

Sitzungsberichte

der

mathematisch - physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1882. Heft IV.

München.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

1882.

~
In Commission bei G. Franz.

Sitzungsberichte

der
königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 3. Juni 1882.

Herr v. Beetz legt vor und bespricht:

„Untersuchung über den Einfluss der
Temperatur auf Aeusserungen von Mo-
lekularkräften.“ Von Dr. A. Miller.

(Mit 4 Tafeln.)

Den neueren Experimentaluntersuchungen über Elastizität, insoferne sie nicht rein technische Zwecke im Auge haben, liegt meist die Absicht, durch sie die Kenntniss der Molekularkräfte zu fördern und damit auch eine Unterlage für die mathematische Behandlung dieser Materie zu schaffen, zu Grunde. Andererseits war man bestrebt, die Aeusserungen von Molekularkräften mit anderen physikalischen Maasseinheiten, wie der der Schmelzwärme¹⁾, des Atomengewichts²⁾ in Verbindung zu bringen und interessante Beziehungen hierüber abzuleiten.

Bei der Wichtigkeit, die hiernach der Kenntniss der Elastizität der Körper zufällt, erscheint es auffallend, dass

1) C. C. Person, Poggendorff's Annalen. Bd. 75.

2) H. Vogel, Poggendorff's Annalen. Bd. 111.

man bei den bisherigen Untersuchungen über den longitudinalen Modul der Elastizität die elastische Nachwirkung gar nicht berücksichtigte, obwohl diese bereits seit einem halben Jahrhundert von W. Weber entdeckt ist. Ich habe es daher versucht, in dieser Richtung einen Schritt zu thun, der, wie die Folge zeigen dürfte, geeignet sein könnte, weitere Schlüsse über das Verhalten der Molekularkräfte der Körper zu gestatten, sobald die Untersuchung auf eine hinreichende Zahl von Substanzen ausgedehnt sein wird, was in der vorliegenden Abhandlung nicht der Fall ist. Sie beschäftigt sich nur mit dem Eisen und da vornehmlich nur mit einem Individuum. Sie ist eine zunächst grundlegende Arbeit, weshalb auch auf die Prüfung der Untersuchungsmethode ein verhältnismässig grosser Raum entfällt, und das Versuchsmaterial in einem Umfange mitgetheilt wird, der in Zukunft recht wohl eingeschränkt werden könnte.

§ 1. Ueber Elastizität im allgemeinen.

Als Mass der Elastizität eines Körpers wird dessen Elastizitätsmodul angesehen. Man könnte ihn auch als solches unbedenklich betrachten, wenn in der That bei jeder Deformation eines Körpers durch äussere Kräfte die neue Gleichgewichtslage der Moleküle in der Weise sich herstellen würde, wie es die Definition der Elastizität, meist stillschweigend, voraussetzt, wenn vor allem die einer äusseren Kraftänderung entsprechende endliche Gestaltsänderung sich plötzlich vollzöge, oder wenn doch feststände, dass die neue Gleichgewichtslage bei allen Körpern in einem ganz gleichen Verlauf erzeugt wird. Seitdem aber, ganz abgesehen von der Unterscheidung zwischen „bleibender und elastischer Gestaltsänderung“, auf welche Gerstner¹⁾ aufmerksam gemacht

1) Gerstner, Handbuch der Mechanik, 2. Aufl. § 267.

hat, W. Weber ¹⁾ zeigte, dass selbst innerhalb des Elastizitätsgrenze die einer äusseren Kraftänderung entsprechende Gestaltsänderung sich nicht plötzlich vollkommen einstellt, kann kaum mehr ohne Bedenken angenommen werden, dass der Elastizitätsmodul das gesamte elastische Verhalten eines Stoffes zahlenmässig zum Ausdruck bringe. Das wäre nach dem Gesagten selbst dann nicht der Fall, wenn man die endliche Gleichgewichtslage scharf bestimmen könnte, was nach den ziemlich vielen Autoren, welche sich in neuerer Zeit mit der von W. Weber entdeckten „elastischen Nachwirkung“ beschäftigt haben, mindestens noch sehr zweifelhaft ist. Ausserdem ist bei der Dehnung, von der hier allein die Rede sein soll, nur die elastische Nachwirkung bei konstanter Belastung genauer studiert, nicht aber der Teil derselben, welcher während der Verlängerung oder Verkürzung infolge der Aenderung der Wirkung einer äusseren Kraft entsteht. Wenn man bloss fragt, eine wie grosse Gestaltsänderung einer gewissen Kraft innerhalb der Elastizitätsgrenze entspricht, so gibt der Elastizitätsmodul darüber Aufschluss. Allein damit ist das elastische Verhalten eines Körpers nicht vollkommen gekennzeichnet. Denn, wie bekannt, während selbst innerhalb der Grenze der Elastizität der eine und zwar grössere Teil der einer bestimmten Kraft entsprechenden Gestaltsänderung plötzlich auftritt, also eine von der Zeit unabhängige Funktion ist, wird der kleinere Teil als eine Funktion der Zeit dargestellt. Wenn somit ein Körper durch eine äussere Kraft zu einer neuen Gleichgewichtslage seiner Moleküle gezwungen worden ist, so wird behufs Ermittlung seines elastischen Verhaltens nicht nur nach der gesamten Gestaltsänderung, sondern auch nach der Grösse des Teiles derselben, welcher unter sonst gleichen Umständen plötzlich, und desjenigen, der

1) W. Weber, Poggendorff's Annalen, Bd. 34.

abhängig von der Zeit entstanden ist, gefragt werden können. Es wird das Verhältnis der „elastischen Dehnung“ zur „elastischen Nachwirkung“ zu ermitteln sein. Da aber die Zeit, innerhalb welcher der endliche Gleichgewichtszustand der Moleküle erreicht sein wird, nicht genau zu ermitteln ist, wird vielleicht die Erfahrung darauf hinweisen, insoferne es sich um wissenschaftliche Zwecke handelt, in erster Linie nur die Nachwirkung zu berücksichtigen, welche in der Entstehungszeit der elastischen Dehnung hervorgeht.

§ 2. Benennungen.

Wie schon erwähnt, soll in vorliegender Abhandlung nur von elastischen Erscheinungen die Rede sein, welche ein Körper zeigt, wenn er durch eine äussere Kraft einer Verlängerung unterworfen wird. Um wegen der häufig etwas verworrenen Bezeichnungen Missverständnisse auszuschliessen, halte ich es nicht für überflüssig, die hier festgehaltenen Benennungen zu erklären, um so mehr, als ich genötigt bin, eine noch weitere Unterscheidung als bisher bei dieser Art von physikalischen Erscheinungen üblich war, eintreten zu lassen.

Wird ein Draht von der Länge L mit einem Gewichte P belastet, so bringt dies eine Verlängerung A hervor, die ich „Dehnung“ (D) heissen werde. Von dieser Dehnung entsteht ein Teil A_1 plötzlich; ich werde ihn „elastische Dehnung“ ($e. D.$) nennen. Ein anderer Teil derselben wird im Verlaufe der Zeit T erzeugt. Dieser von der Zeit abhängige Teil kann selbst wieder aus wesentlich verschiedenen Stücken bestehen, von denen das eine A_2 innerhalb einer gewissen Zeit nach dem Aufhören der Spannung wieder verschwindet; ich werde dieses nach W. Weber „elastische Nachwirkung“ ($e. N.$) nennen. Für das andere, bleibende Stück, wird ebenfalls die übliche Benennung „Streckung“ ($St.$) beibehalten. Bei der elastischen Nachwirkung ist wohl

noch derjenige Teil derselben, welcher während des Anspannens, also in der Entstehungszeit der elastischen Dehnung auftritt, von dem bei konstanter Belastung erzeugten zu unterscheiden. In analoger Anwendung gelten dieselben Bezeichnungen, wenn ein Draht abgespannt wird.

§ 3. Ziel der Untersuchung.

