Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1935. Heft II

Mai-Juli-Sitzung

München 1935

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über eine Verallgemeinerung der Vorzeichenregeln von Descartes und Fourier-Budan.

Von Heinrich Tietze in München.

Vorgelegt in der Sitzung vom 1. Juni 1935.

Die bekannte Vorzeichenregel von Descartes für die reellen Nullstellen eines Polynoms $f(x)$ mit reellen Koeffizienten besagt[1], daß, wenn $f(a) \neq 0$ ist, die Anzahl $N = N_a$ der (mit ihrer Vielfachheit gezählten) Nullstellen $> a$ nicht größer ist als die Anzahl $W = W_a$ der Zeichenwechsel in der Folge $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a), \ldots$ und daß $W - N$ eine gerade Zahl ist[2]. Ist ferner $b > a$, $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$, so besagt die Fourier-Budansche Regel[3],

[1] Die Regel wird gewöhnlich für $a = 0$ ausgesprochen, wo W die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge der Koeffizienten von $f(x) = \sum c_\nu x^\nu$ wird. Die Zählung der Zeichenwechsel einer Zahlenfolge ist stets so zu verstehen, wie sie sich nach Weglassen aller Nullen unter den Zahlen der Folge ergibt.

[2] Bei Descartes, La Géométrie (1649), livre III (im Abschnitt: „Combien il peut y avoir de vraies racines dans chaque équation") findet sich nur die auf $W \geqq N$ bezügliche Aussage; die Tatsache, daß $W - N$ gerade ist, scheint sich zuerst bei Fourier, 1820 (l. c.[4]) zu finden (hierbei die Descartessche Regel als Spezialfall der Fourierschen aufgefaßt); jedenfalls findet sie sich — entgegen einem Zitat in der Encykl. d. math. Wiss., Bd. I, Teil 1, S. 410, Anm. 6 — nicht in der dort angeführten Arbeit von Gauß, Crelle's Journal, Bd. 3 (1828) = Werke, Bd. 3, S. 67—70, wo vielmehr — im Anschluß an einen Beweis der Descartesschen Regel — Geradheit oder Ungeradheit der Anzahl aufeinanderfolgender verschwindender Koeffizienten für die Abschätzung von Wurzelanzahlen herangezogen wird.

[3] Wie man diese Regel vielfach (wozu auch eine Bemerkung von Arago beitrug) mit dem Namen von Budan de Bois-Laurent verknüpfte, ehe sie (mit größerem Recht) nach Fourier benannt oder mitbenannt wurde, so wurde die Descartessche Regel vormals als Harriotsche bezeichnet (vgl. etwa Anm. 7). Die Bemerkung Aragos findet sich in seiner Gedächtnisrede auf Fourier: Oeuvres complètes de F. Arago, t. I (Paris-Leipzig, 1854), p. 304; deutsche Ausgabe von Aragos Werken, herausgegeben von W. G. Hankel, Bd. 1, Leipzig bei O. Wigand (1854), S. 242. Der richtigen Würdigung Fouriers widmet in dessen Oeuvres, Bd. 2 (erschienen 1890), p. 310–314, G. Darboux als Herausgeber eine ausführliche Besprechung.

daß die Anzahl $N_{a,b}$ der zwischen a und b gelegenen Nullstellen von $f(x)$ nicht größer als $W_a - W_b$ und daß $W_a - W_b - N_{a,b}$ gerade ist. Der folgende wesentlich auf dem Satz von Rolle beruhende Beweis dieser Regeln (Nr. **1**—**12**) ist nicht auf Polynome beschränkt, sondern umfaßt beliebige reelle, an allen Stellen $x \geqq a$ bzw. $a \leqq x \leqq b$ analytische Funktionen, insbesondere also alle durch eine relle, beständig konvergente Potenzreihe darstellbaren[4].

Dabei können die vorgenannten — der üblichen Formulierung der Regeln entsprechenden — Voraussetzungen $f(a) \neq 0$ bzw. $f(a) \neq 0, f(b) \neq 0$ ersetzt werden durch die Voraussetzung, daß $f(x)$ nicht identisch verschwindet. Die Regeln bleiben dann richtig, wenn in der ersten Aussage N_a wiederum die Anzahl der Nullstellen aus $x > a$ bedeutet, in der zweiten Aussage $N_{a,b}$ die Anzahl der Nullstellen aus $a < x \leqq b$.

Auf dem Satz von Rolle[5] beruht übrigens auch der elegante

---

[4] An eine Ausdehnung der Fourier-Budanschen Regel auf andere Funktionen als Polynome denkt anscheinend schon G. Darboux, l. c.[3], wenn er in seiner Note, p. 312, sagt: „La démonstration de Budan, bien inférieure à celle de Fourier, est purement algèbrique et ne s'applique pas aux équations transcendantes". Doch hat Fourier in der bezüglichen Abhandlung (1820) nur Polynome im Auge (er läßt die Folge der Ableitungen ausdrücklich mit der m-ten abbrechen, wo m der Grad ist). Wegen Ausdehnung der Untersuchungen, die zum Fragenkreis der Regeln von Descartes und Fourier gehören, auf andere Funktionen als Polynome, sei auch auf Pólya-Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. II (1925), Abschnitt V, Kap. 1, hingewiesen. (Vgl. auch Nr. **16** [Zusatz bei der Korrektur]).

[5] Als „Satz von Rolle" bezeichnen wir dabei den allgemein so bezeichneten Satz der Differentialrechnung.

Demgegenüber behandelt Michel Rolle selbst (Traité d'Algèbre, 1690) ausdrücklich nur Polynome $f(x)$ und stellt zwecks Trennung der Nullstellen von $f(x)$ (ohne Beweis) den Satz auf, daß zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von $f'(x)$ höchstens eine Nullstelle von $f(x)$ liegt (l. c., p. 128). Dabei werden die Ableitungen eines Polynoms rein formal eingeführt; ja es konnte — im Hinblick auf Rolles Stellungnahme gegen den Leibnizschen Differential-Calcul — Fourier in der Einleitung zur „Analyse des équations déterminées" (1831) die Bemerkung nicht unterdrücken, daß Rolles Regel nichts anderes sei als eine sehr einfache Anwendung der Differentialrechnung, deren Prinzipien Rolle für wahr anzuerkennen sich weigerte (vgl. die von A. Loewy 1902 herausgegebene deutsche Übersetzung der „Analyse ...", Ostwalds Klass., Nr. 127, S. 8). Man mag es somit wohl als selt-

Beweis, den Laguerre[6] für die Descartessche Vorzeichenregel gegeben hat[7] und der über diese Regel hinaus eine (auf gewisse verallgemeinerte Laurentsche Reihen bezügliche) allgemeinere Vorzeichenregel liefert. Diese Laguerresche Regel umfaßt den obenerwähnten Fall der Funktionen, die durch eine beständig konvergente Potenzreihe darstellbar sind (nicht aber den Fall

---

sam empfinden, daß Rolles Name nun gerade mit einem Satz der Differentialrechnung verbunden erscheint. Im übrigen wird man heute mehr als vor hundert Jahren Rolles Ablehnung der „suite de quantitez incomparablement plus petites les unes que les autres" in der Begründung der Infinitesimal-Analysis beipflichten (s. Remarques de M. Rolle touchant le Problesme general des Tangentes, pour servir de replique etc., 1703). (Daß sich in Rolle's Traité d'Algebre, p. 268, auch kritische Äußerungen über die Zeichenregel von Descartes finden, mag noch als Kuriosum erwähnt werden.)

Für den fraglichen Satz über Polynome ist wohl auch in Rolles — mir nicht zugänglicher — „Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalitez", Paris 1691, kein Beweis enthalten (vgl. insbesondere: Encyclopédie des Sciences mathématiques, t. II., vol. 1, Art. II 3, Voß-Molk p. 268, 269).

