit in den γ_α -Aggregaten bezogen.)

Der Weg zur Integration ohne Einführung von Matrizen ist von Temple¹ vorgezeichnet. (Temple benutzt allerdings seine Methode nur zur Aufstellung der radialen Gleichung und zu deren Lösung.)² Man bestimmt zunächst einen vollständigen Satz von Operatoren, welche mit der Hamilton-Funktion und untereinander vertauschbar sind. Als solche bieten sich die folgenden beiden dar:

¹ G. Temple, Proc. Roy. Soc. London 127, 349 (1930).

² Auf die Möglichkeit, die ganzen Eigenfunktionen hierdurch zu gewinnen, hat Sauter hingewiesen (a. a. O., Ende der 2. Arbeit).

$$(57) \quad \mathfrak{N}_3 \equiv [\mathfrak{r} \nabla]_3 + \frac{1}{2} \gamma_{12} \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \gamma_{12}.$$

$$P \equiv \{1 - ([\mathfrak{r} \nabla] \gamma) \tau\} \gamma_4.$$

φ ist das Azimut um die x_3 -Achse, die wir zur Achse eines Polarkoordinatensystems r, ϑ, φ machen. $\mathfrak{N}_3$ ist bis auf einen konstanten Faktor die x_3 -Komponente von Bahnmoment + Spinnmoment, P ist eine Art Quadratwurzel aus dem Quadrat dieser Momentensumme $\mathfrak{N} = [\mathfrak{r} \nabla] + \frac{1}{2} \gamma \tau$. $\left(P^2 = -\mathfrak{N}^2 + \frac{1}{4}\right)$.

Da wir Lösungen der Dirac-Gleichung suchen, welche die imaginäre Einheit nicht enthalten, können wir nur solche Operatoren verwenden, welche von der imaginären Einheit frei sind und außerdem reelle Eigenwerte besitzen. Dieser Forderung wird P gerecht; $\mathfrak{N}_3$ dagegen besitzt rein imaginäre Eigenwerte. Wir verwenden deshalb nicht $\mathfrak{N}_3$ selbst, sondern $\mathfrak{N}_3^2$.

Die Hamilton-Funktion und die beiden Operatoren P und $\mathfrak{N}_3^2$ bringen wir gleichzeitig auf Diagonalform, d. h. wir suchen diejenigen ψ , für welche die Dirac-Gleichung (56) erfüllt ist und gleichzeitig:

$$(58) \quad P \cdot \psi = p \cdot \psi$$

$$(59) \quad \mathfrak{N}_3^2 \psi = -m^2 \psi$$

worin p und m^2 reelle Eigenwerte sind. Wir integrieren jetzt zunächst die Gleichungen (59) und (58), welche einfacher zu behandeln sind als (56).

Eigenfunktionen von $\mathfrak{N}_3^2$.

Die Eigenwertgleichung lautet ausgeschrieben:

$$(59a) \quad 0 = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \gamma_{12} \right)^2 + m^2 \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + \left(m + \frac{1}{2} \right) \gamma_{12} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \left(m - \frac{1}{2} \right) \gamma_{12} \right).$$

Der Zahlbereich, welchem die Koeffizienten dieser Gleichung angehören, ist isomorph zu dem Körper der komplexen Zahlen.

$(\gamma_{12})^2 = -1$, daher ist γ_{12} die „imaginäre Einheit“ des Zahlbereichs. (59a) besitzt die Lösungen:

$$(60) \quad \psi = e^{\gamma_{12}(m-\frac{1}{2})\varphi} \cdot a_+ + e^{-\gamma_{12}(m-\frac{1}{2})\varphi} \cdot a_-$$

mit halbzahligem m . $a_{\pm}$ sind Integrationskonstante, welche von r und ϑ , aber nicht von φ abhängen dürfen. Die Exponentialfunktion ist durch die Exponentialreihe oder, was dasselbe bedeutet, durch $e^{\alpha\gamma_{12}} = \cos \alpha + \gamma_{12} \sin \alpha$, bestimmt. (Die Exponentialfunktion läßt sich nicht nur in dem durch γ_{12} erzeugten Zahlkörper, sondern auch in nicht kommutativen Zahlbereichen verwenden; man muß aber beachten, daß die Regel $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ nur gilt, wenn $ab = ba$.)

Eigenfunktionen von P .

Die Koeffizienten der Gleichung (58) gehören dem durch γ_{12} , γ_{23} , γ_{31} und γ_4 erzeugten Zahlbereich an, welcher sich zerfällen läßt mit Hilfe der Einheiten $\frac{1 \pm \gamma_4}{2}$. Man erhält zwei unabhängige Gleichungen für zwei unabhängige Sorten von Lösungen ψ^+ und ψ^- , welche den Faktor $1 + \gamma_4$ bzw. $1 - \gamma_4$ enthalten ($\psi^{\pm} = (1 \pm \gamma_4) \cdot \varphi^{\pm}$, $\varphi^{\pm}$ frei von γ_4):

$$(61) \quad \pm \{1 - ([r \nabla] \gamma) \tau\} \varphi^{\pm} = p \cdot \varphi^{\pm}.$$

Bringt man das Glied $\pm 1 \varphi^{\pm}$ auf die rechte Seite und iteriert dann, so ergibt sich:

$$(61a) \quad (-[r \nabla]^2 + ([r \nabla] \gamma) \tau) \varphi^{\pm} = (p \mp 1)^2 \cdot \varphi^{\pm}.$$

Wenn man noch aus (61) einsetzt: $([r \nabla] \gamma) \tau = (\mp p + 1)$, dann erhält man:

$$(61b) \quad \{[r \nabla]^2 + (\mp p)(\mp p + 1)\} \varphi^{\pm} = 0.$$

(61b) ist aber gerade die Gleichung der Kugelflächenfunktionen vom Index $\mp p$.

Gemeinsame Eigenfunktionen von $\mathfrak{N}_3^2$ und P .

Die beiden Funktionen $\varphi^\pm$ müssen Eigenfunktionen von $\mathfrak{N}^2$ sein, also die Form (60) besitzen. Dabei muß ersichtlich

$$a_+ = P_{\mp p}^{m-\frac{1}{2}} (\cos \vartheta) a'_+; \quad a_- = P_{\mp p}^{m+\frac{1}{2}} (\cos \vartheta) \cdot a'_\pm$$

($a'_\pm$ unabhängig von ϑ) sein. Einsetzen in (61) ergibt:

$$(62) \quad \{ ([\mathbf{r} \nabla] \gamma) \tau + (\pm p - 1) \} \left(P_{\pm p}^{m-\frac{1}{2}} e^{\gamma_{12}(m-\frac{1}{2})\varphi} a'_+ + P_{\mp p}^{m+\frac{1}{2}} \cdot e^{-\gamma_{12}(m+\frac{1}{2})\varphi} \cdot a'_- \right) = 0.$$

Die Differentiationen $[\mathbf{r} \nabla]$ lassen sich an den Kugelflächenfunktionen leicht explizit ausführen. Bei der dritten Komponente

$[\mathbf{r} \nabla]_3 = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ ergeben sich durch die Differentiation die Faktoren $\pm \gamma_{12} \left(m \mp \frac{1}{2} \right)$. Auf die beiden anderen Komponenten läßt sich die Formel anwenden:

$$(63) \quad (\gamma_{12} [\mathbf{r} \nabla]_1 - [\mathbf{r} \nabla]_2) \cdot P^\mu \cdot e^{\gamma_{12} \mu \varphi} = P^{\mu+1} \cdot e^{\gamma_{12} (\mu+1) \varphi}.$$