Wie aus Obigem schon hervorgehen dürfte, besteht die Absicht, zunächst die elastische Dehnung, dann aber auch die elastische Nachwirkung, welche in der Entstehungszeit jener zum Vorschein kommt, jede für sich und somit auch ihr Verhältnis zu ermitteln. Diese Elemente der Elastizität sollen für Temperaturen zwischen 0° und 100°C erforscht und ihre mathematische Beziehung zur Temperatur angegeben werden. Ich habe mit dem Eisen begonnen und das Versuchsobjekt nicht durch öfteres Erwärmen und Abkühlen vor dem Versuche auf den sog. Normalzustand gebracht und in diesem erst untersucht, sondern ich studierte den allmählichen Uebergang in diesen, da er, wie ich aus früher angestellten Versuchen wusste, manches Interessante zu bieten schien.

§ 4. Literatur des Gegenstandes.

Arbeiten, welche sich mit den hier aufgeworfenen Fragen beschäftigen, sind mir nicht bekannt. In Beziehung zu vorliegenden Untersuchungen jedoch stehen die Arbeiten von Pisati ¹⁾ und von Wertheim ²⁾. Von ganz besonderem Interesse für die Verwertung unserer Resultate ist aber eine Abhandlung von Hrn. Prof. F. Kohlrausch und Loomis ³⁾.

1) G. Pisati *), *Gaz. chim. ital.* VII. 1.

2) Wertheim, *Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Ergänzungs-Bd. II.*

3) F. Kohlrausch und F. E. Loomis, *Poggendorff's Annalen etc.* Bd. 141.

*) Ich konnte mir diese Quelle trotz vieler Bemühungen nicht verschaffen, musste mich vielmehr auf die „Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie“ beschränken. (Bd. I, 1877, Nr. 6, I).

Diese stellten an tordierten Eisendrähten, jene an gedehnten, Versuche über Elastizität bei verschiedenen Temperaturen an.

Die Untersuchungen Wertheims haben ergeben, dass der Elastizitätsmodul des Eisens von der gewöhnlichen Temperatur an gegen 100°C zunimmt, und erst von da an bis 200°C fällt, so dass er ungefähr bei 100°C ein Maximum besässe. Nach den späteren Versuchen von Kohlrausch besteht ein Maximum des Elastizitätsmoduls nicht. Auch Pisati gibt ein solches zwischen 20° und 300° nicht an; nach den zuletzt genannten Autoren nimmt der longitudinale Elastizitätsmodul mit steigender Temperatur beständig ab.

Was die Behandlung des Eisendrahtes vor dessen Verwendung zu Dehnungsversuchen betrifft, so lässt sich bei Wertheim nicht entnehmen, ob derselbe vorher bedeutenden Temperaturdifferenzen ausgesetzt worden ist, während Pisati die Drähte vor dem definitiven Versuche auf 300°C . erwärmte und wieder abkühlte. Aus dem regelmässigen Verlaufe der Versuche von Kohlrausch lässt sich schon schliessen, dass der verwendete Draht vorher auf den sog. Normalzustand gebracht worden war. Es wird sich nämlich auch bei diesen Versuchen deutlich zeigen, dass die den definitiven Versuchen vorausgehende Behandlung des Drahtes von wesentlichem Einflusse auf seinen Elastizitätszustand ist.

Ein Vorzug der Arbeit Pisati's vor jener von Wertheim besteht offenbar auch darin, dass ersterer zuversichtlich bei vielen Temperaturpunkten zwischen 20° und 300°C untersuchte, während Wertheim zwischen 15° und 200°C nur in 4 Temperaturpunkten den Draht auf seine Elastizität prüfte, so dass Abweichungen zwischen diesen Temperaturen Wertheim entgehen konnten.

Anlangend die Hilfsmittel, welche zur Messung der Verlängerungen benützt worden sind, so bedienten sich

sowohl Wertheim als auch Pisati des Katheometers, eines Instruments, das nach dem Urtheile Poggendorff's und Kohlrausch's¹⁾ zur Ermittlung so kleiner Abweichungen, wie sie bei Untersuchung der Elastizität vorkommen, die genügende Feinheit nicht besitzt. Ich bediente mich deshalb einer Spiegelablesung und war dazu um so mehr veranlasst, als es sich bei den folgenden Versuchen nicht so fast um die gesamte Dehnung innerhalb der Elastizitätsgrenze, sondern auch um einen kleinen Bruchtheil derselben, die elastische Nachwirkung während der Entstehungszeit der ersteren handelt.

§ 5. Theorie der Untersuchungsmethode.

Wie schon erwähnt, ist das nächste Ziel vorliegender Arbeit: das, was ich elastische Dehnung (e. D.) nenne und die während ihrer Entstehungszeit hervorgetretene elastische Nachwirkung (e. N.) zu messen. Abgesehen davon, dass die verschiedenen Experimentatoren über elastische Nachwirkung sich mit der durch Dehnung entstandenen verhältnismässig wenig beschäftigten und ihre Versuche nur auf gewisse Stoffe beschränkten, wären die gefundenen Resultate schon deshalb hier nicht verwendbar, weil sie auf die während der Anspannung und Abspannung des untersuchten Körpers entstandene elastische Nachwirkung keine genügende Rücksicht nehmen konnten, so dass die Grenze der Anwendbarkeit des die Geschwindigkeit der elastischen Nachwirkung darstellenden Ausdruckes:

$$-\frac{dx}{dt} = \alpha x t^{-n} \quad 1)$$

anerkanntermassen für kleine Werte von t nicht genau bestimmt ist. Ausser der schon erwähnten grundlegenden

1) F. Kohlrausch, Poggendorff's Annalen, Bd. 128, S. 211.

Arbeit von W. Weber kommt hier noch die von Professor F. Kohlrausch ¹⁾ in Betracht.

Für den oben angedeuteten Zweck dürfte folgende Betrachtung zum Ziele führen oder wenigstens eine erste Annäherung an dasselbe ermöglichen:

Denken wir uns vorerst einen Draht über seine sog. Elastizitätsgrenze hinaus unter dem Einflusse einer ihn verlängernden Kraft, die in der Zeit T von 0 bis P stetig

Fig. 1. wächst, so erleidet er in dieser Zeit eine Dehnung; es rückt sein Endpunkt B_1 (Fig. 1) nach B_2 vor. Vom Zeitpunkte T an nehme die Last P bis 0 in der weiteren Zeit T_1 ab, so wird der Endpunkt des Drahtes nach der Zeit $T + T_1$ etwa in B_3 sein. Die Strecke $B_1 B_2$ sei $= A$, $B_2 B_3 = A_0$ und $B_1 B_3 = A'$. Nun ist anzunehmen, dass innerhalb des Intervalls 0 und $T + T_1$ die Grösse der Dehnung niemals dem durch die jeweils wirkende Kraftgrösse bedingten Gleichgewichtszustande entspricht, so dass nach den hierüber bekannten Erfahrungen die Dehnung A sich aus der elastischen Dehnung A_1 , der elastischen Nachwirkung A_2 und der Streckung A_3 zusammensetzt. Der Uebergang des Endpunktes von B_2 nach B_3 geschieht infolge derselben Ursachen wie vorhin; deren Wirkungen wollen wir der Reihe nach analog mit A'_1 , A'_2 , A'_3 bezeichnen. Hiebei wollen wir jene Grössen, von denen durch die Erfahrung feststeht, dass sie die gesamte Dehnung verkürzen, negativ in Ansatz bringen.

Dann ist:

$$B_1 B_2 = A_1 + A_2 + A_3 = A \quad 2)$$

$$B_1 B_3 = A + (-A'_1 + A'_2 + A'_3) = A' \quad 3)$$

$$B_2 B_3 = B_1 B_3 - B_1 B_2 = -A'_1 + A'_2 + A'_3 = A_0 \quad 4)$$

1) F. Kohlrausch, Poggendorff's Annalen, Bd. 158 S. 352.