Während der „Satz von Rolle" im heute üblichen Sinn nur einmalige Differenzierbarkeit voraussetzt, so daß der Begriff der Vielfachheit einer Nullstelle keine Bedeutung hat, beziehen sich gewisse feinere, die Vielfachheit der Nullstellen von $f'(x)$ berücksichtigende Aussagen auf speziellere Funktionsklassen (vgl. Nr. **6**, insbesondere den vor allem für Polynome geläufigen Satz (H_1)).

[6] Laguerre, Journal de Math., 3. sér., t. 9 (1883) = Oeuvres, t. I (1898), p. 3–5.

[7] Beim Blättern in alter Literatur — für das neben dem unten genannten Rungeschen Encyklopädie-Artikel noch M. Cantors Vorlesungen über Geschichte der Mathematik als Leitfaden dienten — fand sich auch in der seinem Gönner „Godofredo Heinsio" gewidmeten Schrift von Abraham Gotthelf Kästner, „Demonstratio theorematis Harrioti", 1745, ein Beweisversuch für die Descartes(-Harriot)sche Vorzeichenregel, der — mit der Kurve $y = f(x)$ und ihrer „curua differentialis" $y = f'(x)$ arbeitend — Überlegungen benützt, für deren exakte Durchführung (an Stelle der unstrengen anschaulichen Betrachtungen) der Rollesche Satz die geeignete Grundlage böte. Dabei wird ein Induktionsschluß bezüglich des Grades der Gleichung vorgenommen, von der übrigens von vornherein vorausgesetzt wird, daß sie lauter reelle Wurzeln habe. Auch werden höhere Vielfachheiten von Wurzeln nicht berücksichtigt.

Ähnlichen Charakter zeigen die zum Beweis der Descartesschen Regel angestellten Überlegungen von de Gua, Recherche du nombre des racines réelles ou imaginaires, Histoire de l'Académie Royale des sciences, 1741 (Paris 1744), p. 458–494.

beliebiger in $x \geqq a$ bezw. $a \leqq x \leqq b$ analytischer Funktionen). Wir kommen noch in Nr. **13–15**, unter Verschärfung einer Bemerkung im einschlägigen Encyklopädie-Artikel[8], auf die Laguerresche Vorzeichenregel zurück.

Der leichteren Lesbarkeit wegen ist in den folgenden Zeilen manches vielleicht, statt knapper, eher ein wenig breiter als in einer rein mathematischen Zeitschrift auseinandergesetzt, wie ja auch die mündliche Mitteilung bestrebt war, dem mehrfach vertretenen Wunsche möglichst weitgehender Verständlichkeit nachzukommen. Gewisse Grenzen ziehen sich da gleichwohl von selbst.

1. Die Nullstellen einer reellen analytischen Funktion auf einer offenen Halbgeraden. Wir beginnen mit der Descartesschen Regel. Was zu beweisen ist, sind dann die folgenden Sätze I und Ia.

Satz I. Es sei $f(x)$ eine nicht identisch verschwindende reelle für alle $x \geqq a$ analytische Funktion; die Folge

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots, \tag{1}$$

die also nicht aus lauter Nullen besteht[9], enthalte eine endliche Anzahl $W = W_a$ von Zeichenwechseln und es sei $N = N_a$ die Anzahl der (mit ihrer Vielfachheit[10] gezählten) Nullstellen $> a$ von $f(x)$. Dann ist $N \leqq W$.

Satz Ia. Dabei ist $W - N$ eine gerade Zahl.

Wir trennen hierbei die beiden Behauptungen $W \geqq N$ und $W - N =$ gerade Zahl, weil, wie sich herausstellen wird, beim Beweis der letzteren gewisse Verfeinerungen des Rolleschen Satzes benötigt werden, während $W \geqq N$ mit dem einfachen Rolleschen Satz zu erledigen ist.

---

[8] Encykl. d. math. Wiss., Bd. I, Teil 1, Artikel I B 3 (Runge).

[9] Ob die erste von Null verschiedene Zahl in (1) bereits $f(a)$ selbst ist, wie bei Formulierung der Regel gewöhnlich vorausgesetzt wird, oder nicht, ist nicht von Belang; vgl. die Einleitung.

[10] Die Vielfachheit $p\ (\geqq 1)$ einer Nullstelle ξ ist dabei wie üblich durch $f^{(\nu)}(\xi) = 0\ (0 \leqq \nu \leqq p-1)$, $f^{(p)}(\xi) \neq 0$ erklärt.

2. Beim Beweis von Satz I und Ia beginnen wir mit dem trivialen Fall $W = 0$. Sei $f^{(\varkappa)}(a)$ die erste von Null verschiedene Zahl der Folge (1) ($\varkappa \geqq 0$); dabei sei etwa $f^{(\varkappa)}(a) > 0$ und somit jedes $f^{(\nu)}(a) \geqq 0$ (der Fall $f^{(\varkappa)}(a) < 0$ wird erledigt, indem man $f(x)$ durch $-f(x)$ ersetzt). In dem besonders einfachen — speziell auch bei einem Polynom vorliegenden — Fall, daß $f(x)$ durch eine für alle x konvergente Potenzreihe $\sum_{\varrho=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$ darstellbar ist, gilt dann $f(x) = \sum_{\nu=\varkappa}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!} (x-a)^\nu > 0$ für $x > a$, somit $N = 0$ entsprechend der Behauptung. Liegt dieser Fall nicht vor, so gibt es Potenzreihenentwicklungen

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(a_i)}{\nu!} (x-a_i)^\nu \text{ gültig für } a_i - r_i < x < a_i + r_i$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots)$$

mit $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$, $\lim_{i\to\infty} a_i = +\infty$, $a_{i+1} < a_i + r_i$, nebst den daraus folgenden Entwicklungen für $f'(x), f''(x), \ldots$, aus denen (durch vollständige Induktion von i auf $i+1$) auf $f(a_i) > 0$ (für $i \geqq 1$), $f^{(\nu)}(a_i) \geqq 0$ und damit wieder auf $f(x) > 0$ für alle $x > a$ geschlossen werden kann[11].

3. Um nun den Fall $W > 0$ auf den Fall $W = 0$ zurückzuführen, beachten wir, daß wegen der Endlichkeit von W in der Folge (1) eine Zahl $f^{(\lambda)}(a) \neq 0$ existieren muß, so daß jede der späteren Zahlen gleiches Vorzeichen mit $f^{(\lambda)}(a)$ hat oder Null

[11] Von einer in einem Bereich $x \geqq c$ definierten Funktion $\varphi(x)$ wollen wir im folgenden kurz sagen, $\varphi(x)$ habe die Eigenschaft (E), wenn es ein $c' \geqq c$ gibt, so daß $|\varphi(x)|$ für $x \geqq c'$ monoton-nicht-abnehmend und $\neq 0$ ist, anders gesagt, wenn $\varphi(c') \neq 0$ und $\varphi(c') \cdot (\varphi(x'') - \varphi(x')) \geqq 0$ ist für alle $c' \leqq x' < x''$. Man bestätigt leicht die

Bemerkung: Ist $\varphi(x)$ eine in $x \geqq c$ definierte und differenzierbare Funktion und hat $\varphi'(x)$ die Eigenschaft (E), so auch $\varphi(x)$.

Die Ausführungen im Text zeigen, daß $f(x)$ im Falle $W = 0$ die Eigenschaft (E) hat.

ist. Für die Funktion $f^{(\lambda)}(x)$ an Stelle von $f(x)$ liegt dann der eben erledigte Fall $W = 0$ vor[12]. Um die Sätze I, Ia allgemein zu beweisen, genügt es somit zu zeigen, daß aus ihrer Gültigkeit für $f(x) = g'(x)$ auf ihre Gültigkeit für $f(x) = g(x)$ geschlossen werden kann.