(Diese Formel kann man etwa entnehmen aus A. Sommerfeld, Wellenmech. ErgBd., S. 297, (41 a), indem man die beiden dortigen Gleichungen kombiniert und für i einsetzt γ_{12} .) Multipliziert man (63) von links mit γ_{13} und addiert noch die Gleichung $\gamma_{12} [\mathbf{r} \nabla]_3 = -\mu$, dann ergibt sich

$$(64) \quad ([\mathbf{r} \nabla] \gamma) \tau \cdot P^\mu \cdot e^{\gamma_{12} \mu \varphi} = -\mu \cdot P^\mu \cdot e^{\gamma_{12} \mu \varphi} + \gamma_{13} \cdot P^{\mu+1} \cdot e^{\gamma_{12} (\mu+1) \varphi}.$$

Gleichung (62) läßt sich in zwei Glieder zerspalten, deren φ -Abhängigkeit in den Faktoren $e^{-\gamma_{12}(m+\frac{1}{2})\varphi}$ bzw. $e^{\gamma_{12}(m-\frac{1}{2})\varphi}$ besteht. Die beiden Koeffizienten dieser Größen in (62) müssen einzeln verschwinden. Wir schreiben das Glied mit $e^{-\gamma_{12}(m+\frac{1}{2})\varphi}$ an (der Koeffizient von $e^{\gamma_{12}(m-\frac{1}{2})\varphi}$ ist bis auf einen endlichen Faktor derselbe wie der von $e^{-\gamma_{12}(m+\frac{1}{2})\varphi}$):

$$(65) \quad P_{\mp}^{m+\frac{1}{2}} \cdot e^{-\gamma_{12}(m+\frac{1}{2})\varphi} \left\{ \gamma_{13} \cdot a'_+ + \left(m + \frac{1}{2} \pm p - 1 \right) \cdot a'_- \right\} = 0.$$

D. h. also: $\gamma_{13} a'_+ = \left(\mp p - m + \frac{1}{2} \right) a'_-$. Die beiden unabhängigen gemeinsamen Lösungen von $\mathfrak{N}_3^2$ und P ergeben sich hieraus zu:

$$(66) \quad \psi^{\pm} = \chi^{\pm} \cdot b^{\pm}$$

$$\text{mit } \chi^{\pm} = \left\{ P_{\mp p}^{-\frac{1}{2}} e^{\gamma_{12}(m-\frac{1}{2})\varphi} \left(\mp p - m + \frac{1}{2} \right) + \gamma_{13} \cdot P_{\mp p}^{m+\frac{1}{2}} \cdot e^{\gamma_{12}(m+\frac{1}{2})\varphi} \right\} (1 \pm \gamma_4).$$

Gemeinsame Eigenlösungen von $\mathfrak{N}_3^2$, P und Hamilton-Funktion.

Die gesuchte Lösung der Dirac-Gleichung ist eine Linearkombination der beiden Lösungen (66) mit radial-abhängigen Koeffizienten $b_{\pm}$. Durch Einsetzen in die Dirac-Gleichung (56) erhält man Bestimmungsgleichungen für diese Koeffizienten. Wir bilden zunächst:

$$(67) \quad (\gamma \nabla) \cdot \chi^{\pm} = (1 \mp \gamma_4) \left\{ \begin{aligned} & \gamma_1 \left[(\nabla_1 + \gamma_{12} \nabla_2) P_{\mp p}^{m-\frac{1}{2}} e^{\gamma_{12}(m+\frac{1}{2})\varphi} \left(\mp p - m + \frac{1}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. - \nabla_3 \cdot P_{\mp p}^{m+\frac{1}{2}} \cdot e^{\gamma_{12}(m-\frac{1}{2})\varphi} \right] \\ & + \gamma_3 \left[(\nabla_1 - \gamma_{12} \nabla_2) P_{\mp p}^{m+\frac{1}{2}} e^{\gamma_{12}(m+\frac{1}{2})\varphi} + \nabla_3 \cdot P_{\mp p}^{m-\frac{1}{2}} \right. \\ & \quad \left. \cdot e^{\gamma_{12}(m-\frac{1}{2})\varphi} \left(\mp p - m + \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned} \right\}$$

Die Differentiationen nach den Polarwinkeln lassen sich ausführen auf Grund zweier Beziehungen zwischen Kugelflächenfunktionen:¹

¹ Siehe F. Sauter, Z. f. Phys. 63, 807 (10), (1930). Wir brauchen die zweite und die vierte dieser Formeln, in welchen wir i durch $-\gamma_{12}$ zu ersetzen haben.

$$\begin{aligned}
 & (\nabla_1 + \gamma_{12} \nabla_2) P_h'' e^{\gamma_{12} \mu \varphi} (k - \mu) - \nabla_3 \cdot P_h'' e^{\gamma_{12} (\mu + 1) \varphi} = P_{-h}'' + 1 \\
 & \quad \cdot e^{\gamma_{12} (\mu + 1) \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 + k}{r} \right) \\
 (68) \quad & (\nabla_1 - \gamma_{12} \nabla_2) P_h'' e^{\gamma_{12} (\mu + 1) \varphi} + \nabla_3 \cdot P_h'' e^{\gamma_{12} \mu \varphi} (k - \mu) = P_{-h}'' \\
 & \quad \cdot e^{\gamma_{12} \mu \varphi} (k + \mu) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 + k}{r} \right).
 \end{aligned}$$

Daher wird aus (67):

$$\begin{aligned}
 (69) \quad (\gamma \nabla) \chi^\pm &= - (1 \mp \gamma_4) \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 \cdot P_{\pm p}^{m + \frac{1}{2}} e^{\gamma_{12} (m + \frac{1}{2}) \varphi} \\ - \gamma_3 \cdot P_{\pm p}^{m - \frac{1}{2}} e^{\gamma_{12} (m - \frac{1}{2}) \varphi} \\ \left(\mp p + m - \frac{1}{2} \right) \end{array} \right\} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 \mp p}{r} \right) \\
 &= - \chi^\mp \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 \mp p}{r} \right) \gamma_3.
 \end{aligned}$$

Wir wenden jetzt den Operator der Dirac-Gleichung (56) auf $\psi^\pm$ an:

$$\begin{aligned}
 (70) \quad & \left\{ -(\gamma \nabla) + \frac{E - V}{\hbar c} \gamma_4 - \frac{E_0}{\hbar c} \right\} \psi^\pm = \chi^\mp \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 \mp p}{r} \right) \gamma_3 \cdot b_\pm \\
 & + \left(\pm \frac{E - V}{\hbar c} - \frac{E_0}{\hbar c} \right) \chi^\pm b_\pm.
 \end{aligned}$$

Die $b_\pm$ müssen so bestimmt werden, daß die Summe der beiden Ausdrücke auf der rechten Seite von (70) verschwindet; das ergibt die beiden Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 \mp p}{r} \right) \gamma_3 \cdot b_\pm - \left(\pm \frac{E - V}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right) b_\mp = 0.$$

Setzt man

$$(71) \quad U_+ = -b_+; \quad U_- = \gamma_3 \cdot b_-,$$

so ergeben sich γ_α -freie radiale Gleichungen:

$$(72) \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 \mp p}{r} \right) U_\pm + \left(\pm \frac{E - V}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right) U_\mp = 0.$$