Die Grössen A_3 und A'_3 , um deren Bestimmung es sich hier nicht handelt, wurden nach dem Vorgange anderer Experimentatoren dadurch ausser Einfluss gesetzt, dass der zu untersuchende Draht vor den definitiven Versuchen über seine jeweilige Elastizitätsgrenze hinaus belastet und bei den definitiven Versuchen eine ziemlich weit unter derselben liegende Spannung angewendet worden ist. Darnach ist $A_3 = A'_3 = 0$ und die vorigen Gleichungen gehen in

$$A = A_1 + A_2 \quad 5)$$

$$A' = (A_1 - A'_1) + (A_2 + A'_2) \quad 6)$$

$$A_0 = -A'_1 + A'_2 \quad 7)$$

über. Wir suchen die Grössen A_1 und A'_1 um den Elastizitätsmodul, der einer von der Zeit unabhängigen Deformation entspricht, berechnen zu können. Allein es sind nur die Grössen A , A' , A_0 direkt messbar, wobei zu bemerken, dass von den obigen Gleichungen nur zwei von einander unabhängig sind. Somit stehen uns zur Bestimmung von A_1 und A'_1 nur die beiden Gleichungen

$$A = A_1 + A_2 \quad 8)$$

$$A_0 = -A_1 + A'_2 \quad 9)$$

zu Gebote, indess A_2 und A'_2 nicht direkt messbar sind. Die Erfahrungen über die Elastizität weisen darauf hin, und die nachfolgenden Versuche bestätigen es, dass die elastische Dehnung beim Be- und Entlasten die gleiche Grösse hat. Somit können wir mit grosser Annäherung wenigstens die Relation:

$$A_1 = A'_1 \quad 10)$$

annehmen, wenn während einer An- und Abspannung des Drahtes dessen sonstiger physikalischer Zustand derselbe bleibt. In Gleichung 6) gibt uns A' die elastische Nachwirkung in der Zeit einer Be- und der unmittelbar darauf

folgenden Entlastung. Wird die An- und Abspannung n mal hintereinander unter den bisherigen Voraussetzungen bewerkstelliget, so haben wir:

$$\sum_1^n A' = \sum_1^n (A_1 - A'_1) + \sum_1^n (A_2 + A'_2) \quad 11)$$

und im Zusammenhalte mit

$$\sum_1^n A_1 - \sum_1^n A'_1 = 0 \quad 12)$$

die Gleichung: $\sum_1^n A' = \sum_1^n (A_2 + A'_2) \quad 13)$

wobei $\sum_1^n A'$ die in der Zeit $n(T + T_1)$ entstandene elastische Nachwirkung ist. In den Versuchen ist gewöhnlich $T = T_1$ somit die dem $\sum_1^n A'$ entsprechende Zeit $= 2nT$ genommen.

Bei n maliger, unmittelbar aufeinander folgender An- und Abspannung gehen die Gl. 8) und 9) im Zusammenhange mit Gl. 12) über in:

$$\sum_1^n A = \sum_1^n A_1 + \sum_1^n A_2 \quad 14)$$

$$\sum_1^n A_0 = - \sum_1^n A_1 + \sum_1^n A'_2 \quad 15)$$

woraus sich:

$$\sum_1^n A_1 = \frac{1}{2} \sum_1^n (A - A_0) - \frac{1}{2} \sum_1^n (A_2 - A'_2) \quad 16)$$

ergibt. Da bei etwa successiver Aenderung des elastischen Zustandes z. B. infolge Temperaturänderung zwei unmittelbar auf einander folgende Werte von A_1 nahezu gleich gross sind, so wird selbst in diesem Falle die Gleichung 12)

Bestand haben und wir erhalten zur Bestimmung eines Mittelwertes von A_1 die Relation:

$$\frac{1}{n} \sum_1^n A_1 = \frac{1}{2n} \sum_1^n (A - A_0) - \frac{1}{2n} \sum_1^n (A_2 - A'_2) \quad 17)$$

Schliesst man die ersten m unmittelbar aufeinanderfolgenden

An- und Abspannungen aus, so hat man da $\sum_{m+1}^n A_1 = (n - m) A_1$ die Hauptgleichung: 18)

$$\frac{1}{n-m} \sum_{m+1}^n A_1 = \frac{1}{n-m} \sum_{m+1}^n \frac{A-A_0}{2} - \frac{1}{n-m} \sum_{m+1}^n \frac{A_2-A'_2}{2} = A_1$$

Die Erfahrung lehrt, dass schon bei $m = 1$ unter gewöhn-

lichen Verhältnissen das Glied $\frac{1}{n-m} \sum_{m+1}^n \frac{A_2-A'_2}{2}$ gegen

die übrigen vernachlässigt werden darf. In den kommenden Versuchen ist durchwegs $m = 1$ genommen, so dass wir

$$A_1 = \frac{1}{n-1} \sum_2^n \frac{A-A_0}{2} \quad 19)$$

erhalten. Eine Korrektur für den Fall, als die Weglassung des Gliedes unthunlich erscheinen sollte, was äusserst selten eintritt, wird in § 24 besprochen werden.

§ 6. Beschreibung des Apparates.

Bei allen in dieser Abhandlung in Betracht kommenden Versuchen wurden Verlängerungen der zu untersuchenden Metalldrähte durch Belastungen erzeugt und jene mittelst einer Spiegelvorrichtung gemessen. Der Apparat (Fig. 2) zur Hervorbringung der Verlängerungen bestand in einem in allen seinen Teilen sehr kräftig gebauten zwei- und zwar ungleicharmigen Hebel (Schnellwage), auf dem nahe über seiner Unterstützungsschneide ein Spiegel aufgesetzt

ist. Die Wage ist an einem eichenen Balken von 180 cm Länge, 21 cm Höhe und 8,5 cm Breite befestigt, der an beiden Enden in der Mauer einer Fensteröffnung eingekeilt und in der Nähe des Aufhängepunktes der Wage durch einen — in der Zeichnung weggelassenen — Pfosten unterstützt ist. Eine Durchbiegung des Balkens konnte an einer Libelle bei den zu diesen Versuchen gebrauchten Belastungen nicht bemerkt werden. Die Befestigung der Wage an den Balken ist mittelst einer durch denselben geschobenen, dicken Eisenstange bewerkstelliget, die durch eine Schraubenmutter gehoben und gesenkt werden kann, um dadurch, nachdem der Draht eingespannt worden, dem Hebelarm jede beliebige Stellung geben zu können. Der zu untersuchende Draht wurde einerseits am kurzen Hebelarme mittelst eines Zwischenstückes und einer Klemme so befestiget, dass er sich bei der Drehung des Hebels in seiner ursprünglichen vertikalen Lage nahezu erhielt, anderseits ist er von einer unbeweglichen Klemme festgehalten, welche in einem entsprechend gewichtigen Stein eingelassen, der auf der Grundmauer des Gebäudes ruht. Wage, Klemme und sonstige Nebenteile des Apparates haben solche Dimensionen, dass von ihrer Dehnung gegenüber der des dünnen Drahtes abgesehen werden konnte. Sämmtliche Teile sind von Eisen. Auf der Seite des kürzeren Teils des Hebels ist ein Gegengewicht an einer Schraubenspindel verstellbar, wodurch der Hebel vor der Einspannung des Drahtes in's indifferente Gleichgewicht gebracht werden konnte. Zur feineren Einstellung auf's indifferente Gleichgewicht ist ausserdem unter der Unterstützungsschneide ein kleines Gegengewicht — in der Zeichnung weggelassen — angebracht, das an einer auf dem Hebel senkrecht abwärts angesetzten Schraube verstellbar ist. Das Fernrohr und die Skala sind an einer dicken Kirchenmauer mittelst dreier dicker Eisenstangen so befestiget, dass Temperaturveränderungen vor-

wiegend nur horizontale Verschiebungen der Fernrohrachse hervorbringen können. Nur bei ganz heftigen Erschütterungen konnte nicht abgelesen werden. Die Skala wurde durch eine aufgehängte, beliebig verstellbare Petroleumflamme beleuchtet.