4. Der Beweis der Sätze I, Ia wird also erbracht sein, sobald folgende Sätze bewiesen sind:

Satz II. Sei $g(x)$ eine nicht-konstante reelle für alle $x \geqq a$ analytische Funktion[13]; sei $g^{(\nu)}(a) = 0$ für $0 < \nu < k + 1$, $g^{(k+1)}(a) \neq 0$ $(k \geqq 0)$; es sei $W = W_a$ die (endliche) Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge $g(a), g'(a), g''(a), \ldots$ und $W' = W'_a$ die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge $g'(a), g''(a), \ldots$ (d. h. in der Folge $g^{(k+1)}(a), g^{(k+2)}(a), \ldots$); sei $N = N_a$ die Anzahl der (mit ihrer Vielfachheit gezählten) Nullstellen $> a$ von $g(x)$, $N' = N'_a$ die entsprechende Anzahl für $g'(x)$; es sei N' endlich. Dann ist auch N endlich und $W - N \geqq W' - N'$ (also $N \leqq W$, wenn $N' \leqq W'$).

Satz IIa. Dabei ist $\Delta = (W - N) - (W' - N')$ eine gerade Zahl (also $W - N$ gerade, wenn $W' - N'$ gerade ist).

5. Um Satz II (vorerst noch ohne IIa) zu beweisen, ist im wesentlichen nur der Satz von Rolle nötig. Aus ihm folgt zunächst, daß N endlich sein muß, da bei unendlichem N auch N' unendlich sein müßte gegen die Voraussetzung. Seien nun[14] $x_1, \ldots, x_m$ die verschiedenen unter den Nullstellen $> a$ von $g(x)$ (wo $a < x_1 < \ldots < x_m$) und $h_1, \ldots, h_m$ ihre Vielfachheiten, also $N = h_1 + \ldots + h_m$. Es liegt dann nach dem Rolleschen Satz (falls $m > 1$) in jedem der $m - 1$ Intervalle $x_\mu < x < x_{\mu+1}$ $(1 \leqq \mu \leqq m - 1)$ wenigstens eine Nullstelle von $g'(x)$ und außer-

---

[12] Es hat also $f^{(\lambda)}(x)$ und daher auch $f(x)$ die Eigenschaft (E) (vgl. die Bemerkung in Anm. 11).

[13] Im Hinblick auf Satz I beschränken wir uns hier auf analytische Funktionen $g(x)$, doch sind die Sätze II und IIa auch für etwas allgemeinere Funktionen gültig; wir kommen in Nr. **12** darauf zurück.

[14] Dabei können wir $m \geqq 1$ annehmen, da im Falle $m = 0$, $N = 0$, $\Delta = N' + W - W'$ die Behauptung $\Delta \geqq 0$ wegen $N' \geqq 0$, $W - W' \geqq 0$ trivial ist.

dem ist jede der Stellen x_μ eine $(h_\mu - 1)$-fache Nullstelle von $g'(x)$. Bedeutet nun (im Einklang mit später eingeführten Bezeichnungen) Z'_0 die Anzahl der Nullstellen von $g'(x)$ im Intervall $a < x < x_1$, so ergibt sich[14a]

$$N' \geqq Z'_0 + (m-1) + \sum_{\mu=1}^{m} (h_\mu - 1) = Z'_0 + N - 1$$

$$\Delta = N' - N + W - W' \geqq Z'_0 - 1 + W - W'.$$

Was nun Z'_0 anlangt, so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

α) $W = W'$, was soviel bedeutet wie $g(a)\, g^{(k+1)}(a) \geqq 0$. Sei etwa $g(a) \geqq 0$, was wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen können (vgl. eine Bemerkung zu Beginn von Nr. **2**). Falls nun $g(a) = 0$ ist, so ist nach dem Rolleschen Satz $Z'_0 \geqq 1$; falls aber $g(a) > 0$ ist, wächst wegen $g^{(k+1)}(a) > 0$ die Funktion $g(x)$ in der Nähe von a (rechts von a): es gibt ein ξ_1, so daß $a < \xi_1 < x_1$, $g(a) < g(\xi_1)$, somit ein ξ_2, so daß $\xi_1 < \xi_2 < x_1$, $g(\xi_2) = g(a)$, somit nach dem Rolleschen Satz ein ξ, so daß $a < \xi < \xi_2$, $g'(\xi) = 0$, und es ist wieder $Z'_0 \geqq 1$. Allemal ist also $\Delta = N' - N \geqq Z'_0 - 1 \geqq 0$, wie behauptet.

β) $W = W' + 1$, was soviel bedeutet wie $g(a) g^{(k+1)}(a) < 0$. Aus $\Delta \geqq Z'_0 - 1 + W - W' = Z'_0$ folgt wieder $\Delta \geqq 0$.

Damit ist in allen Fällen $\Delta \geqq 0$ oder $W - N \geqq W' - N'$ und somit Satz II bewiesen.

6. Um auch Satz IIa zu beweisen (in Nr. **7**), schicken wir einen Hilfssatz (H) voraus, der nichts anderes ist als eine — bei derartigen Betrachtungen geläufige — auf gewisse unbeschränkt differenzierbare Funktionen bezügliche Verfeinerung des Satzes von Rolle. Dabei wollen wir von einer Funktion $\varphi(x)$ sagen, sie erfülle im Intervall $\beta \leqq x \leqq \gamma$ [bzw. im Bereich $x \geqq \beta$] die

Voraussetzungen (V), wenn gilt: $\varphi(x)$ ist in $\beta \leqq x \leqq \gamma$ [bzw. in $x \geqq \beta$] stetig, in $\beta < x < \gamma$ [bzw. in $x > \beta$] unbeschränkt

[14a] Die erste dieser Ungleichungen umfaßt die schwächere Aussage: $N' \geqq N - 1$.

differenzierbar; in $\beta < x < \gamma$ [bzw. in $x > \beta$] habe $\varphi'(x)$ nur endlich viele Nullstellen von endlicher Vielfachheit.

Erfüllt $\varphi(x)$ im abgeschlossenen Intervall $\beta \leqq x \leqq \gamma$ die Voraussetzungen (V), so zerfällt der Bereich $\beta \leqq x \leqq \gamma$ in endlich viele Teilintervalle $t_{i-1} \leqq x \leqq t_i$ ($1 \leqq i \leqq n$; $t_0 = \beta$, $t_n = \gamma$) derart, daß $\varphi(x)$ in jedem dieser Teilintervalle monoton — und zwar abwechselnd monoton-wachsend und monoton-abnehmend — ist. Dann liegt an jeder Stelle t_i ($1 \leqq i \leqq n - 1$) ein Extremum von $\varphi(x)$ vor und es ist t_i eine Nullstelle ungerader Ordnung o_i von $\varphi'(x)$, während alle sonstigen zwischen β und γ liegenden Nullstellen von $\varphi'(x)$ im Inneren obiger Teilintervalle liegen und — Wendepunkten von $y = \varphi(x)$ entsprechend — von gerader Ordnung sind. Die Summe der Ordnungen aller zwischen β und γ gelegenen Nullstellen von $\varphi'(x)$ unterscheidet sich daher von $\sum_{i=1}^{n-1} o_i$ und daher von $n - 1$ um eine gerade Zahl. Nun ändert sich $\varphi(x)$ im Intervall $t_{n-1} \leqq x \leqq t_n$ im entgegengesetzten oder im gleichen Sinn wie im Intervall $t_0 \leqq x \leqq t_1$, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Daher gilt:

(H) Erfüllt $\varphi(x)$ in $\beta \leqq x \leqq \gamma$ die Voraussetzungen (V), dann ist die Anzahl der zwischen β und γ liegenden (mit ihrer Vielfachheit gezählten) Nullstellen von $\varphi'(x)$ ungerade oder gerade, je nachdem $\varphi(x)$ in der Nähe von γ (links von γ) sich im entgegengesetzten oder im gleichen Sinn ändert wie in der Nähe von β (rechts von β).