Wenn wir unter $U_{\pm}$ γ_{α} -freie Lösungen von (72) verstehen, dann lautet der endgültige Ausdruck für die gesuchte Eigenfunktion nach (66) und (71):

$$(73) \quad \psi = \left[\begin{aligned} & \left\{ -\gamma_{13} \cdot P_{-p}^{m+\frac{1}{2}} e^{\gamma_{12}(m+\frac{1}{2})\varphi} + P_{-p}^{m-\frac{1}{2}} e^{\gamma_{12}(m-\frac{1}{2})\varphi} \right. \\ & \quad \cdot \left(p + m - \frac{1}{2} \right) \Big\} U_+ \\ & + \left\{ \gamma_{13} \cdot P_p^{m+\frac{1}{2}} e^{\gamma_{12}(m+\frac{1}{2})\varphi} + P_p^{m-\frac{1}{2}} e^{-\gamma_{12}(m-\frac{1}{2})\varphi} \right. \\ & \quad \cdot \left(p - m + \frac{1}{2} \right) \Big\} \gamma_3 U_- \end{aligned} \right] (1 + \gamma_4) \Gamma.$$

Γ ist ein beliebiger konstanter Faktor.

Aus (73) kann man zwei orthogonale reduzierte Lösungen gewinnen, indem man für die eine Lösung $\Gamma = (1 + i(\gamma \tilde{s})\tau)$ und für die andere $\Gamma = (1 - i(\gamma \tilde{s})\tau)i(\gamma \mathfrak{n})\tau$ setzt, worin $\tilde{s}$ und $\mathfrak{n} \perp \tilde{s}$ Einheitsvektoren sind. Die Herleitbarkeit dieser beiden Lösungen aus einer einzigen durch Multiplikation mit konstanten Faktoren ist das, was wir in § 12 als Spinentartung bezeichnet haben. Wählt man speziell für $\tilde{s}$ den Einheitsvektor in der x_3 -Richtung, dann besitzen die entstehenden ψ die Eigenwerte $\mathfrak{R}_3 \psi = \pm im \psi$, während ja (73) im allgemeinen nur zu $\mathfrak{R}_3^2$ den Eigenwert $-m^2$ besitzt.

Die γ_a treten in (73) in durchaus sinnvoller Weise auf; das Auftreten von $e^{\gamma_{12}\varphi}$ hängt damit zusammen, daß φ die Drehung $1 \rightarrow 2$ bedeutet, während das isolierte Auftreten von γ_3 durch die Auszeichnung der x_3 -Achse als Polarachse verursacht wird.¹

Die Koordinatensymmetrie von (73) kommt am besten zum Ausdruck in den s -Zuständen $\left(p = 1, m = \frac{1}{2} \right)$:

$$(74) \quad \psi_s = \left\{ U_+ + U_- \left(\gamma, \frac{\mathfrak{r}}{r} \right) \right\} (1 + \gamma_4).$$

Es sei noch auf den Zusammenhang zwischen den Parametern m, p und den Quantenzahlen hingewiesen. Wählt man $\Gamma = (1 -$

¹ F. Sauter hat kürzlich eine besonders schöne Lösung des Keplerproblems gefunden, bei welcher keine Achse ausgezeichnet ist und γ nur in skalaren Produkten auftritt. Wie er mir freundlich mitteilt, wird er dies demnächst in der Z. f. Phys. veröffentlichen.

$-i\gamma_1\gamma_2$), dann ist die halbe Zahl m gerade die magnetische Quantenzahl. Den Zusammenhang zwischen p und der Spinquantenzahl j erschließen wir aus $P^2 = -\mathfrak{M}^2 + \frac{1}{4}$, d. h.

$$(75) \quad \left(p - \frac{1}{2}\right)\left(p + \frac{1}{2}\right) = j(j+1); j = |p| - \frac{1}{2}.$$

§ 15. Bemerkungen über die Wellenfunktionen des freien Elektrons.

Für das freie Elektron lautet die Dirac-Gleichung:

$$(76) \quad \left\{ \sum_{\alpha} \left(\gamma_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \right) + \frac{mc}{\hbar} \right\} \psi = 0.$$

Man löst sie durch den Ansatz: $\psi = a \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha} (p_{\alpha} x_{\alpha})}$. Für a folgt

$$(77) \quad \left\{ i \sum_{\alpha} (\gamma_{\alpha} p_{\alpha}) + mc \right\} a = 0$$

und für p_{α} : $\sum p_{\alpha}^2 = (mc)^2$.

Wir wollen kurz zeigen, wie man Lösungen von (76) in einer noch unmittelbarer Weise aufstellen kann. Wir suchen etwa eine

Lösung von der Zeitabhängigkeit $e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$, die von x_2 und x_3 unabhängig ist; die Dirac-Gleichung für diese Funktion lautet

$$(78) \quad \left\{ \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{E \gamma_4 + E_0}{\hbar c} \right\} \psi = 0$$

oder auch

$$(78a) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -\gamma_1 \frac{E \gamma_4 + E_0}{\hbar c} \psi$$

mit der Lösung

$$(79) \quad \psi = e^{-\gamma_1 \frac{E \gamma_4 + E_0}{\hbar c} \cdot x_1} \left(= \cos \left(\frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{\hbar c} \cdot x_1 \right) - \gamma_1 \frac{E \gamma_4 + E_0}{\sqrt{E^2 - E_0^2}} \sin \left(\frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{\hbar c} x_1 \right) \right).$$

Hieraus lassen sich zwei Lösungen von entgegengesetztem Impuls, Spin und Energie gewinnen, wenn man mit zwei „konjugiert komplexen“ (im Sinne von § 12) Reduktionsfaktoren multipliziert. Wählt man als Faktoren speziell $\left(1 \pm i \gamma_1 \frac{E \gamma_4 + E_0}{\sqrt{E^2 - E_0^2}}\right)$, dann ergeben sich die ebenen Wellen

$$e^{\mp i \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{\hbar c} x_1} \left(1 \pm i \gamma_1 \frac{E \gamma_4 + E_0}{\sqrt{E^2 - E_0^2}}\right).$$

Symmetrisch in 4 Koordinaten läßt sich die Gleichung (76) lösen durch den Ansatz: ψ = Funktion von $\sum_a \pi_a x_a$, worin π_a ein Einheits-Vierervektor ist ($\sum_a \pi_a^2 = 1$). Aus (76) wird dann

$$(80) \quad \frac{\partial \psi}{\partial (\sum \pi_a x_a)} = - \frac{m c}{\hbar} \sum (\pi_a \gamma_a) \cdot \psi$$

mit der Lösung

$$(81) \quad \psi = e^{- \frac{m c}{\hbar} \sum_a \pi_a \gamma_a \cdot \sum_\beta \pi_\beta x_\beta}$$

$$\left[\left(= \mathbb{C} 0 \right] \left(\frac{m c}{\hbar} \sum \pi_a x_a \right) - \sum_a (\pi_a \gamma_a) \sin \left(\frac{m c}{\hbar} \sum_a (\pi_a x_a) \right) \right].$$

Wegen der Randbedingung im räumlich Unendlichen muß π_1 , π_2 , π_3 rein imaginär und wegen $\sum \pi_a^2 = 1$ daher $\pi_4^2 > 1$ sein.