Um den zu untersuchenden Draht verschiedenen Temperaturen aussetzen zu können, geht er (Fig. 2) durch ein Blechrohr, das von zwei Blechmänteln umgeben ist. Das ganze Gefäss steht auf drei — in der Zeichnung weggelassenen — Füßen. Aus dem seitlich angebrachten Siedegefässe strömt Wasserdampf ein, der mit dem im innersten Raume befindlichen Drahte nicht in Berührung kommen kann. Dieser Dampf steigt in dem mittleren Raume auf und in dem äusseren herab ins Freie. Auf diese Weise wird, wie Beobachtungen ergeben haben, die Temperatur in jeder Höhe beinahe die gleiche, wenn man den entsprechenden Zeitpunkt abwartet. Durch einen — in der Zeichnung weggelassenen — Hahn konnte der Dampfmantel vom Siedegefässe abgesperrt werden; das musste geschehen, wenn zur Erzeugung niederer Temperaturen der ganze Blechmantel durch eine verschliessbare Oeffnung im Deckel mit kaltem Wasser oder Eis angefüllt wurde. Am Boden besitzt das Gefäss einen Hahn zum Ablauf für das Kondensationswasser, welches indes, um die Abkühlung vom Boden aus hintanzuhalten, bei höheren Temperaturen des Raumes nie gänzlich entfernt wurde.

Die Temperatur des Raumes ward jedesmal auf beinahe 100°C gebracht und dann die Dampfzufuhr abgesperrt. Um eine allzu rasche Abkühlung bei den höheren Wärmegraden zu vermeiden, war nach Kohlrausch der Dampfmantel aussen mit einem etwa einen Centimeter dicken Filzmantel umgeben, eine Einrichtung, die sich auch hier gut bewährte. Der Raum zwischen dem Deckel und der Klemme beträgt ca. 1 cm, zwischen dem Boden des Dampf-

mantels und der unteren Klemme ca. 3 cm. Während also oben etwa 1 cm des Drahtes frei liegt, geht das untere aus dem Dampfzylinder hervortretende Drahtstück noch durch ein Metallröhrchen, das etwa 5 cm weit in den ersteren hineinragt, wodurch das untere Drahtende nahezu die Temperatur des Ganzen annehmen kann. Oben und unten war der innerste Raum des Dampfmantels mit Kork verschlossen und mit Lehm verstrichen. Der untere Kork umschloss den Draht resp. das erwähnte Röhrchen ganz enge, während ihm oben ein mit Wolle ausgefüllter ganz kleiner Spielraum gelassen war.

Im innersten Raume des Dampfmantels stak ein Quecksilber-Thermometer, dessen zylindrisches, in die Länge gezogenes Gefäss ungefähr in der Mitte des Mantels lag. Da ein sehr grosser Teil der Skala dieses sehr empfindlichen Instruments aus dem Dampfraum hervorragte, war der notwendigen Korrektur wegen ein Thermometer in Nähe der Skala angebracht.

Ein zur Erfüllung des Zweckes unentbehrlicher Teil des Apparates ist die Vorrichtung unter dem längeren Hebelarme, die dazu dient, die Belastung allmählig von 0 bis P wachsen und von P bis 0 abnehmen zu lassen. Dadurch wird es auch möglich, bei einiger Uebung in dem Augenblicke, in welchen die Spannung einen der obenerwähnten äussersten Werte erreicht hat, mit einer anfangs nicht erwarteten Schärfe abzulesen. Diese Vorrichtung (Fig. 2) besteht in einem Metalltischchen, das mittelst Kurbel, Schraube und zweier Führungen sachte hinauf gehoben und hinabgelassen werden kann. Auf dem Tischchen steht das Belastungsstück, welches an einer Aufhängevorrichtung fest gemacht ist. Diese fällt mit der Schneide ihres oberen Querstückes in einen schwachen Einschnitt des Hebelarmes. Um den Moment, in welchem die Belastung 0 oder P ist, für den Ablesenden und den Gehilfen, der das Tischchen

stellt, scharf zu bezeichnen, ist seitlich ein elektrisches Läutwerk angebracht. Der Lauf des elektrischen Stromes ist aus der Zeichnung leicht zu ersehen. Das Geläute schweigt, sobald die Belastung 0 oder P ist. Indes ist bei einiger Uebung für den Ablesenden das Läutwerk unnötig, weil sich die kritischen Momente im Spiegel genügend scharf ankündigen. Beim Ablesen gebrauchte ich eine stellbare Sekundenuhr.

Um die Temperatur der eisernen Schienen, an welchen der Hebel aufgehängt ist, zu bestimmen, ist an einer derselben ein ausgehöhltes Eisenklötzchen mittelst Schrauben festgehalten. Die Höhle desselben ist mit Korkholz ausgefüllt und mit Quecksilber gefüllt. In der Wand der Höhle ist ein Schlitz so angebracht, dass das Quecksilber mit der Eisenschiene in unmittelbarer Berührung ist, und so mit dieser gleiche Temperatur hat. In dem Quecksilber steckt das Gefäß eines sehr empfindlichen Thermometers.

§ 7. Ausführung der Versuche im allgemeinen.

Die untersuchten Eisendrähte waren schon beim Ziehen ohne Buckel geblieben. Vor dem Einspannen in den Apparat wurden sie mit der Lupe auf etwaige Risse etc. untersucht. Der eingeklemmte Draht war durch einen ständigen Zug von cca. 2,6 kg per □ mm gerade erhalten worden. Wenn das Belastungsstück den Hebel nicht berührte, wurde abgelesen, dann von dem Gehilfen das Tischchen mit thunlichst gleichförmiger Geschwindigkeit herabgelassen, bis das Belastungsstück dasselbe nicht mehr berührte — das Geläute schwieg alsdann — und nun sofort wieder abgelesen und sogleich das Tischchen wieder hinaufgeschraubt. Bei wieder unbelastetem Drahte wurde die, für den nächsten Versuch erste, Ablesung vorgenommen und dieses Spiel des Hebels n ($n = 5$) mal wiederholt. Die Belastung 0 und P dauerte gewöhnlich 3 bis 5 Sekunden. Auf diese Weise kann für

eine Mitteltemperatur die mittlere Dehnung gefunden werden. Die hiedurch beobachteten Zahlen sind in den kommenden Tabellen in den mit a, b, c überschriebenen Rubriken enthalten. Die Zahlen a_n , b_n , c_n sollen die Ablesungen des n^{ten} Versuches bedeuten. Das Thermometer des Dampfmantels und das am Hebel angebrachte wurden am Anfang und am Ende einer jeden Versuchsgruppe sorgfältig abgelesen und die Ablesungen des ersteren entsprechend korrigiert. Von Zeit zu Zeit wurde auch die Lufttemperatur notiert.

§ 8. Theorie des Apparates im allgemeinen.

Fig. 3 stellt eine schematische Zeichnung des Apparates vor. SS sei die Skala, F das Fernrohr, JJ der Spiegel, HH der Hebel, letzterer in derjenigen Stellung, bei welcher der mit dem Fadenkreuz zusammenfallende Teilstrich der Skala, der mit 0 bezeichnet ist, abgelesen wird. Ich werde nach Kohlrausch diese Lage „mittlere Stellung“ (m. St.) nennen. Von dieser m. St. aus müsste jede Messung vorgenommen werden. Obgleich der Apparat diese Einstellung vor jedem einzelnen Versuch gestatten würde, scheint dies, abgesehen von dem Zeitverluste nicht wohl thunlich, weil verschiedene Einflüsse, besonders die Wärme, Verstellungen zur Folge haben könnten. Andererseits erlaubt dies auch der Zweck der Beobachtung nicht immer. Diese Umstände erheischen es, bei der Berechnung der wirklichen Verlängerung des Drahtes von einer Anfangsstellung des Spiegels auszugehen, die bereits um φ^0 von der m. St. abweicht.