Gewisse spezielle Fälle von (H) finden im folgenden besonders Verwendung:

(H_1) Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen β, γ (oder überhaupt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stellen gleichen Funktionswertes) einer in $\beta \leqq x \leqq \gamma$ die Voraussetzungen (V) erfüllenden Funktion $\varphi(x)$ liegt eine ungerade Anzahl von (mit ihrer Vielfachheit gezählten) Nullstellen von $\varphi'(x)$.

(H_2) Erfüllt $\varphi(x)$ in $\beta \leqq x \leqq \gamma$ die Voraussetzungen (V), ist $\varphi(\gamma) = 0$, $\varphi(x) \neq 0$ für $\beta \leqq x < \gamma$, dann ist die Anzahl der zwischen β und γ liegenden (mit ihrer Vielfachheit gezählten) Nullstellen von $\varphi'(x)$ ungerade oder gerade, je nachdem $|\varphi(x)|$ in der Nähe von β (rechts von β) wächst oder abnimmt.

Endlich benötigen wir noch den Hilfssatz

(H_3) Erfüllt $\varphi(x)$ in $x \geqq \beta$ die Voraussetzungen (V), ist $\varphi(x) \neq 0$ für $x > \beta$ und hat $\varphi(x)$ die Eigenschaft (E) (vgl. Anm. 11), dann ist die Anzahl der (mit ihrer Vielfachheit gezählten) Nullstellen $> \beta$ von $\varphi'(x)$ gerade oder ungerade, je nachdem $|\varphi(x)|$ in der Nähe von β wächst oder abnimmt[15].

Dieser Satz (H_3) ist sofort auf (H) zurückführbar. Man braucht in der Tat die Zahlen $\tau > \beta$ und $\gamma > \tau$ nur so zu wählen, daß $|\varphi(x)|$ für $x \geqq \tau$ monoton wächst und $\varphi'(x)$ in $x \geqq \gamma$ keine Nullstelle hat. (H_3) folgt dann durch Anwendung von (H) auf das Intervall $\beta \leqq x \leqq \gamma$.

Zum Schluß mag noch darauf hingewiesen werden, daß die zur Begründung von (H) angestellten Überlegungen über abwechselndes Wachsen und Abnehmen einer Funktion $\varphi(x)$ ihrerseits — bei eingehenderer Durchführung — bekanntlich auf dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, also auf dem einfachen (unverfeinerten) Satz von Rolle fußen.

7. Beim Beweis von Satz II a[16] wird zu beachten sein, daß — der Endlichkeit von W zufolge — unsere Funktion $g(x)$ die Eigenschaft (E) hat (vgl. Nr. **3,** Anm. 12). Es mögen $x_1, \ldots, x_m, h_1, \ldots, h_m$ dieselbe Bedeutung haben wie in Nr. **5.** Die Anzahl der (mit ihrer Vielfachheit gezählten) Nullstellen von $g'(x)$ im Bereich $x > x_m$ werde mit Z'_m bezeichnet, und die entsprechende Bedeutung möge Z'_μ für den Bereich $x_\mu < x < x_{\mu+1}$ haben ($0 \leqq \mu < m$; hierbei $a = x_0$ gesetzt). Dann ist

---

[15] Wir werden die Hilfssätze (H) bis (H_3) zunächst (in Nr. **7** und **11**) nur für analytische Funktionen $\varphi(x)$ benötigen (für welche die Voraussetzungen (V), sofern es sich um ein Intervall $\beta \leqq x \leqq \gamma$ handelt, von vorneherein erfüllt sind), kommen aber in Nr. **12** auf die Hilfssätze in der Fassung des Textes zurück.

[16] Der folgende Beweis liefert zugleich mit: $\Delta = N' - N + W - W' =$ gerade Zahl, auch noch: $\Delta \geqq 0$, so daß Satz II nochmals mitbewiesen wird.

$$N' = \sum_{\mu=1}^{m} (h_\mu - 1) + \sum_{\mu=0}^{m} Z'_\mu = N - m + \sum_{\mu=0}^{m} Z'_\mu,$$

$$\Delta = N' - N + W - W' = W - W' + \sum_{\mu=0}^{m-1} (Z'_\mu - 1) + Z'_m$$

(wobei die Summe $\sum\limits_{\mu=1}^{m}$ bzw. $\sum\limits_{\mu=0}^{m-1}$ im Falle $m = 0$ entfällt). Wir unterscheiden im folgenden die Fälle

$$\text{A)}\ m = 0, \quad \text{B)}\ m \geqq 1$$

und in jedem dieser Fälle die Unterfälle α) $W - W' = 0$, β) $W - W' = 1$.

Im Falle A) ist $\Delta = W - W' + Z'_0$, wo jetzt $Z'_0 = N'$ die Anzahl aller Nullstellen $> a$ von $g'(x)$ ist; nun ist diese Anzahl — dem Hilfssatz (H_3) gemäß — gerade oder ungerade, je nachdem $|g(x)|$ in der Nähe von a (rechts von a) wächst oder abnimmt, d. h. je nachdem $g(a)g^{(h+1)}(a) \geq 0$ oder < 0 ist; d. h. im Falle α) $W - W' = 0$ ist Z'_0 gerade ($\geqq 0$), im Falle β) $W - W' = 1$ hingegen ungerade ($\geqq 1$); in beiden Fällen ist also Δ gerade ($\geqq 0$), wie behauptet.

Im Falle B) ist

$$\Delta = (W - W' + Z'_0 - 1) + \sum_{\mu=1}^{m-1} (Z'_\mu - 1) + Z'_m$$

(wobei die Summe $\sum\limits_{\mu=1}^{m-1}$ für $m = 1$ entfällt). Daß hierin der letzte Summand Z'_m gerade ($\geqq 0$) ist, folgt genau so wie im Falle A α) für Z'_0. Ferner ist (für $m \geqq 2$) jeder Summand $Z'_\mu - 1$ gemäß Hilfssatz (H_1) eine gerade Zahl ($\geqq 0$). Endlich ist dem Hilfssatz (H_2) gemäß Z'_0 ungerade oder gerade, je nachdem $|g(x)|$ in der Nähe von a wächst oder abnimmt; d. h. im Falle α) $W - W' = 0$ ist Z'_0 ungerade ($\geqq 1$), im Falle β) $W - W' = 1$ hingegen gerade ($\geqq 0$), allemal also $W - W' + Z'_0 - 1$ gerade ($\geqq 0$). Zugleich mit jedem seiner $m + 1$ Summanden ist also Δ selbst gerade ($\geqq 0$). Somit ist auch hier Satz IIa bestätigt.

Damit ist auch die in I und Ia enthaltene Verallgemeinerung der Descartesschen Regel bewiesen.

8. Die Nullstellen einer reellen analytischen Funktion in einem halboffenen Intervall. Die entsprechende Verallgemeinerung der Fourier-Budanschen Regel ist enthalten in den Sätzen

Satz III. Es sei $f(x)$ eine nicht identisch verschwindende reelle, für alle x in $a \leqq x \leqq b$ analytische Funktion und $N = N_{a,b}$ die Anzahl der dem Intervall $a < x \leqq b$ angehörenden (mit ihrer Vielfachheit gezählten) Nullstellen von $f(x)$; das Zeichen W_a habe die gleiche Bedeutung wie in Satz I, W_b die entsprechende für die Stelle b; es sei W_a endlich. Dann ist $W_b \leqq W_a$ und $N \leqq W_a - W_b$.