Während a nach (77) ein Nullteiler ist, sind die Lösungen (79) und (81) Zahlen, welche ein Reziprokes besitzen. Dies hängt damit zusammen, daß wir die Eigenwertbedingung $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_a} \psi = p_a \psi$ der Lösung (77) ersetzt haben durch die schwächere Bedingung $-\left(\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x_a}\right)^2 = p_a^2 \psi$. Eine ähnliche Erscheinung war auch beim Keplerproblem zu beobachten: die von uns in § 14 aufgestellten Lösungen (73) von $r = \frac{1}{2}$ genügen der Eigenwertgleichung $\mathfrak{H}_3^2 \psi = -m^2 \psi$; um auch die stärkere Bedingung $\mathfrak{H}_3 \psi = i m \psi$ zu

befriedigen, sind Lösungen von $r = \frac{1}{4}$ erforderlich. Das bedeutet also: je stärkere Eigenwertbedingungen den Lösungen der Dirac-Gleichung auferlegt werden, desto „stärkere“ (d.h. stärker reduzierende) Nullteiler müssen sie sein.

§ 16. Iterierte Dirac-Gleichung.

Die iterierte Dirac-Gleichung entsteht, wenn man die beiden vertauschbaren Operatoren

$$(82) \quad D^{\pm} \equiv \left(\sum_{k=1}^4 \gamma_k \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\vec{\partial}}{\partial x_k} - \frac{e}{c} \Phi_k \right) \pm i \frac{E_0}{c} \right)$$

miteinander multipliziert; sie lautet daher

$$(83) \quad 0 = D\psi \equiv D^+ \cdot D^-\psi.$$

a) Adjungierte Gleichung und Stromausdruck.

Die Strom- und Adjungiertdefinition für die Wellengleichungen $D^{\pm}\psi = 0$ ergibt sich aus der Gleichung

$$(84) \quad \bar{\psi} \cdot D^{\pm} \psi - \bar{\psi} \overline{D^{\pm}} \psi \equiv \text{Div } \bar{\psi} j^{\pm} \psi,$$

welche für willkürliche ψ und $\bar{\psi}$ gelten muß.

$j^{\pm}$ ist der Operator des Viererstroms, der allerdings durch (84), wie wir schon früher bemerkten, nur bis auf eine Div-freie additive Größe bestimmt ist. Aus (84) läßt sich die Kontinuitätsgleichung für $D^+ \cdot D^-$ sofort folgern:

$$\begin{aligned} \psi \cdot D^+ (D^- \psi) - \bar{\psi} \overline{D^+} \cdot (D^- \psi) &\equiv \text{Div } \bar{\psi} j^+ (D^- \psi) \\ (\bar{\psi} \overline{D^+}) D^- \psi - (\bar{\psi} \overline{D^+}) \overline{D^-} \psi &\equiv \text{Div } (\bar{\psi} \overline{D^+}) j^- \psi \end{aligned}$$

Addiert:

$$(85) \quad \psi (D^+ D^-) \psi - \bar{\psi} (\overline{D^+} \overline{D^-}) \psi \equiv \text{Div } \bar{\psi} (j^+ D^- + \overline{D^+} j^-) \psi.$$

Daher

$$(86) \quad \overline{D} \equiv \overline{D^+ D^-} = \overline{D^+} \cdot \overline{D^-}$$

und

$$(87) \quad j = j^+ D^- + D^+ j^-.$$

Aus j^+ und j^- bestimmt sich j vollständig, wenn man verlangt, daß $j = j^+$ für $\psi \bar{D}^+ = 0$ und $j = j^-$ für $D^- \psi = 0$.

Setzt man $D^\pm$ aus (82) ein und benützt $j_k^\pm = \gamma_k$, dann ergibt sich:

$$(88) \quad j_h = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial x_h} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_h} \right) - 2 \frac{e}{c} \Phi_h + \frac{\hbar}{i} \sum_l \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial x_l} + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_l} \right) \gamma_h \gamma_l.$$

Der zugehörige Stromausdruck hat die bekannte Gordonsche Form:¹

$$(89) \quad J_h = \bar{\psi} j_h \psi = \frac{\hbar}{i} (\bar{\psi} \text{grad } \psi - \text{grad } \bar{\psi} \cdot \psi) - \frac{2e}{c} \bar{\psi} \Phi_h \psi + \frac{\hbar}{i} \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} (\bar{\psi} \gamma_h \gamma_l \psi).$$

An sich wäre die Kontinuitätsgleichung auch befriedigt, wenn man das letzte Glied, den „Polarisationsstrom“, wegließe, da dieser Div-frei ist. Das Glied darf jedoch nicht fortgelassen werden, wenn man nicht die Übereinstimmung mit der Stromdefinition $J_h = \bar{\psi} \gamma_h \psi$ der linearen Dirac-Gleichung verlieren will. Daß diese Stromdefinition genau richtig ist, kann man aus der Eigenwertstörung durch ein elektromagnetisches Feld folgern.²

Der Ausdruck $\bar{D}$ nach (86) geht aus D nicht unmittelbar nach der für die lineare Dirac-Gleichung gültigen Adjungiert-Definition hervor; nach dieser Vorschrift müßte nämlich die Reihenfolge der Faktoren D^+ und $\bar{D}^-$ vertauscht sein. Nun ist aber $\bar{D}^+$ und $\bar{D}^-$ ebenso wie D^+ und D^- (zufällig) vertauschbar, so daß trotz allem $\bar{D}$ nach der alten Vorschrift zu D adjungiert ist; daher kann die für die lineare Dirac-Gleichung gültige Adjungiert-Definition auch für die Wellenfunktionen der iterierten Gleichung aufrecht erhalten werden. Dies ist keineswegs selbstverständlich; es liegt vielmehr an unserer speziellen Form der Dirac-Gleichung. Würden wir die Gleichung in der unsymmetrischen Diracschen Form

¹ W. Gordon, Z. f. Phys. 50, 630 (1928).

² Den Hinweis hierauf verdanke ich Herrn Dr. Scherzer.

$$D'^{\pm} = \sum_{k=1}^3 \alpha_k \left(p_k - \frac{e}{c} \Phi_k \right) \pm i \left(p_4 - \frac{e}{c} \Phi_4 \right) - \alpha_0 \cdot \frac{E_0}{c}$$

$$(\alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i = 2 \delta_{ik})$$

anschreiben, so müßte die Adjungiert-Definition beim Übergang zur iterierten Gleichung geändert werden, da D'^{+} und D'^{-} nicht vertauschbar sind.

b) Zurückführung auf Quaternionen.