Ist die Entfernung des Spiegels in seiner m. St. von der Skala r_1 und die Länge des Hebelarmes $OH = r_2$, alle Grössen in Skalenteilen, deren einer = 2 mm gemessen; ferner die Entfernung des abgelesenen Skalenteiles von der m. St. n_0 , sowie n_1 die Ablesung, wenn sich der Spiegel um φ_1^0 von seiner m. St. entfernt hat, also $\varphi^0 = \varphi_1^0 - \varphi_0^0$ seine wirkliche Drehung beträgt, und der Zeiger im Fern-

rohr um $z = n_1 - n_0$ Skalenteile bewegt worden ist, so hat man, wenn l_0, l_1, l die den Winkeln entsprechenden Verlängerungen des Drahtes sind:

$$l = l_1 - l_0 = 2r_2 \left(\sin \frac{\varphi_1}{2} - \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) \quad (20)$$

wo φ_0 und φ_1 aus den Gleichungen

$$n_0 = r_1 \operatorname{tg} 2 \varphi_0 \quad (21)$$

$$n_1 = r_1 \operatorname{tg} 2 \varphi_1 \quad (22)$$

zu bestimmen sind. Dabei sind die Bogen l_0, l_1, l als gerade genommen und ist von den kleinen Aenderungen des r_1 infolge der Drehung des Spiegels, sowie davon, dass die Spiegelebene nicht die Drehungsachse enthält, sondern sich beide nur sehr nahe sind, abgesehen.

Für die hier in Betracht kommenden Winkel kann die Rechnung von denselben unabhängig gemacht werden, indem eine Reihenentwicklung der Werte von φ_0 und φ_1 aus Gl. 21) und 22)

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} = \frac{n_0}{4r_1} \left[1 - \frac{11}{2} \cdot \left(\frac{n_0}{4r_1} \right)^2 \right] \text{ und analog}$$

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} = \frac{n_1}{4r_1} \left[1 - \frac{11}{2} \cdot \left(\frac{n_1}{4r_1} \right)^2 \right] \text{ ergibt.}$$

Die Benützung dieser Werte führt zu:

$$l = 2r_2 \left[\frac{n_1 - n_0}{4r_1} - \frac{11}{2} \cdot \frac{n_1^3 - n_0^3}{(4r_1)^3} \right] \quad (23)$$

Ist $n_1 - n_0 = z$ ein gegen $4r_1$ kleiner Wert, so kann

$$l = \frac{1}{2} \cdot \frac{r_2}{r_1} \cdot z \quad (24)$$

genommen werden.

§ 9. Einfluss der Temperatur auf den Apparat.

Wenn während eines Versuches eine Temperaturänderung vor sich geht, so veranlasst sowohl die Längenveränderung des Drahtes als auch des vertikalen Theils der Hebelvorrichtung eine Verstellung des Skalenzeigers und zwar beider in gleichem oder entgegengesetztem Sinne, je nachdem die Temperaturänderung bei beiden in gleichem oder verschiedenem Sinne vor sich geht. Denkt man diese Längenveränderungen getrennt sich vollziehend, so zeigt Fig. 4 den Vorgang im Apparate. Ist die Temperaturänderung im Apparate $\tau_1 - \tau_0$, im Drahte $t - T$ und sind die entsprechenden Längenänderungen l und l' , so ist im

$$\text{Hinblicke auf Gl. 24) } z = 2 \frac{r_1}{r_2} l \quad 25)$$

$$\text{und da} \quad l = r_2 (\varphi_1 + \varphi_2) \quad 26)$$

und $l' = r_2 \varphi_1$, sowie $l' = r_2 \varphi_2$, so ist:

$$z = 2 \frac{r_1}{r_2} (l + l')$$

Ist nun d_1 die Länge des hier in Betracht kommenden vertikalen Theils des Apparates und d_2 die des Drahtes, beide in Skalenteilen gemessen, sind dann α_1 und α_2 die bezüglichen thermischen Ausdehnungskoeffizienten, so ist:

$l = d_1 \alpha_1 (\tau_1 - \tau_0)$ und $l' = d_2 \alpha_2 (t - T)$, und somit

$$z = 2 \frac{r_1}{r_2} \left[k_1 (\tau_1 - \tau_0) + k_2 (t - T) \right] \quad 27)$$

In unserem Falle wird:

$$k_1 = d_1 \alpha_1 = 430.0,000012 = 0,005160$$

$$k_2 = d_2 \alpha_2 = 536.0,000012 = 0,006432$$

$$2 \frac{r_1}{r_2} = 2 \cdot \frac{2806}{35,4} = 2 \cdot 79,265 = 158,530.$$

Für verhältnismässig kurze Zeiten kann häufig $\tau_1 - \tau_0 = 0$ gesetzt werden, dann ist $z = 2 \frac{r_1}{r_2} k_2 (t - T) = 1,07 (t - T)$

Diese zu Korrekturen häufig gebrauchte Formel wurde experimentell geprüft. Das arithmetische Mittel aus 12 Beobachtungen ergab 1,08 Skalenteile für einen Grad der Temperaturänderung. Lässt man eine bei den höheren Temperaturen gemachte Beobachtung, welche etwas weit vom Mittel abweicht, weil anfänglich $\tau_1 - \tau_0 = 0$ auch für kurze Zeit nicht mehr genügend genau sein wird, weg, so erhält man als Mittel der übrigen Beobachtungen zufällig 1,07 Skalenteil für 1° C.

§. 10. Ermittlung der Temperatur des untersuchten Drahtes.

Das in dem Blechmantel angebrachte Thermometer wurde nur zur Bestimmung der extremen und der zu Korrekturenrechnungen notwendigen Temperaturen gebraucht. Von der Verwendung desselben zur Bestimmung der Temperatur des untersuchten Drahtes wurde abgesehen, weil anzunehmen ist, dass zwar der dünne Draht, nicht aber das mit einem ziemlich grossen Gefässe versehene Thermometer der Abkühlung des Dampfraumes folgen werde, somit eine Korrektur der Ablesungen erforderlich geworden wäre. Ich entschloss mich daher, die jeweilige Temperatur des Drahtes aus den Spiegelablesungen zu berechnen, also ihn selbst als thermometrische Substanz zu benützen. Hiedurch wird auch noch dem Umstande, dass der Draht voraussichtlich nicht in seiner ganzen Länge vollkommen genau dieselbe Temperatur besitzt, Rechnung getragen. Man erhält eine mittlere Temperatur des Drahtes, sowie den dieser entsprechenden mittleren Einfluss auf die Elastizität desselben. Um eine Korrektur wegen der Aenderung des thermischen

Koeffizienten infolge der Spannung ¹⁾ des Drahtes zu umgehen, wurde behufs Temperaturbestimmung stets bei fast ungespanntem Drahte an der Spiegelskala abgelesen. Ausserdem geschah die Ablesung behufs Temperaturbestimmung nachdem der Draht einige Zeit schwach gespannt gewesen war, um den aus der elastischen Nachwirkung entspringenden Fehler auf ein Minimum zu reduzieren.

Bezeichnet nun T die Anfangstemperatur des Drahtes, τ_0 die Anfangstemperatur des vertikalen Theils des Apparates, n_0 den hiebei abgelesenen Skalenteil, ferner t die Endtemperatur des Drahtes, τ_1 die des Apparates und n_1 den hiebei beobachteten Skalenteil, so ist gemäss Gl. 27)

$$n_1 - n_0 = 2 \frac{r_1}{r_2} \left[k_1 (\tau_1 - \tau_0) + k_2 (t - T) \right] \text{ woraus sich}$$

$$\text{ergibt: } t = T + C \cdot \frac{1}{\alpha_2} (n_1 - n_0) - \frac{k_1}{k_2} (\tau_1 - \tau_0) \quad 28)$$

Hierin ist für unsere Versuche

$$C = \frac{1}{2} \cdot \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{1}{d_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{35,4}{2806} \cdot \frac{1}{536} = 0,00001177$$

$$\text{und } \frac{k_1}{k_2} = 0,87 = c$$

Zur Bestimmung von $\frac{k_1}{k_2} = \frac{d_1 \alpha_1}{d_2 \alpha_2}$ ist $\alpha_1 = \alpha_2$ genommen

worden, was wegen der durchschnittlich geringen Werte der Differenz $\tau_1 - \tau_0$ wohl zulässig erscheint.