Satz IIIa. Dabei ist $W_a - W_b - N$ eine gerade Zahl.

9. Diese Sätze können ganz nach demselben Schema und mit denselben Hilfsmitteln (Rollescher Satz bzw. Hilfssätze von Nr. **6**) bewiesen werden wie die Sätze I und Ia. Man behandelt zunächst den Fall $W_a = 0$; wird dabei die erste nicht-verschwindende Zahl $f^{(\varkappa)}(a)$ der Folge (1) etwa > 0 angenommen, so ist $f(x)$ eine in $a \leqq x \leqq b$ monoton-zunehmende Funktion (vgl. Nr. **2**) und jede der Funktionen $f'(x)$, $f''(x)$, . . . monoton-nicht-abnehmend; man sieht daraus, daß auch $W_b = 0$ und $N = 0$ sein muß, die Sätze III und IIIa also zutreffen. Liegt aber der Fall $W_a = 0$ nicht für die Funktion $f(x)$ selbst vor, so doch für eine ihrer Ableitungen $f^{(\lambda)}(x)$ (vgl. Nr. **3**), und man braucht also nur zu zeigen, daß aus der Gültigkeit unserer Sätze für $f(x) = g'(x)$ auf ihre Gültigkeit für $f(x) = g(x)$ geschlossen werden kann. Hierzu genügt der Nachweis der Sätze:

Satz IV. Sei $g(x)$ eine nicht-konstante, reelle, für alle x aus $a \leqq x \leqq b$ analytische Funktion[17]; W_a und W'_a mögen die gleiche Bedeutung haben wie in Satz II; die entsprechende Bedeutung, wie W_a und W'_a für die Stelle a, mögen W_b und W'_b für die Stelle b haben; sei N bzw. N' die Anzahl der (mit ihrer Vielfachheit

---

[17] Auch hier (vgl. Anm. 13 sowie die spätere Nr. **12**) beschränken wir uns auf analytische Funktionen $g(x)$; es ergibt sich dann von selbst, daß die in Satz IV eingeführten Zahlen N und N' endlich sind.

gezählten) dem Intervall $a < x \leqq b$ angehörenden Nullstellen von $g(x)$ bzw. von $g'(x)$; sei W_a endlich; dann ist

$$W_a - W_b - N \geqq W'_a - W'_b - N'$$

oder

$$\Delta = N' - N + W_a - W'_a - W_b + W'_b \geqq 0.$$

Satz IVa. Dabei ist Δ eine gerade Zahl.

10. Zu diesen Sätzen sei zunächst bemerkt, daß aus der Endlichkeit von W_a jene von W_b folgt[18] und damit auch die Endlichkeit von W'_a und W'_b. Um IV und IVa zu beweisen, mögen die verschiedenen Nullstellen $x_1, \ldots, x_m$ von $g(x)$ in $a < x < b$ und ihre Vielfachheiten $h_1, \ldots, h_m$ eingeführt werden. Analog wie in Nr. **5** bzw. **7** kann man dann Aussagen über die Anzahl der Nullstellen von $g'(x)$ in den einzelnen Teilintervallen $a < x < x_1$, $x_\mu < x < x_{\mu+1}$, $x_m < x < b$ machen.

11. Dabei mögen Kürze halber die beiden Sätze IV und IVa gemeinsam bewiesen werden (analog wie II und IIa in Nr. **7**). Die Zahl $l (\geqq 0)$ möge dieselbe Bedeutung für die Stelle $x = b$ haben, wie (vgl. Nr. **4**) die Zahl k für die Stelle $x = a$, es sei also $g^{(\nu)}(b) = 0$ für $0 < \nu < l + 1$, $g^{(l+1)}(b) \neq 0$; es ist also l die Vielfachheit von $x = b$ als Nullstelle von $g'(x)$. Mit L werde die Vielfachheit der Stelle $x = b$ als Nullstelle von $g(x)$ bezeichnet (also $L = l + 1$ oder 0, je nachdem $g(b) = 0$ oder $g(b) \neq 0$). Mit Z'_μ werde die Anzahl der (mit Vielfachheit gezählten) Nullstellen von $g'(x)$ in $x_\mu < x < x_{\mu+1}$ bezeichnet ($0 \leqq \mu \leqq m$; hierbei $a = x_0$, $b = x_{m+1}$ gesetzt). Dann ist

$$N = \sum_{\mu=1}^{m}{}' h_\mu + L, \qquad N' = \sum_{\mu=0}^{m}{}' Z'_\mu + \sum_{\mu=1}^{m}{}' (h_\mu - 1) + l,$$

$$\Delta = W_a - W'_a + \sum_{\mu=0}^{m}{}' Z'_\mu - m - W_b + W'_b + l - L.$$

---

[18] Denn aus der Endlichkeit von W_a folgt, daß ein $g^{(\lambda)}(x)$ existiert, so daß $g^{(\lambda)}(a) \neq 0$, $g^{(\lambda)}(a)\, g^{(\lambda+\nu)}(a) \geqq 0$ ($\nu \geqq 1$); ist nun z.B. $g^{(\lambda)}(a) > 0$, so sind alle $g^{(\lambda+\nu)}(x)$ ($\nu \geqq 0$) monoton-nicht-abnehmende Funktionen, somit $g^{(\lambda)}(b) > 0$, $g^{(\lambda+\nu)}(b) \geqq 0$ und W_b endlich.

Wir unterscheiden weiterhin die Fälle

$$
\begin{aligned}
&1)\quad g(b) = 0,\\
&2\mathrm{A})\ g(b) \neq 0,\ m = 0,\\
&2\mathrm{B})\ g(b) \neq 0,\ m \geqq 1,
\end{aligned}
$$

und in jedem dieser Fälle die Unterfälle α) $W_a - W'_a = 0$, β) $W_a - W'_a = 1$.

Im Falle 1) ist $L = l + 1$, $W_b - W'_b = 0$, also

$$\Delta = (W_a - W'_a + Z'_0 - 1) + \sum_{\mu=1}^{m}{}' (Z'_\mu - 1)$$

(wobei die Summe $\sum\limits_{\mu=1}^{m}$ für $m = 0$ entfällt). Daß jeder Summand $Z'_\mu - 1$ (für $m \geqq 1$) und ebenso $W_a - W'_a + Z'_0 - 1$ eine gerade Zahl $\geqq 0$ ist, folgt genau so wie in Nr. **7** beim Beweis von Satz IIa im dortigen Falle B). Somit ist Δ gerade und $\geqq 0$, wie behauptet.

Im Falle 2) (A oder B) ist $L = 0$, also

$$\Delta = W_a - W'_a + \sum_{\mu=0}^{m-1}{}' (Z'_\mu - 1) + Z'_m + l - W_b + W'_b$$

(wobei die $\sum\limits_{\mu=0}^{m-1}$ für $m = 0$ entfällt). Für die Untersuchung von Z'_m ist dabei nötig festzustellen, ob $|g(x)|$ in der Nähe von $x = b$ (links von b) wächst oder abnimmt. Dies hängt nicht nur davon ab, ob $W_b - W'_b = 0$ oder $= 1$ (d. h. ob $g(b)g^{(l+1)}(b) > 0$ oder < 0) ist, sondern auch davon, ob l gerade oder ungerade ist. Und zwar wächst $|g(x)|$ links nahe von b, wenn entweder $W_b - W'_b = 0$ und l gerade oder $W_b - W'_b = 1$ und l ungerade ist (im einen Fall wächst $|g(x)|$ überhaupt beim Durchgang durch $x = b$, im anderen Fall hat $|g(x)|$ bei b ein Maximum). Hingegen nimmt $|g(x)|$ links nahe von b ab, wenn entweder $W_b - W'_b = 0$ und l ungerade oder $W_b - W'_b = 1$ und l gerade ist (Minimum von $|g(x)|$ oder Abnehmen beim Durchgang durch b). Zusammenfassend kann man sagen: In der Nähe von b (links von b) ist $|g(x)|$ wachsend oder abnehmend, je nachdem $l-(W_b-W'_b)$ gerade oder ungerade ist. Im ersten Fall ist $l-(W_b-W'_b)\geqq 0$, im zweiten $\geqq -1$.