Die iterierte Dirac-Gleichung lautet ausgeschrieben:

$$(90) \quad D\psi \equiv \left\{ -c \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathfrak{A} \right)^2 + (E - V)^2 - E_0^2 - \hbar e c [(\mathfrak{S}, i\gamma\tau) + (\mathfrak{E}, \gamma\gamma_4)] \right\} \psi = 0.$$

Die Koeffizienten gehören dem Bereich der Biquaternionen an, dessen Einheiten die geradzahlgigen Produkte von $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ sind. Dieser Zahlbereich ist zerfällbar (s. § 3). Die Gleichung $D\psi = 0$ zerfällt in die zwei unabhängigen Gleichungen:

$$(91) \quad D \frac{(1 + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4)}{2} \cdot \psi \frac{(1 + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4)}{2} = 0$$

$$D \frac{(1 - \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4)}{2} \cdot \psi \frac{(1 - \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4)}{2} = 0.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$(92) \quad 1^{\pm} = \frac{(1 - \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4)}{2}; \quad \sigma^{\pm} = -i\gamma\tau \cdot 1^{\pm}.$$

$\sigma^{\pm}$ sind Quaternionengrößen, für welche gilt

$$(93) \quad (a\sigma^{\pm})(b\sigma^{\pm}) = (ab) \cdot 1^{\pm} + i([ab]\sigma^{\pm}) \text{ und } (1^{\pm})^2 = 1^{\pm}.$$

Wegen $\gamma\gamma_4 \cdot 1^{\pm} = \pm i\sigma^{\pm}$ erhalten wir statt (90) zwei unabhängige Quaternionengleichungen für $\psi^{\pm} = \psi \cdot 1^{\pm}$:

$$(94) \quad \left\{ -c \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathfrak{A} \right)^2 + (E - V)^2 - E_0^2 + \hbar e c (\mathfrak{S} \pm i\mathfrak{E}, \sigma^{\pm}) \right\} \psi^{\pm} = 0.$$

Die beiden Gleichungen (94) sind wesentlich verschieden, sofern nicht $\mathfrak{E} = 0$ ist. Das Vorzeichen von i ist nämlich durch den Ansatz $\vec{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$ und $E = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}$ festgelegt. Auch im Falle $\mathfrak{E} = 0$ bleibt diese wesentliche Verschiedenheit bestehen, da die σ -Relationen (93) gegen einen Vorzeichenwechsel von σ nicht invariant sind. Daß im Falle $\mathfrak{E} = 0$ die beiden Gleichungen übereinstimmen, ist nicht erstaunlich, da ja dann bereits (90) eine Quaternionengleichung ist.

Die Gleichungen (94) leitete Kramers¹ direkt aus klassisch-mechanischen Überlegungen ab.

c) Reduktionsfragen.

Die Behandlung physikalischer Probleme unter Zugrundelegung der iterierten Dirac-Gleichung ist im Zahlkörper der Biquaternionen im Falle nicht verschwindender elektrischer Felder unmöglich, weil es in diesem Körper keine eindeutige Reduktion gibt. Der Eindeutigkeitsbeweis von § 4 scheitert im Biquaternionenkörper an der Nebenbedingung $C_2 N C_1 \neq 0$, die sich durch Wahl von c_1 und c_2 (s. das Ende von § 4) nicht immer erfüllen läßt. Es gibt zwei wesentlich verschiedene Reduktionen, denen die beiden Lösungssysteme (94) entsprechen. Diese Schwierigkeit läßt sich nur dadurch beseitigen, daß man den Körper durch Hinzufügen einer unabhängigen hyperkomplexen Größe zum vollen Dirac-Körper erweitert; in diesem ist die Reduktion eindeutig. Das bedeutet also, daß man bei der Anwendung der iterierten Dirac-Gleichung den ganzen Zahlkörper der linearen Gleichung nötig hat, wenngleich die Koeffizienten der Gleichung alle in einem Teilkörper enthalten sind.

Obwohl man bei der Lösung der iterierten Dirac-Gleichung nur in den Quaternionensystemen $\sigma^\pm$ zu rechnen hat (die Notwendigkeit, den ganzen Dirac-Körper zugrunde zu legen, ergibt sich erst bei der Reduktion der Lösungen, während man bei der rein mathematischen Auflösung der iterierten Gleichung natürlich mit den Biquaternionen auskommt), weiß ich nicht, ob die Benützung der Gleichungen (94) zur Aufstellung von Eigen-

¹ H. A. Kramers, Zeeman-Festschrift S. 403 (s'Gravenhage 1935).

funktionen des Elektrons von Vorteil ist. Bei der Berechnung der Eigenfunktionen des Elektrons im Zentralfeld geht man auf jeden Fall am einfachsten unmittelbar von der linearen Gleichung aus, wie wir dies in § 14 getan haben.

d) Zurückführung der Lösungen auf die Lösungen der beiden linearen Gleichungen.

Die allgemeinste Lösung der iterierten Dirac-Gleichung ist eine Linearkombination aus den Lösungen der beiden linearen Gleichungen. Das sieht man sehr leicht ein, wenn man die Gleichung

$$(95) \quad D^+ \cdot D^- \psi = 0$$

in zwei Schritten integriert. Wir können zunächst (95) auffassen als eine lineare Gleichung für die Funktion $(D^- \cdot \psi)$, und dürfen daher schreiben:

$$(96) \quad D^- \psi = \psi^+,$$

worin ψ^+ irgendeine Lösung der linearen Dirac-Gleichung

$$(97) \quad D^+ \psi^+ = 0$$

ist. (96) ist eine inhomogene Gleichung für ψ ; wegen $D^- \psi^+ = -2i \frac{E_0}{c} \psi^+$ (s. (82)) ergibt sich eine partikuläre Lösung von (96) zu $\psi = \frac{ic}{2E_0} \psi^+ \approx \psi^+$; die allgemeinste Lösung unterscheidet sich von der partikulären um ein Integral der homogenen Gleichung, d. h. $\psi = \psi^+ + \psi^-$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Hieraus folgt insbesondere, daß die iterierte Dirac-Gleichung keine anderen Energieniveaus liefert als die lineare. (Die „Neutronlösung“ des Keplerproblems, welche Temple¹ gab, ist nicht zulässig, da sie im o-Punkt eine Singularität aufweist, welche auch für verschwindende Singularität des Potentials ($\alpha Z \rightarrow 0$) bestehen bleibt.)

¹ G. Temple, Proc. Roy. Soc. London 145, 344 (1934).

Anhang.

Algebra der Clifford'schen Zahlen.

n Größen γ_h , welche der Gleichung

$$(1) \quad \gamma_i \gamma_h + \gamma_h \gamma_i = 2 \delta_{ih}$$

genügen und im übrigen unabhängig sind, erzeugen einen Zahlkörper, den wir seinem Entdecker Clifford¹ zu Ehren durch die Abkürzung C_n bezeichnen wollen. Die in C_n enthaltenen Zahlen haben die Gestalt

$$(2) \quad a_0 + \sum_i a_i \gamma_i + \sum_{i \neq h} a_{ih} \gamma_i \gamma_h + \cdots + a_{123 \dots n} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \cdots \gamma_n.$$

Die a -s sind gewöhnliche komplexe Zahlen, während die 0-, 1-, 2-, ... n -fachen Produkte verschiedener γ -s die Grundgrößen des Systems bilden. Die Anzahl der Grundgrößen ist 2^n ; denn es gibt $\binom{n}{r}$

Produkte von r verschiedenen γ -s, und es ist $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = (1+1)^n = 2^n$.

Noch einfacher sieht man durch Induktion ein, daß die Zahl der Grundgrößen 2^n ist; wenn man nämlich zu C_{n-1} noch die Größe γ_n hinzufügt, verdoppelt sich die Anzahl der Grundgrößen.

Zwischen den Zahlen des C_n ist Addition, Subtraktion und Multiplikation eindeutig definiert; die Rechenoperationen führen immer wieder auf Zahlen, welche C_n angehören. (Dies ist die Definition des durch die n γ -s „erzeugten“ Zahlkörpers.) C_n unterscheidet sich von dem Körper der gewöhnlichen komplexen Zahlen sehr wesentlich in zwei Punkten: erstens gilt das kommutative Gesetz der Multiplikation nicht, wie (1) zeigt. Zweitens besitzt nicht jede von 0 verschiedene Zahl ein Reziprokes. Die Zahlen ohne Reziprokes sind Nullteiler; unter diesen gibt es noch verschiedene Typen. Wir werden im folgenden zeigen, daß die in C_{2n} enthaltenen Zahlen $(2^n + 1)$ verschiedenen Typen angehören. Die Typen aufzufinden und zu charakterisieren soll die Aufgabe der folgenden drei Abschnitte sein.