Nun ist $\frac{dt}{d\alpha} = -C (n_1 - n_0) \alpha_2^{-2}$; es würde somit ein um $\Delta \alpha_2 = 0,0000001$ fehlerhafter Wert einen Temperatur-

1) Dahlander, Poggendorff's Annalen. Bd. 145.

fehler $\Delta t = -C(n_1 - n_0)\alpha_2^{-2} \Delta\alpha_2$ nach sich ziehen. Dies gäbe für $n_1 - n_0 = 100$ schon $-0,8^\circ\text{C}$. Es erscheint somit nicht nur notwendig für den vorliegenden Fall α_2 , besonders zu bestimmen, sondern auch auf dessen Abhängigkeit von der Temperatur Rücksicht zu nehmen. Ersteres geschah, indem man die Temperatur des Drahtes von der ziemlich nahe an 0° liegenden bis zum Siedepunkte erhöhte und am Anfange und Ende die sämtlichen in Gl. 28) vorkommenden Grössen, insoweit diess möglich, ablas und hieraus α_2 berechnete. Es müssen schon deshalb extreme Temperaturen gewählt werden, um die Thermometerablesung als zuverlässig betrachten zu können. Das Resultat der Beobachtung und Rechnung enthält die

Tabelle I.

Nr.	T	τ_0	n_0	t	τ_1	n_1	α_2 (berechnet)	Mittelwert von α_2 für:
1	4,81	5,10	74,4	98,7	9,60	178,0	0,000012466	4,10° bis 98,66° C 0,000012429
2	3,62	4,45	71,0	99,0	8,10	174,8	0,000012395	
3	3,87	4,45	71,0	99,0	8,10	174,8	0,000012427	
4	3,87	4,45	71,0	8,52	5,55	76,3	0,000011118	3,75° bis 8,52° C 0,000010881
5	3,62	4,45	71,0	8,52	5,55	76,3	0,000010644	

Der erste der vorstehenden Mittelwerte kann als Ausdehnungskoeffizient des Drahtes zwischen 0° und 100° , der zweite als solcher zwischen 0° und 10°C . betrachtet werden.

Die Anwendung der Formel:

$$L = L_0 (1 + \alpha t + \alpha'' t^2)^{1)}$$

wobei für Eisen $\alpha = 0,0000103895$, $\alpha'' = 0,000000014315$, ergibt als Ausdehnungskoeffizienten für:

$0^\circ - 10^\circ\text{C}$: 0,00001053265 für

1) Mousson, § 460.

$$0^{\circ} - 100^{\circ}\text{C}: 0,0000118210. \text{ Während aber } \frac{0,0000118210}{0,00001053265} \\ = 1,1223, \text{ ist } \frac{0,000012429}{0,000010881} = 1,1422.$$

Die Zahl 0,000010881 kann als von Hauptfehlern frei angesehen werden, weil sich die zu ihrer Berechnung nötigen Grössen genau ablesen liessen. Dies ist bei dem andern Mittelwert bezüglich des τ_1 nicht der Fall. Es erscheint der Mittelwert des Ausdehnungskoeffizienten zwischen 0° und 100° zu hoch; er soll, vorausgesetzt, dass der Einfluss der Temperatur auf den thermischen Koeffizienten aller Eisensorten wenigstens annähernd derselbe ist, nur 0,000010881 $\cdot$ 1,1223 = 0,00001221202 betragen.

Beachtet man, dass

$$\frac{d\alpha_2}{d\tau_1} = -Cc(n_1 - n_0)[t - T + c(\tau_1 - \tau_0)]^{-2}, \quad 29)$$

so ist der Fehler $\Delta\alpha_2 = -\frac{d\alpha_2}{d\tau_1}\Delta\tau_1$, und man sieht, dass ein neg. Fehler bei der Ablesung des τ_1 einen pos. bei α_2 erzeugt.

Wenn man berücksichtigt, dass der vertikale Teil des Apparates vom Dampfmantel wegen des verschiedenen Abstandes seiner Teile von der Wärmequelle ungleich erwärmt werden muss, so kann der abgelesene Wert τ_1 , sobald er sich merklich von der Lufttemperatur entfernt, nur als ein Mittelwert betrachtet werden. Zuzufolge Gl. 29) beeinflusst ein Fehler von 1° noch die 7. Stelle, die wir noch genau kennen sollen, wenn der untersuchte Draht als Thermometer benützt werden will. Es wird an der passenden Stelle eine Korrektur angebracht werden.

§ 11. Berücksichtigung der Veränderlichkeit von α_2 .

Für genaue Temperaturmessungen bei grossen Intervallen ist es, wie schon erwähnt, notwendig, die Abhängig-

keit des thermischen Koeffizienten von der Temperatur in Betracht zu ziehen.

Ist L_0 die Länge des Drahtes bei 0° , L_T bei T° und L_t bei t° , so ist:

$$\begin{aligned} L_T &= L_0 (1 + \alpha T + \alpha'' T^2) \\ L_t &= L_0 (1 + \alpha t + \alpha'' t^2) \text{ somit} \\ L_t &= L_T \cdot \frac{1 + \alpha t + \alpha'' t^2}{1 + \alpha T + \alpha'' T^2} \text{ wofür} \quad 30) \\ L_t &= L_T [1 + \alpha (t - T) + \alpha'' (t^2 - T^2)] \end{aligned}$$

gesetzt werden kann. Darnach dehnt sich die Länge L_T bei der Temperaturerhöhung von T° auf t° um

$$L_t - L_T = L_T [\alpha'' (t - T) + \alpha'' (t^2 - T^2)] \quad 31) \text{ aus.}$$

Da bei so grossen Temperaturunterschieden, wie sie hier vorkommen, auch darauf Rücksicht zu nehmen ist, an welcher Stelle der Skala abgelesen wird, so haben wir unter Einführung der bisher gebrauchten Bezeichnungen die Gleichung:

$$\begin{aligned} d_1 \alpha_1 (\tau_1 - \tau_0) + d_2 [\alpha (t - T) + \alpha'' (t^2 - T^2)] - \\ 2r_2 \left[\frac{n_1 - n_0}{4r_1} - \frac{11}{2} \cdot \frac{n_1^3 - n_0^3}{(4r_1)^3} \right] = 0 \quad 32) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich unter Hinweglassung des neg. Wurzelwertes:

$$\begin{aligned} t = \frac{1}{2\alpha''} \left\{ -\alpha + \sqrt{4\alpha'' [\alpha T + \alpha'' T^2 + 2 \frac{r_2}{d_2} \cdot \right. \\ \left. \left(\frac{n_1 - n_0}{4r_1} - \frac{11}{2} \cdot \frac{n_1^3 - n_0^3}{(4r_1)^3} \right) - \frac{d_1}{d_2} \alpha_1 (\tau_1 - \tau_0)] + \alpha^2} \right\} \quad 33) \end{aligned}$$

Setzt man der Kürze halber:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\alpha''} &= q_1 & \frac{11}{64} \cdot \frac{r_2}{d_2 r_1^3 \alpha''} &= q_2 & \left(\frac{\alpha}{2\alpha''} \right)^2 &= q_3 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{r_2}{d_2 r_1 \alpha''} &= q_4 & \frac{d_1 \alpha_1}{d_2 \alpha''} &= q_5 & \frac{\alpha}{2\alpha''} &= q_6 \end{aligned}$$

so geht Gl. 33) in folgende über:

$$t = \sqrt{\frac{T^2 + q_1 T + q_2 (n_1 - n_0) - q_3 (n_1^3 - n_0^3)}{q_4 (\tau_1 - \tau_0) + q_5 - q_6}} \quad 34)$$

§ 12. Die Korrektur der Ablesung τ_1 .