Im Falle 2A), wo

$$\Delta = W_a - W'_a + Z'_0 + l - W_b + W'_b$$

ist, hat man zur Untersuchung von Z'_0 gemäß Hilfssatz (H) das Verhalten von $|g(x)|$ am Anfang des Intervalls $a \leqq x \leqq b$ (bei a) mit dem am Ende (bei b) zu vergleichen. Im Unterfalle α) $W_a - W'_a = 0$, wo $|g(x)|$ rechts von $x=a$ wächst, wird Z'_0 gerade ($\geqq 0$) oder ungerade ($\geqq 1$), je nachdem $|g(x)|$ links von $x=b$ wächst oder abnimmt, d. h. (vgl. oben) je nachdem $l-W_b+W'_b$ gerade ($\geqq 0$) oder ungerade ($\geqq -1$) ist; im Unterfalle β) $W_a - W'_a = 1$ aber, wo $|g(x)|$ rechts von $x=a$ abnimmt, wird Z'_0 gerade ($\geqq 0$) oder ungerade ($\geqq 1$), je nachdem $l-W_b+W'_b$ ungerade ($\geqq -1$) oder gerade ($\geqq 0$) ist. In allen diesen Fällen erweist sich Δ gerade und $\geqq 0$, wie behauptet.

Nun ist auch Fall 2 B) leicht zu erledigen. Hier ist

$$\Delta = (W_a - W'_a + Z'_0 - 1) + \sum_{\mu=1}^{m-1} (Z'_\mu - 1) + (Z'_m + l - W_b + W'_b)$$

(wobei die $\sum\limits_{\mu=1}^{m-1}$ für $m=1$ entfällt). Daß der letzte Summand $Z'_m + l - W_b + W'_b$ gerade ($\geqq 0$) ist, ersieht man durch eine analoge Überlegung wie oben im Falle 2Aα); das gleiche ersieht man für die übrigen m Summanden ebenso wie im Falle 1). Wieder ergibt sich Δ gerade $\geqq 0$.

Damit sind Satz IV und IVa, somit auch III und IIIa bewiesen.

12. Die Sätze II und IIa bzw. IV und IVa gelten, wie der Verlauf der Beweise zeigt, durchaus nicht nur für analytische Funktionen $g(x)$, sondern für alle Funktionen $g(x)$, die die Eigenschaft (E) bzw. ein endliches W_b aufweisen und im Bereich $x \geqq a$ bzw. $a \leqq x \leqq b$ (nebst den übrigen in jenen Sätzen gemachten Voraussetzungen, an Stelle der Voraussetzung, analytisch zu sein) den in Nr. **6** genannten Voraussetzungen (V) genügen, sowie der Voraussetzung, daß auch an den Endpunkten a und b Ableitungen (wenigstens einseitige) jeder Ordnung vorhanden sind und dabei weder a noch b Nullstelle von $g'(x)$ von unendlicher Vielfachheit ist.

Beim Beweis von Satz I und Ia bzw. III und IIIa wird daher die Voraussetzung, $f(x)$ sei analytisch, nur benützt (dort natürlich wesentlich), wo im Falle $W = 0$ daraus, daß alle $f^{(\nu)}(a) \geqq 0$ (oder alle $\leqq 0$) sind, erschlossen wird, daß $f(x) \neq 0$ im ganzen betrachteten Bereich gilt (Nr. **2** bzw. **9**).

Beispiele nicht-analytischer Funktionen, für die die Aussage von Satz I bzw. Satz III nicht gilt, sind leicht zu bilden, etwa mit Hilfe der bekannten für alle reellen x unbeschränkt differenzierbaren Funktion $\varphi(x)$, die (einheitlich) durch $\varphi(x) = \lim\limits_{t \to x} e^{-\frac{1}{t^2}}$ oder durch $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ $(x \neq 0)$, $\varphi(0) = 0$ definiert wird und die für $x = 0$ mit allen ihren Ableitungen verschwindet. Setzt man $f(x) = cx - \varphi(x)$ (wo $c > 0$), so wird die zugehörige Folge (1): $0, c, 0, 0, \ldots$, also $W = 0$, hingegen $N = 2$ für genügend kleines c. — Nimmt man $c > 0$, $0 \leqq a \leqq \xi_1 < \xi_2 \leqq b$ und setzt $f(x) = cx$ für $\left| x - \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) \right| > \frac{1}{2}(\xi_2 - \xi_1)$, $f(x) = cx - \psi\left(\frac{2x - \xi_1 - \xi_2}{\xi_2 - \xi_1}\right)$ für $\xi_1 \leqq x \leqq \xi_2$, wo $\psi(x) = \lim\limits_{t \to x} \varphi\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)$ eine unbeschränkt differenzierbare Funktion ist, die für $x = -1$ und $x = 1$ nebst allen Ableitungen verschwindet (Maximum bei $x = 0$, zu beiden Seiten symmetrisch gegen $x = -1$ und $x = 1$ abfallend), so werden $W_a = 0$, $W_b = 0$, hingegen $N = 2$ für genügend kleines c.

13. Die Regel von Laguerre. Wie bereits erwähnt, hat für die Descartessche Vorzeichenregel $N \leqq W$ (für Polynome) schon Laguerre (l. c. [6]) mit Hilfe des Rolleschen Satzes einen sehr einfachen Induktionsbeweis (von W auf $W + 1$) angegeben, wobei seine Beweismethode ohne weiteres den folgenden allgemeineren Satz liefert:[19]

---

[19] Vgl. Enzykl., Band I, 1, Artikel I B 3a (Runge), p. 413, 414 (mit etwas anderem Beweis als bei Laguerre). Natürlich genügt es, wie bei Laguerre und Runge, speziell $x_0 = 0$ anzunehmen.

V. Sei $x_0 \leqq a < b \leqq \infty$; in $a < x < b$ konvergiere die verallgemeinerte Laurentsche Reihe

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu (x - x_0)^{\varrho_\nu} \tag{2}$$

mit reellen (nicht sämtlich verschwindenden) Koeffizienten c_ν, wobei die Exponenten

$$\cdots < \rho_{-2} < \rho_{-1} < \rho_0 < \rho_1 < \rho_2 < \cdots$$

reelle (nicht notwendig ganze) Zahlen bedeuten. Ist dann W die (als endlich vorausgesetzte) Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge der Koeffizienten

$$\ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots$$

und N die Anzahl der (mit ihrer Vielfachheit gezählten) Nullstellen von $f(x)$ in $a < x < b$, so gilt $N \leqq W$[20].

Nimmt man speziell $b = \infty$, $a = x_0$, $\rho_\nu = \nu$, $c_\nu = 0$ für $\nu < 0$, so erhält man die Descartessche Regel für den Fall einer beständig konvergenten Potenzreihe $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x - x_0)^\nu$.

Derjenige Sonderfall des Satzes I von Nr. **1**, der sich auf beständig konvergente Potenzreihen bezieht, ist also in der Laguerreschen Regel mitenthalten.