¹ Clifford, Applications of Grassmanns extensive algebra, Am. Journal of Math., Bd. 1 (1878) S. 350. Clifford beweist, daß C_{2n} durch n kommutative Quaternionensysteme erzeugt wird.

a) Satz von Clifford über den Aufbau der C_{2n} aus Quaternionen. Isomorphie von C_{2n} mit den 2^n -reihigen Matrizen.

Wir beweisen zunächst den Cliffordschen Satz, daß C_{2n} durch n kommutative Quaternionenkörper erzeugt werden kann. Einen Quaternionenkörper kann man definieren als einen Zahlkörper, welcher durch zwei antikommutative Größen von komplexem Quadrat erzeugt wird. (Komplex soll heißen: nicht hyperkomplex.)

Den Cliffordschen Satz beweisen wir durch Induktion: C_2 ist mit dem Körper der Quaternionen offenbar identisch. C_{2n} entsteht aus $C_{2(n-1)}$ durch Hinzufügen der Größen: $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2(n-1)} \cdot \gamma_{2n-1}$ und $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2(n-1)} \cdot \gamma_{2n}$; diese beiden sind antikommutativ und von reellem Quadrat, erzeugen also einen Quaternionenkörper. Außerdem sind sie mit $C_{2(n-1)}$ vertauschbar. Damit ist der Cliffordsche Satz bewiesen.

Aus dem Cliffordschen Satz folgt unmittelbar als Verallgemeinerung, die auch durch Induktion sofort direkt zu beweisen ist: Eine Anzahl kommutativer Cliffordscher Körper $C_{n_i}^i$ erzeugt ein $C_{\sum_i n_i}$.

Es ist jetzt leicht, die Isomorphie¹ von C_{2n} mit dem Körper der 2^n -reihigen Matrizen zu beweisen. Die Addition und Multiplikation der Matrizen ist dabei in bekannter Weise zu definieren durch:

$$(3a) \quad (A_{ik})(B_{ih}) = (\sum_l A_{il} B_{lh})$$

$$(3b) \quad (A_{ih}) + (B_{ih}) = (A_{ih} + B_{ih}).$$

Die Isomorphie beweisen wir durch Induktion. Für $n = 1$ kann die Isomorphie hergestellt werden durch die Zuordnungen:

$$1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \gamma_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_1 \gamma_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

und deren Umkehrung:

¹ Unter Isomorphie verstehen wir die Möglichkeit einer ein-eindeutigen Zuordnung.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1 + \gamma_1}{2}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{\gamma_2 + \gamma_1 \gamma_2}{2}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{\gamma_2 - \gamma_1 \gamma_2}{2};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1 - \gamma_1}{2}.$$

Wir nehmen nun an, daß wir $C_{2(n-1)}$ durch 2^{n-1} -reihige Matrizen dargestellt haben; nach dem Cliffordschen Satz ist C_{2n} ein Quaternionenkörper mit Koeffizienten aus $C_{2(n-1)}$, wobei Koeffizienten und Grundgrößen vertauschbar sind. Da die Quaternionen durch zweireihige Matrizen eindeutig darstellbar sind, läßt sich C_{2n} darstellen durch zweireihige Matrizen, deren Elemente selbst dem $C_{2(n-1)}$ angehören, also nach Induktionsvoraussetzung durch 2^{n-1} -reihige Matrizen darstellbar sind; die Zahlen des C_{2n} sind daher den 2^n -reihigen Matrizen isomorph.

b) Zahlentypen des C_{2n} . Rang, Reduktionsvermögen.

Die grundlegendste Eigenschaft der Zahlen des Matrizenkörpers ist der Rang R . Er ist invariant gegen alle Automorphismen des Körpers. Nach dem vorigen Abschnitt ist nun C_{2n} isomorph zu dem Körper der 2^n -reihigen Matrizen. Daraus folgt, daß die Zahlen des C_{2n} eindeutig charakterisiert werden können durch den Rang derjenigen Matrizen, welche ihnen bei einer derartigen Isomorphie zugeordnet werden. (Daß dieser Rang wirklich unabhängig ist von der speziellen Matrizendarstellung des C_{2n} , ist ersichtlich; sonst wäre nämlich auf dem Umwege über C_{2n} eine Automorphie der Matrizen möglich, bei welcher zwei Matrizen von verschiedenem Rang einander zugeordnet würden.) Wir können daher die Zahlen des C_{2n} in $(2^n + 1)$ Typen einteilen, deren Rang gleich 0, 1, 2, 3, ... 2^n ist. In der angegebenen Form ist die Typeneinteilung aber für uns aus zwei Gründen nicht brauchbar: einmal wollen wir den Typus direkt durch sein algebraisches Verhalten kennzeichnen, und nicht indirekt durch eine komplizierte Isomorphie. Außerdem ist der Rang R offensichtlich nicht die gegebene Größe, um die Typen zu charakterisieren, da dieselbe Zahl verschiedene R zugeordnet erhält, wenn man sie als Angehörige verschiedener C_{2n} betrachtet. Z. B. hat die Zahl 1 in C_0 (= Körper der komplexen Zahlen) den Rang $R = 1$, in C_2 (= Quaternionen) $R = 2$, allgemein in C_{2n} den Rang $R = 2^n$.

Wir wollen jetzt die algebraische Bedeutung des Ranges R einer Zahl Γ feststellen. Es gilt für Matrizen und daher auch für C_{2n} : wenn

$$(4) \quad A = (X_{ih}) \equiv x_0 + \sum_i x_i \gamma_i + \sum_{i+h} x_{ih} \gamma_i \gamma_h + \dots + x_{12\dots 2n} \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2n}$$

die allgemeine, von 2^{2n} unabhängigen Parametern X_{ih} bzw. $x_0, x_1 \dots$ abhängige Zahl des Körpers ist, dann ist

$$(5) \quad \Gamma_1 \cdot A \cdot \Gamma_2 \text{ von } R_1 \cdot R_2 \text{ Parametern abhängig.}$$

Wenn hierin speziell Γ_1 bzw. Γ_2 den Rang 2^n besitzt, dann kann $\Gamma_1 A$ bzw. $A \Gamma_2$ durch A ersetzt werden und es folgt, daß

$$(6) \quad \Gamma A \text{ und } A \Gamma \text{ von } 2^n \cdot R \text{ Parametern abhängig}$$

ist. Das zeigt, daß ein rechter bzw. linker Faktor Γ die Zahl der unabhängigen Parameter vermindert, und zwar im Verhältnis $R \cdot 2^n : 2^{2n}$. Dieses Verhältnis nennen wir

$$(7) \quad \text{Reduktionsfaktor } r = \frac{R}{2^n}.$$

r ist ein typisches Kennzeichen jeder Cliffordschen Zahl Γ , es ist unabhängig davon, in welchen speziellen C_{2n} man Γ eingebettet denkt. Der Beweis für die letzte Behauptung fließt aus der Tatsache, daß $C_{2(n+m)}$ aus C_{2n} erzeugt werden kann durch Adjunktion von Größen, welche mit C_{2n} kommutativ sind. (Cliffordscher Satz.)