Wenn der Dampfmantel bis zum Siedepunkt erhitzt wird, so ist die Temperatur des vertikalen Teils des Apparates von der Lufttemperatur τ verschieden und τ_1 nur als genähert richtig zu betrachten. Da für $\tau_1 = \tau$ der Fehler der Ablesung 0 sein muss, so dürfte es angehen, ihn $= \gamma (\tau_1 - \tau)$ zu setzen, wobei γ eine für ein bestimmtes τ_1 und τ zu bestimmende Konstante ist. Dann geht das Glied $q_4 (\tau_1 - \tau)$ der Gl. 34) in

$q_4 [\tau_1 + \gamma (\tau_1 - \tau) - \tau_0] = q_4 [(\tau_1 - \tau_0) + \gamma (\tau_1 - \tau)]$ über. Sobald bei einem Versuche nahezu $\tau_1 = \tau$ wird, muss für die Folge $\gamma = 0$ gesetzt werden. Auf diese Weise ergibt sich für

$$t = \sqrt{\frac{T(T + q_1) + q_2 (n_1 - n_0) - q_3 (n_1^3 - n_0^3)}{q_4 [(\tau_1 - \tau_0) + \gamma (\tau_1 - \tau)] + q_5 - q_6}} \quad 35)$$

Da, wenn der Dampfmantel vollständig erkaltet T und wenn er bis zum Siedepunkte erwärmt auch t genau abgelesen werden kann, so lässt sich für jeden Versuchstag γ aus folgendem aus Gl. 35) hervorgehendem Ausdrucke berechnen; es ist nämlich:

$$\gamma = \frac{T(T + q_1) + q_2 (n_1 - n_0) + q_5 - (t + q_6)^2 - q_3 (n_1^3 - n_0^3)}{q_4 (\tau_1 - \tau)} - \frac{\tau_1 - \tau_0}{\tau_1 - \tau} \quad 36)$$

§ 13. Bestimmung der mittleren Temperatur des Drahtes während eines kleinen Zeitraumes.

Weil die in den Tabellen angeführten Versuche stets einige Minuten in Anspruch nehmen, so ist zur Ermittlung der Beziehung von Elastizität und Temperatur die mittlere Temperatur des Drahtes während des Zeitraumes von der Ablesung a_1 bis zu jener a_n (gewöhnlich a_5) zu ermitteln. Steigt während dieser Zeit die Temperatur im Gefäße von τ_0 auf τ_1 , welche Werte am gebogenen Thermometer mit hinreichender Sicherheit angezeigt werden, so ist, da am Ende des Versuches der Zeiger im Fernrohre auf dem Teilstrich, von Temperaturänderung des Apparates und Nach-

wirkung abgesehen, $a_1 + 2 \frac{r_1}{r_2} k_2 (\tau_1 - \tau_0)$ gestanden wäre:

$$n_1 = \frac{a_1 + a_1 + 2 \frac{r_1}{r_2} k_2 (\tau_1 - \tau_0)}{2} = a_1 + \frac{r_1}{r_2} k_2 (\tau_1 - \tau_0),$$

wo a_1 die erste Ablesung ist. Setzt man $n_1 = a_1 + \nu_1$ so geht Gl. 35) in folgende über:

$$t = \sqrt{T(T + q_1) + q_2 [(a_1 + \nu_1) - n_0] - q_3 [(a_1 + \nu_1)^2 - n_0^2] - q_4 [(\tau_1 - \tau_0) + \gamma(\tau_1 - \tau)] + q_5} - q_6 \quad 37)$$

worin $\nu_1 = \frac{r_1}{r_2} d_2 \alpha_2 (\tau_1 - \tau_0)$ ist.

§ 14. Bestimmung der Konstanten α und α'' in Gl. 33) für den untersuchten Draht.

Hiebei setze ich voraus, dass bei verschiedenen Eisendrahtsorten die Aenderung der thermischen Ausdehnung mit der Temperatur nach demselben Gesetze vor sich gehe.

Setzt man in Gl. 30) $L_T = 1$ und $L_t - L_T = {}^t_r L$ dann ist für den Normaldraht ¹⁾ 38)

$${}^t_r L_0 = 0,0000103895 (t - T) + 0,000000014135 (t^2 - T^2)$$

Für den untersuchten Draht ist:

$${}^t_r L = \alpha (t - T) + \alpha'' (t^2 - T^2) \quad 39)$$

Ist der mittlere Ausdehnungskoeffizient des Normal-

drahtes $\alpha_0 = \frac{{}^t_r L_0}{t - T}$, der des untersuchten

$$\alpha = \frac{{}^t_r L}{t - T}, \text{ so hat man}$$

$${}^t_r L = x \cdot {}^t_r L_0 \text{ also } x = \frac{\alpha}{\alpha_0}.$$

Somit ist:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha_0} \cdot 0,0000103895 = 0,000010732$$

$$\alpha'' = \frac{\alpha}{\alpha_0} \cdot 0,000000014135 = 0,000000014788, \text{ weil nach}$$

Gleichung 38)

$${}^{10}_0 \alpha_0 = 0,000010533 \text{ und nach Tabelle I}$$

$${}^{10}_0 \alpha = 0,000010881 \text{ ist.}$$

§ 15. Die Konstanten q in der Gl. 37).

Nun ist für den untersuchten Draht:

$$q_1 = \frac{\alpha'}{\alpha''} = \frac{0,000010732}{0,000000014788} = 725,7237.$$

$$q_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{r_2}{d_2 r_1 \alpha''} = \frac{1}{2} \cdot \frac{35,4}{536.2806.0,000000014788} = 795,8137$$

1) Mousson, Physik, § 460.

$$q_3 = \frac{11}{64} \cdot \frac{r_2}{d_2 r_1^3 \alpha''} = \frac{11}{64} \cdot \frac{35,4}{536.2806^3 \cdot 0,000000014788} \\ = 0,000034744$$

$$q_4 = \frac{d_1 \alpha_1}{d_2 \alpha''} = \frac{430.0,000012}{536.0,000000014788} = 650,9917$$

$$q_5 = \left(\frac{\alpha'}{2\alpha''} \right)^2 = 131668,73$$

$$q_6 = \frac{\alpha'}{2\alpha''} = 362,8618$$

Endlich $\nu_1 = 0,51 (\tau_1 - \tau_0)$.

§ 16. Einfluss der Temperatur auf den Hebel.

Endlich ist noch eine mögliche Fehlerquelle des Apparates zu untersuchen. Durch das Dampfgefäß wird der über ihm stehende kürzere Hebelarm von Ablesung zu Ablesung eine Temperaturveränderung erfahren und dadurch die Zeigerstellung verändert. Es sei bei der Ablesung n die Temperatur w und die Winkelstellung des Hebels φ^0 , dann wird bei der Temperatur w_1 des Hebels die Ablesung n_1 und die Winkelstellung φ_1^0 stattfinden und zwar infolge der Längenänderung des kürzeren Hebelarmes, während die Drahtlänge unverändert blieb. Dies führt zu der Relation:

$$r_2 \varphi = r_2 [1 + \alpha_1 (w_1 - w)] \varphi_1 \text{ oder nach Einführung der Werte für } \varphi \text{ und } \varphi_1 \\ n = n_1 [1 + \alpha_1 (w_1 - w)].$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Unterschied zwischen der richtigen Ablesung n und der falschen n_1 selbst bei den grössten hier vorkommenden Werten von n_1 , α_1 , w_1 und w nicht $\frac{1}{10}$ Skalenthail erreicht, somit die Beobachtung nicht fehlerhaft macht, weshalb diese Fehlerquelle gänzlich vernachlässigt werden wird.

§ 17. Das Thermometer im Dampfraume.

Dasselbe liess an Richtigkeit sehr viel zu wünschen übrig. Es wurde deshalb nach einem anderen sehr gut kalibrischem Thermometer, nachdem die Fundamentalpunkte dieses genau bestimmt worden waren, durch Beobachtung von 10^0 zu 10^0 und Interpolation unter Berücksichtigung des freiliegenden Theils des Quecksilberfadens etc. korrigiert. Wenn im Normalthermometer die Zahl N abgelesen wurde, so ergab sich die wahre Temperatur t desselben aus der Formel:

$$t = - 0,13 + 1,0045 N.$$
§ 18. Verwendung der Ablesungen a , b , c , zur Berechnung von A_1 .