Dabei sei bemerkt: Wenn W' und N' für die Ableitung $f'(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \rho_\nu c_\nu (x - x_0)^{\varrho_\nu - 1}$ von (2) dieselbe Bedeutung ha-

---

[20] Laguerres Beweismethode beruht dabei auf folgenden Feststellungen: 1. die Funktion $f_*(x) = (x - x_0)^{-\alpha} f(x)$ hat dieselbe Anzahl $W_* = W$ von Zeichenwechseln in ihrer Reihenentwicklung und dieselbe Anzahl $N_* = N$ von Nullstellen in $a < x < b$ wie $f(x)$; 2. für $f'_*(x)$ muß nach dem Rolleschen Satz (zufolge der gleichen Überlegung wie bei Anm. 14a) $N'_* \geqq N_* - 1$ sein; 3. für $f'_*(x)$ gilt, wenn die reelle Zahl α geeignet gewählt wird, $W'_* = W_* - 1$ (hierzu braucht man nur, wenn $c_\varkappa$ und $c_{\varkappa+1}$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, für α eine Zahl aus dem Intervall $\rho_\varkappa \leqq \alpha \leqq \rho_{\varkappa+1}$ zu wählen). Aus 1., 2., 3. folgt $W - N = W_* - N_* \geqq W'_* - N'_*$, was wieder den Fall $W > 0$ auf den Fall $W = 0$ zurückzuführen gestattet.

ben wie W und N für $f(x)$, dann ist mit W natürlich auch W' endlich, aber es gilt, wie Beispiele zeigen[21], nicht allemal $W - N \geqq W' - N'$, die Laguerresche Regel läßt sich also nicht auf die gleiche Weise beweisen, wie in Nr. **3–11** die Descartessche und die Fouriersche Regel vermittels II und IV bewiesen wurden.

14. Wie Laguerre hervorgehoben hat, gilt in den von ihm eingehender behandelten Fällen[22] auch die dem Satz Ia entsprechende Aussage, daß $W - N$ eine gerade Zahl ist. In der Tat folgt aus der Endlichkeit von W, daß man Indizes $\varkappa$ und λ so wählen kann (wobei $\varkappa \leqq \lambda$, $c_\varkappa \neq 0$, $c_\lambda \neq 0$), daß alle c_ν für

---

[21] Es werde etwa $f(x) = \frac{a}{x} + b + cx - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ genommen und dabei $0 < c < \frac{3}{16}$, $b > 0$, $a \geqq \left(\frac{3}{32}\right)^2$, sowie $b + \frac{4}{3}a < \frac{3}{4}\left(\frac{3}{16} - c\right)$ gewählt $\left(\text{z. B. } a = b = \frac{1}{50},\ c = \frac{1}{8}\right)$; dann wird $F(x) = x^2 f'(x) = x^4 - x^3 + cx^2 - a$, $F'(x) = 4x(x - \xi_1)(x - \xi_2)$, wobei $\xi_1 = \frac{3}{8} - \sqrt{\frac{9}{64} - \frac{c}{2}}$, $\xi_2 = \frac{3}{4} - \xi_1$; somit ist $F'(x)$ positiv für $0 < x < \xi_1$ und $x > \xi_2$, negativ für $\xi_1 < x < \xi_2$; da demnach $F(x)$ bei $x = \xi_1$ ein Maximum, bei $x = \xi_2$ ein Minimum hat und $F(\xi_1) = -\left(\frac{9}{64} - \frac{c}{2}\right)\xi_1 - \left(a - \frac{3}{32}c + \frac{c^2}{4}\right) < 0$ ist, so hat $F(x)$, daher auch $f'(x)$ eine einzige positive Nullstelle $x = \xi$ $(> \xi_2)$; die Funktion $f(x)$, die für kleine und ebenso für große positive x positiv ist, ist für $0 < x < \xi$ abnehmend, für $x > \xi$ wachsend; und da $f(x)$ auch negative Werte annimmt $\left(\text{z. B. ist } f\left(\frac{3}{4}\right) = b + \frac{4}{3}a - \frac{3}{4}\left(\frac{3}{16} - c\right) < 0\right)$, so hat $f(x)$ genau zwei positive Nullstellen. Daher ist für diese Funktion $N = 2$, $N' = 1$, wegen $W = 2$, $W' = 3$ also $\Delta = N' - N + W - W' = -2$, und also tatsächlich nicht $\geqq 0$.

[22] Daß nämlich in der verallgemeinerten Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{\varrho_\nu}$ mit nichtnegativen Exponenten (wo dann $a\,[= x_0] = 0$ genommen werden kann) entweder nur endlich viele $c_\nu \neq 0$ sind (wo dann $b = \infty$ genommen werden kann) oder bei endlichem b die Reihe für $x = b$ divergiert. Laguerre behandelt diesen letztgenannten Fall l. c. (Oeuvres) S. 5 (bei ihm heißt a, was hier b heißt). Den Fall negativer Exponenten erwähnt Laguerre ebenfalls (Zeile 7–3 v. u.), doch ohne auf Einzelheiten einzugehen.

$\nu < \varkappa$, soferne sie nicht Null sind, dasselbe Vorzeichen wie $c_\varkappa$ haben, desgleichen alle von Null verschiedenen c_ν für $\nu > \lambda$ dasselbe Vorzeichen wie c_λ; anders gesagt, man kann $\sigma\,(= \pm 1)$ und $\tau\,(= \pm 1)$ so wählen, daß $\sigma c_\varkappa > 0$, $\sigma c_\nu \geqq 0$ für $\nu < \varkappa$, $\tau c_\lambda > 0$, $\tau c_\nu \geqq 0$ für $\nu > \lambda$. Dafür daß $W - N$ eine gerade Zahl wird, ist es nun sicherlich hinreichend, daß es Zahlen $a_1 > a$ und $b_1 < b$ so gibt, daß $\sigma f(x) > 0$ für $a < x < a_1$, $\tau f(x) > 0$ für $b_1 < x < b$; denn für $\sigma = \tau$ ist dann offenbar sowohl W als N gerade, für $\sigma = -\tau$ sowohl W als N ungerade (im ersten Fall wechselt sowohl die Folge der c_ν als die Funktion $f(x)$ im Bereich $a < x < b$ eine gerade Anzahl mal, im zweiten Fall eine ungerade Anzahl mal das Vorzeichen). Ein solches a_1 gibt es nun allemal, wenn die Folge der c_ν nach links abbricht ($c_\nu = 0$ für $\nu < \varkappa$) desgleichen wenn die Reihe (2) für $x = a$ divergiert; ein solches b_1 aber gibt es sicher, wenn die Folge der c_ν nach rechts abbricht ($c_\nu = 0$ für $\nu > \lambda$, wo dann $b = \infty$), desgleichen wenn für endliches b die Reihe (2) für $x = b$ divergiert. Beide Bedingungen (sowohl die auf a_1 wie die auf b_1 bezügliche) sind in den erwähnten von Laguerre behandelten Fällen (vgl. Anm. 22) erfüllt, ebenso auch in dem von Runge (l. c. Anm. 19) angeführten Fall einer verallgemeinerten Laurentschen Reihe $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_\nu (x - x_0)^{\varrho\nu}$, die für $x = a$ und für $x = b$ divergiert[23].