Im Hinblick auf die Isomorphie mit den Matrizen erscheinen die folgenden Sätze selbstverständlich:

1. Ein Reziprokes besitzen die Zahlen mit $r = 1$ und nur diese.
2. Zahlen mit $r < 1$ sind Nullteiler und besitzen daher kein Reziprokes.

(Alle Sätze über Matrizenprodukte, wie die eben angeführten und (5), (6), macht man sich leicht anschaulich, wenn man die 2^n -reihigen Matrizen als homogen-affine Transformationen des 2^n -dimensionalen Raumes auffaßt; eine Matrix vom Rang R bedeutet dann eine Abbildung auf einen Teilraum von der Dimension R . Den Satz 2 beweist man etwa durch die Überlegung, daß eine Abbildung auf einen Teilraum $R < 2^n$ (entsprechend $r < 1$)

und eine darauffolgende Projektion auf eine zu dem Teilraum senkrechte Gerade eine Abbildung des ganzen Raumes auf den Nullpunkt ergibt.)

In C_{2n} sind $(2^n + 1)$ Typen von Zahlen enthalten, nämlich die Null ($r = 0$), sodann $(2^n - 1)$ Typen von Nullteilern $\left(r = \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n} \dots, \frac{2^n-1}{2^n}\right)$ und schließlich die „nicht entarteten“ Zahlen ($r = 1$), welche eine Reziprokes besitzen.

Die Zahlen des C_{2n} mit $r = \frac{1}{2^n}$ haben im wesentlichen alle die Gestalt:

$$(8) \quad \Gamma = (1 + i\gamma_1\gamma_2)(1 + i\gamma_3\gamma_4) \cdots (1 + i\gamma_{2n-1}\gamma_{2n}) \left\{ r = \frac{1}{2^n} \right\}.$$

Statt $(i\gamma_1\gamma_2), (i\gamma_3\gamma_4) \cdots (i\gamma_{2n-1}\gamma_{2n})$ können auch irgend andere unabhängige kommutative Größen vom Quadrat 1 gesetzt werden.

Zahlen der anderen Typen gewinnt man durch Addition verschiedener kommutativer Nullteiler vom Typus $r = \frac{1}{2^v}$; z. B. besitzt

$$(9) \quad \Gamma = (1 + i\gamma_1\gamma_2) + (1 + i\gamma_3\gamma_4) + \cdots + (1 + i\gamma_{2n-1}\gamma_{2n})$$

den Reduktionsfaktor $r = \frac{2^n-1}{2^n}$.

c) Zahlentypen in C_0, C_2, C_4 .

Die Zahlentypen von C_0, C_2 und C_4 sind nach dem vorhergehenden leicht festzustellen.

C_0 ist der Körper der komplexen Zahlen; außer der Null ($r = 0$) enthält C_0 nur nicht entartete Zahlen ($r = 1$). Die allgemeine Zahl A des Bereichs ist einparametrig.

C_2 ist der Körper der Quaternionen. Neben der Null ($r = 0$) und den Zahlen $r = 1$ enthält C_2 einen Typus von Nullteilern $\left(r = \frac{1}{2}\right)$. Die allgemeine Zahl A des Bereichs enthält vier Parameter; durch einfache Reduktion mit einem Nullteiler wird die Parameterzahl auf zwei reduziert, durch beiderseitige Reduktion auf eins.

C_4 ist der Diracsche Zahlkörper. Hier gibt es neben der Null und den nicht entarteten Zahlen bereits drei Typen von Nullteilern $\left(r = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$. $r = \frac{1}{4}$ entsprechen Zahlen von der Form $(1 + i\gamma_1\gamma_2)(1 + i\gamma_3\gamma_4) = (1 + i\gamma_1\gamma_2)(1 - \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)$; die 16-komponentige allgemeine Zahl A wird durch diese Größen einseitig auf vier, beiderseitig auf eine Komponente reduziert. Zahlen vom Typus $r = \frac{1}{2}$ sind bereits in C_2 enthalten. Ein Beispiel für $r = \frac{3}{4}$ ist nach (9) $\Gamma = (1 + i\gamma_{12}) + (1 + i\gamma_{34})$. $A\Gamma$ und ΓA enthalten 12, $\Gamma A\Gamma$ enthält 9 Parameter.

d) Zerfällbarkeit¹ von C_{2n+1} .

Wir suchen allgemein nach solchen C_v , welche zerfällbar sind, d. h. in zwei Teilbereiche zerfallen ($C_v = C_v^{(1)} + C_v^{(2)}$), und zwar so, daß jede Zahl des ersten Bereichs mit jeder des zweiten multipliziert das Produkt Null ergibt. Wir suchen in bekannter Weise² nach den evtl. Einheiten der Teilsysteme $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, für welche also gilt: $e^{(i)} C_v^{(i)} = C_v^{(i)} \cdot e^{(i)} = C_v^{(i)}$, und außerdem $(e^{(1)})^2 = e^{(1)}$; $(e^{(2)})^2 = e^{(2)}$; $e^{(1)} e^{(2)} = 0$. Die $e^{(i)}$ müssen ersichtlich mit allen Zahlen von C_v vertauschbar sein.

Wir bestimmen zunächst diejenigen Zahlen von C_v , welche mit allen Zahlen aus C_v vertauschbar sind. Hierher gehören auf jeden Fall die komplexen Zahlen. Für $v = 2n + 1$ ist auch $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \dots \gamma_v$ mit allen γ -s und daher mit dem ganzen C_v vertauschbar. Man sieht nun leicht, daß es weitere allgemein vertauschbare Größen nicht gibt. Ein Produkt von γ -s, welches nicht alle γ -s enthält, ist nämlich immer antikommutativ mit wenigstens einem γ , entweder mit einem, welches in ihm enthalten ist, oder mit einem, welches nicht in ihm enthalten ist (je nachdem es eine gerade oder ungerade Anzahl γ -s als Faktoren enthält).

Aus dem Vorstehenden folgt sofort, daß sich die C_{2n} nicht zerfällen lassen; mit C_{2n} sind nämlich nur die γ -freien Zahlen vertauschbar, so daß nur solche als Einheiten in Frage kommen. Da γ -freie Zahlen aber keine Nullteiler sein können, läßt sich die Bedingung $e^{(1)} \cdot e^{(2)} = 0$ nicht erfüllen.

¹ Siehe Anm. 1 von S. 12.

² Siehe etwa Enz. d. math. Wissensch. I, 1, A, 4 (Study), S. 165 (1898).

In C_{2n+1} kommen als Einheiten in Frage Zahlen von der Gestalt: $a + b \cdot \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2n+1}$. Nullteiler sind hiervon die Zahlen: $a(1 \pm i^n \cdot \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2n+1})$. Unter diesen gibt es zwei Einheiten:

$$(10) \quad e^{\pm} = \frac{1 \pm i^n \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 \dots \gamma_{2n+1}}{2}.$$

Sie erfüllen die Bedingung $e^+ \cdot e^- = 0$ und sind zur Zerfällung von C_{2n+1} geeignet. Offensichtlich ist ja $e^+ + e^- = 1$, daher gilt für jede Größe Γ aus C_{2n+1} :

$$(11) \quad \Gamma = \Gamma e^+ + \Gamma \cdot e^- = \Gamma^+ + \Gamma^-$$

mit $\Gamma^{\pm} = \Gamma \cdot e^{\pm}$.