15. Hingegen kann man sich leicht an Beispielen davon überzeugen, daß die Aussage „$W - N$ = gerade Zahl" nicht zu gelten braucht, wenn keine anderen Voraussetzungen gemacht werden als die des Satzes V, Nr. **13** (hierbei a und b so gewählt, daß

[23] Diese Bedingungen der Divergenz — für die späteren Schlüsse (l. c. p. 414 oben) von wesentlichem Belang — werden l. c. [19]), p. 413, wo $x_0 = 0$ genommen ist, nicht sehr deutlich betont, wenn verlangt wird, daß die Reihe „nur für $a < |x| < b$" konvergieren soll (dort heißt u, v, was hier a, b heißt). Wird darunter verstanden, daß für alle x mit $|x| = a$ oder $|x| = b$ Divergenz stattfinde, so werden unnötigerweise Fälle ausgeschlossen wie der, wo für $x = a$ und $x = b$ Divergenz statthat, für $x = -a$ oder $x = -b$ aber nicht. Würde aber darunter nur verstanden werden, daß a und b die genauen Konvergenzradien der Reihe bedeuten, so brauchte für die Stelle $x = a$ oder $x = b$ Divergenz gar nicht vorzuliegen und (wie später noch die Beispiele in Nr. **15** zeigen) $W - N$ brauchte dann gar nicht eine gerade Zahl zu sein.

$a - x_0$ den inneren, $b - x_0$ den äußeren Konvergenzradius darstellt. Es kann nämlich sehr wohl vorkommen, daß die Folge der c_ν nach rechts nicht abbricht und von einer gewissen Stelle an einerlei Vorzeichen τ aufweist, daß aber (wo dann bei endlichem b die Reihe für $x = b$ nicht divergiert) die Funktion $f(x)$ bei Annäherung an b nicht dieses Vorzeichen τ annimmt; oder analog, daß die c_ν für alle $\nu < \varkappa$ einerlei Vorzeichen σ aufweisen, ohne daß $f(x)$ in der Nähe von $x = a$ dieses Vorzeichen hätte. In solchen Fällen kann natürlich nicht, wie in den in Nr. **14** behandelten Fällen, auf „$W - N =$ gerade Zahl" geschlossen werden.

Setzt man z. B.

$$\gamma_\nu = \frac{(2\nu - 2)!}{(\nu - 1)!\ \nu!\ 2^{2\nu-1}} = (-1)^{\nu-1}\binom{\frac{1}{2}}{\nu} \text{ für } \nu \geqq 1,$$

so gilt die Reihenentwicklung

$$h(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu x^\nu = 1 - \sqrt{1 - x} \text{ (für } -1 \leqq x \leqq 1).$$

Ist nun $c > 0$ und bildet man

$$(3) \qquad f(x) = -h\left(\frac{1}{x}\right) + c\,h\left(\frac{x}{2}\right) = -\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\gamma_\nu}{x^\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c\gamma_\nu}{2^\nu}x^\nu;$$

so konvergiert diese Laurentsche Reihe (wenn wir nur positive x in Betracht ziehen) für $1 \leqq x \leqq 2$ (es ist hier also $x_0 = 0$, $a = 1$, $b = 2$). Für $1 \leqq x \leqq 2$ ist $f(x)$ monoton wachsend vom Werte $f(1) = c\,h\left(\frac{1}{2}\right) - h(1) = c\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1$ zum Werte $f(2)$ $= c\,h(1) - h\left(\frac{1}{2}\right) = c - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Wählt man $c = 2$, so wird $f(1)$ negativ, $f(2)$ positiv und $f(x)$ hat im Intervall $1 < x < 2$ genau eine Nullstelle: $N = 1$; wählt man $c = 4$, so fallen $f(1)$

und $f(2)$ positiv aus: $N = 0$. Beidemal ist die Anzahl W der Zeichenwechsel der Koeffizienten von (3) gleich 1 (also $\geqq N$), es ist aber $W - N$ nur im ersten Fall gerade, im zweiten aber ungerade.

Ein noch einfacheres Beispiel liefert

$$f(x) = c - \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu x^\nu = (c-1) + \sqrt{1-x}$$

($x_0 = 0$, $a = 0$, $b = 1$), wobei $f(x)$ im Bereich $0 \leqq x \leqq 1$ vom Werte $f(0) = c$ zum Werte $f(1) = c - 1$ monoton abnimmt. Wählt man $c > 1$, so wird $f(1) > 0$, $N = 0$, wegen $W = 1$ somit $W - N$ ungerade.

16. (Nachträge zur Literatur.)[24] Zum Schluß möge noch eine Reihe von Arbeiten angeführt werden, die mir nachträglich bekannt wurden und in denen ebenfalls mit Hilfe des Rolleschen Satzes ein Beweis für die Descartessche oder die Fourier-Budansche Regel mitgeteilt wird[25]. Derartige Beweise für die Descartessche Regel geben P. Zervos, K. Petr und C. Jaccottet[26]; es ist diesen Beweisen gemeinsam, daß die Tatsache, daß $W - N$ eine gerade Zahl ist, vorangestellt und dann unter wesentlicher Benützung dieser Tatsache der Satz $W - N \geqq 0$ bewiesen wird. Einen Beweis für die Fourier-Budansche Regel hat A. Hurwitz[27] gegeben unter Benützung eines Induktionsschlußes, der dem oben

[24] Zusatz bei der Korrektur.

[25] In den von mir eingesehenen Lehrbüchern habe ich keinen dieser Beweise aufgenommen gefunden und sie scheinen ziemlich unbekannt geblieben zu sein, obwohl z. B. der unten angeführte Beweis von Jaccottet sehr kurz und klar ist. Schwierigkeiten der Beschaffung einer selteneren Zeitschrift oder Schwierigkeiten der Sprache haben da wohl z. T. mitgewirkt.

[26] P. Zervos, Sur le théorème de Descartes, L'Enseignement mathématique, 3 (1901), p. 428–430; K. Petr, Poznámka o větě Descartesově a větě Budanově, Časopis pro pěstování Mathematiky a Fysiky, 26 (1907); C. Jaccottet, Une démonstration du théorème de Descartes, L'Enseignement mathém., 11 (1909) p. 118–120; vgl. auch J. Juhel-Rénoy, Sur la règle de Descartes, Nouvelles Annales de Mathématiques, ser. 4, t. 8 = t. 67 (1908), p. 449-450.

[27] A. Hurwitz, Über den Satz von Budan-Fourier, Math. Ann. 71 (1912), S. 584–591.

dargestellten sehr nahe steht[28]. Dabei läßt Hurwitz gleichfalls (wie oben in Satz III, III a) die Einschränkung $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$ fallen, bezieht sich demgemäß auf die Nullstellen aus $a < x \leqq b$ und beschränkt sich auch nicht auf Polynome, sondern betrachtet bereits beliebige in $a \leqq x \leqq b$ regulär-analytische reelle Funktionen. Die Ausdehnung auf analytische Funktionen bringt auch K. Petr[29], sowohl für den Descartesschen als für einen dem Fourier-Budanschen verwandten Satz, der sich aber auf die Nullstellen aus $a < x < b$ (nicht aus $a < x \leqq b$) bezieht, wobei die Zeichenwechsel an der Stelle b im Falle des Auftretens von Nullen etwas anders als an der Stelle a zu zählen sind[30].

---

[28] Die Gleichung (14), a. a. O., S. 587, entspricht unseren Sätzen IV, IV a. Wenn Hurwitz, a.a.O., S. 585. den Rolleschen Satz als Folge von Aussagen über Wachsen und Abnehmen von

$$F(x) = (f(x))^2 \text{ bei } \frac{1}{2} F'(x) = f(x) f'(x) > 0 \text{ bzw. } < 0.$$

hinstellt, so denke ich mir demgegenüber derartige Aussagen aus dem Rolleschen Satz hergeleitet (vgl. auch Nr. **6**, am Schluß).

[29] l. c. [26]; ebenda auch ein Beweis der Laguerreschen Regel.

[30] Diesen Satz hat auch F. Giudice aufgestellt: Un osservazione sul teorema di Budan-Fourier, Giornale de Matematiche di Battaglini, (3), 3 = 50 (1912), p. 188–190.