Die Größen Γ^+ und Γ^- bilden für sich geschlossene Zahlkörper. Jeder dieser Körper ist ein C_{2n} . Er läßt sich nämlich erzeugen durch $2n$ antikommutative Größen von (in bezug auf die Einheiten $e^{\pm}$) reellem Quadrat, etwa durch $\gamma_1 \cdot e^{\pm}$, $\gamma_2 \cdot e^{\pm}$, ..., $\gamma_{2n} \cdot e^{\pm}$. Durch diese läßt sich $\gamma_{2n+1} \cdot e^{\pm}$ ausdrücken, weil sich $\gamma_1 \cdot e^{\pm} \cdot \gamma_2 \cdot e^{\pm} \dots \gamma_{2n} \cdot e^{\pm} \cdot \gamma_{2n+1} \cdot e^{\pm}$ von $e^{\pm}$ nur um einen komplexen Faktor unterscheidet.

Wegen der Zerfällbarkeit läßt sich jede Gleichung in C_{2n+1} durch zwei unabhängige Gleichungen in C_{2n} ersetzen. Sei etwa gegeben die Gleichung

$$(12) \quad L \cdot \psi.$$

Wir fügen sowohl zu L wie ψ einen Faktor $1 = e^+ + e^-$ hinzu und erhalten:

$$(12a) \quad L\psi \equiv L(e^+ + e^-) \cdot \psi(e^+ + e^-) \equiv (L \cdot e^+) (\psi e^+) + (L e^-) \cdot (\psi e^-) \equiv L^+ \psi^+ + L^- \psi^-.$$

Wenn wir die Gleichung mit e^+ multiplizieren, fällt das zweite Glied fort, während das erste ungeändert bleibt; Analoges geschieht bei der Multiplikation mit e^- . Das ergibt die Gleichungen:

$$(12b) \quad L^+ \psi^+ = 0; \quad L^- \psi^- = 0.$$

Es wäre jetzt leicht, die Zahlen des C_{2n+1} nach ihrem Reduktionsvermögen in Typen einzuteilen. Aber abgesehen davon, daß sie wegen der Zerfällbarkeit von C_{2n+1} kein praktisches Interesse besitzt, wäre eine solche Einteilung auch gar nicht „ty-

pisch“; z. B. müßte man in C_3 den Zahlen $(1 + \gamma_1)$ und $(1 + i\gamma_1 \cdot \gamma_2 \gamma_3)$ verschiedene Typen zuschreiben ($(1 + \gamma_1) A (1 + \gamma_1)$ ist zweikomponentig, $(1 + i\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3) A (1 + i\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)$ vierkomponentig), obwohl sie offensichtlich algebraisch ganz gleichberechtigt sind.

Die Zerfällbarkeit von C_{2n+1} hängt wesentlich damit zusammen, daß man komplexe und nicht nur reelle Koeffizienten zuläßt. Wenn nur reelle Koeffizienten zugelassen werden, dann verändern sich die Eigenschaften der C_r sehr beträchtlich. Alle C_r sind „reell irreduzibel“. Außerdem sieht man leicht, daß C_{4n+3}^{reell} isomorph ist zu $C_{4n+2}^{\text{komplex}}$. ($\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{4n+3}$ ist die imaginäre Einheit des C_{4n+2}^{reell} .) Ebenso ist Q_{4n+2}^{reell} isomorph zu $Q_{4n+1}^{\text{komplex}}$ (über die Bedeutung von Q siehe e). C_{2n}^{reell} ist ein irreduzibler Bereich von komplizierterer Bauart. In C_{2n}^{reell} gibt es für $n > 1$ keine Zahlen vom Rang $R = 1$.

e) Quaternionen und Biquaternionen.

Aus C_n lassen sich in verschiedenster Weise vollständige Teilkörper ableiten. Der wichtigste Fall ist die von Clifford angegebene „ n -way geometric algebra“, für welche wir das Symbol Q_n gebrauchen wollen. Q_n besteht aus denjenigen Zahlen von C_n , welche nur geradzahlige γ -Produkte enthalten:

$$(13) \quad a_0 + \sum_{i \neq k} a_{ik} \gamma_i \gamma_k + \sum_{i, k, l, n} a_{iklm} \gamma_i \gamma_k \gamma_l \gamma_m + \dots$$

Ersichtlich ist Q_n und C_{n-1} isomorph; man kann ja Q_n erzeugt denken durch die $n - 1$ antikommutativen und sonst unabhängigen Größen $\gamma_1 \gamma_2, \gamma_1 \gamma_3, \gamma_1 \gamma_4 \dots \gamma_1 \gamma_n$. Trotzdem wollen wir die beiden Zeichen C_{n-1} und Q_n nebeneinander beibehalten, weil bei den praktischen Anwendungen die geometrische Bedeutung und damit die zu definierenden Transformationseigenschaften der beiden System durchaus verschieden sind. C_{n-1} denkt man erzeugt durch $n - 1$ gleichberechtigte Größen, zwischen denen außer Vertauschungsrelationen keine Beziehungen bestehen. Q_n dagegen hat man sich erzeugt zu denken durch $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$

gleichberechtigte Größen (die sämtlichen zweifachen Produkte von n γ -s), zwischen denen außer den Vertauschungsrelationen

noch $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Beziehungen bestehen. C_{n-1} ist verknüpft mit der Geometrie des $(n-1)$ -dimensionalen Raumes, Q_n dagegen mit der Geometrie des n -dimensionalen Raumes.

Q_2 sind die Gaußschen komplexen Zahlen, sofern man in C_2 nur reelle Koeffizienten zuläßt.

Q_3 ist der Körper der Quaternionen, nicht nur hinsichtlich der rein algebraischen Eigenschaften wie C_2 , sondern auch hinsichtlich der Symmetrie in der Auffassung der Grundgrößen.

Q_4 wird von Clifford als Bereich der „Biquaternionen“ bezeichnet. Er entspricht den Drehungen im vierdimensionalen Raum und bildet den Zahlkörper der iterierten Dirac-Gleichung. Da er zu C_3 isomorph ist, läßt er sich wie dieser zerfallen.

f) Isotropie der Cliffordschen Zahlbereiche C_n .

Die durch eine orthogonale Transformation

$$(14) \quad \gamma'_i = a_{ik} \gamma_k \quad \text{mit} \quad \sum_i a_{ik} a_{il} = \delta_{kl}$$

aus den γ_k entstehenden Größen γ'_i genügen denselben Relationen wie die γ_k , nämlich

$$(15) \quad \gamma'_i \gamma'_h + \gamma'_h \gamma'_i = \delta_{ih}.$$

Diese Invarianz der Bedingungsgleichungen gegen orthogonale Transformationen ist wohl die für die Anwendungen wichtigste Eigenschaft der Cliffordschen Zahlen. Sie gestattet es, die n γ_k einem n -dimensionalen Koordinatenraum in isotroper Weise zuzuordnen. Wenn man nämlich γ_k der x_k -Achse zuordnet, so sind die Koordinatenachsen damit keineswegs ausgezeichnet, es kann vielmehr jeder beliebigen Richtung mit dem Einheitsvektor $\mathbf{e}$ in vollkommen isotroper Weise $(\gamma \mathbf{e}) = \sum_h \mathbf{e}_h \gamma_h$ zugeordnet werden. Man kann sich daher den Cliffordschen Zahlbereich C_n erzeugt denken durch einen symbolischen n -Vektor γ , der in einer Richtung $\mathbf{e}$ die Komponente $(\gamma \mathbf{e})$ besitzt, dessen Komponenten sich daher wie Vektorkomponenten transformieren (während ihm selbst eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung zukommt).