Zur Berechnung der elastischen Verlängerung in Skalenteilen haben wir in die Gl. 19) die beobachteten Werte a_n , b_n , c_n einzuführen. Zugleich ist aber auch darauf Bedacht zu nehmen, dass infolge etwaiger Temperaturänderung des Drahtes oder vertikalen Theils des Apparates oder beider zugleich die Ablesung nicht die Werte von A und A_0 genau liefert. Bezeichnen wir den beim Anspannen des Drahtes durch Temperaturerhöhung entstandenen Fehler der Ablesung mit p_1 , den beim unmittelbar darauf folgenden Abspannen mit p_2 , so hat man:

$$b - a = A_1 + A_2 + p_1 = A + p_1 \quad 40)$$

$$c - b = - A'_1 + A'_2 + p_2 = A_0 + p_2 \quad 41)$$

$$\text{Also:} \quad A = (b - a) - p_1 \quad 42)$$

$$A_0 = (c - b) - p_2 \quad 43)$$

und folglich:

$$A_1 = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{2} \sum_2^n [2b - (a + c) - (p_1 - p_2)] \quad 44)$$

§ 19. Die Abkühlungsgeschwindigkeit des Dampfraumes.

I. Für das Wertverhältnis von p_1 und p_2 in Gl. 44) ist die Abkühlungsgeschwindigkeit des Dampfraumes zunächst massgebend. Ist nun t die Temperaturdifferenz desselben und der Luft zur Zeit x vom Momente an gerechnet, wo erstere T_0 ist, und K eine Konstante, so ist nach dem *Newton'schen* Abkühlungsgesetze:

$$-\frac{dt}{dx} = Kt \quad 45)$$

Die Gleichung: $\int \frac{dt}{t} = -K \int dx$ liefert

$$t = T_0 e^{-Kx} \quad 46)$$

Zur Bestimmung der Konstanten K hat man:

$$K = \frac{\log t_1 - \log t_2}{(x_2 - x_1) \log e} \quad 47)$$

Diese Ausdrücke sind bekanntlich nur bis zu Temperaturdifferenzen von etwa 50°C verwendbar. Es wurde ein Versuch, bei welchem die mittlere Temperatur der Luft $17,75^\circ\text{C}$ betrug, angestellt. Für die Wertpaare:

$$\text{I. } \begin{cases} t_1 = 27,35; & x_1 = 262,5 \\ t_2 = 10,19; & x_2 = 557,5 \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} t_1 = 45,78; & x_1 = 115 \\ t_2 = 34,40; & x_2 = 194 \end{cases}$$

ergab sich beziehungsweise:

$K_I = 0,003346$; $K_{II} = 0,003618$ und als Mittelwert $K = 0,0035$.

II. Wendet man für höhere Temperaturdifferenzen nach *Petit* und *Dulong* die Form:

$$t = T_0 m^{\alpha x + \beta x^2} \quad 48)$$

an, so erhält man, wenn $M = 0,43429$ (M. d. gem. Logar.-Systems) und $m = 10$ genommen wird:

$$\alpha = M \cdot \frac{x_2^2 \log \frac{t_1}{T_0} - x_1^2 \log \frac{t_2}{T_0}}{x_1 x_2 (x_2 - x_1)}$$

$$\beta = M \cdot \frac{x_2 \log \frac{t_1}{T_0} - x_1 \log \frac{t_2}{T_0}}{x_1 x_2 (x_1 - x_2)}$$

Nimmt man aus derselben Versuchsreihe wie bei I die Wertpaare:

$$\left. \begin{array}{ll} t_1 = 66,85 & x_1 = 29,15 \\ t_2 = 56,17 & x_2 = 60,12 \end{array} \right\} \text{III} \quad \left. \begin{array}{ll} t_1 = 60,57 & x_1 = 52,00 \\ t_2 = 45,78 & x_2 = 115,00 \end{array} \right\} \text{IV}$$

so erhält man die Mittelwerte:

$$\alpha = -0,00285; \beta = 0,00000528.$$

§ 20. Beziehung der Werte p_1 und p_2 .

I. Die Zeiten, welche zum An- und Abspannen gebraucht werden, können als gleich angesehen und ihre Grösse kann immer < 1 gemacht werden. Die Zeit des Anspannens betrage ξ , die während derselben vor sich gegangene Temperaturveränderung δ_1 , die während des Abspannens δ_2 . Wie schon erwähnt, muss man der Temperaturänderung des Drahtes den weitaus überwiegenden Einfluss auf die Grösse von p_1 und p_2 zuschreiben. Dies vorausgesetzt erhält man:

$$t = T_0 e^{-Kx}$$

$$t_1 = T_0 e^{-K(x+\xi)}; \text{ daher}$$

$$\frac{t - t_1}{t_1} = e^{K\xi} - 1 \text{ und}$$

$$\delta_1 = t_1 (e^{K\xi} - 1); \text{ analog ist:}$$

$$\frac{t_2 - t_1}{t_1} = e^{-K\xi} - 1 \text{ somit}$$

$$\delta_2 = -t_1 (e^{-K\xi} - 1).$$

Da $e^{\pm K\xi} = 1 \pm K\xi + \frac{K}{2!}\xi^2 \pm \dots$ ist und

beim 3. Gliede abgebrochen werden kann, so ist

$$\delta_1 = t_1 K\xi$$

$$\delta_2 = t_1 K\xi \text{ also } \delta_1 = \delta_2 \text{ und somit auch}$$

$$p_1 = p_2 \text{ für Temperaturen bis etwa } 50^\circ \text{C.}$$

II. Für höhere Temperaturen hat man zur Zeit $x + \xi$ und $x + 2\xi$.

$$t_1 = T_0 m^{\alpha(x+\xi) + \beta(x+\xi)^2}$$

$$t_2 = T_0 m^{\alpha(x+2\xi) + \beta(x+2\xi)^2} \text{ und daraus}$$

$$t - t_1 = \delta_1 = t_1 \left[m^{-(\alpha\xi + 2\beta x\xi + \beta\xi^2)} - 1 \right]$$

$$t_2 - t_1 = -\delta_2 = t_1 \left[m^{\alpha\xi + 2\beta x\xi + 3\beta\xi^2} - 1 \right]$$

Eine Entwicklung nach der Maclaurin'schen Reihe nach Potenzen von ξ gibt, wenn man mit dem 2. Gliede abbricht:

$$m \frac{-(\alpha \xi + 2\beta x \xi + \beta \xi^2)}{\alpha \xi + 2\beta x \xi + 3\beta \xi^2} = 1 - (\alpha + 2\beta x) l(m) \cdot \xi + \dots$$

$$m \frac{\alpha \xi + 2\beta x \xi + 3\beta \xi^2}{\alpha \xi + 2\beta x \xi + 3\beta \xi^2} = 1 + (\alpha + 2\beta x) l(m) \cdot \xi + \dots$$

somit:

$$\delta_1 = -t_1 (\alpha + 2\beta x) l(m) \cdot \xi$$

$\delta_2 = -t_1 (\alpha + 2\beta x) l(m) \cdot \xi$ also ist $\delta_1 = \delta_2$ und schliesslich $p_1 = p_2$ auch für höhere Temperaturdifferenzen.

§ 21. Elimination des Temperatureinflusses auf die Beobachtung.

Da gemäss § 20 für alle hier in Betracht kommende Beobachtungszeiten $p_1 - p_2 = 0$ gesetzt werden darf, so geht die Gl. 44) in

$$A_1 = \frac{1}{n-1} \sum_2^n \left[b - \frac{a+c}{2} \right] \quad 48)$$

für die folgenden Versuche über. Wie aus ihr ersichtlich, wird die Beobachtung durch das in § 7 angegebene Versuchsverfahren von der Temperatur bei Messung der elastischen Dehnung unabhängig.

§ 22. Zahlenwert des Verhältnisses von p_1 und p_2 .

Im vorigen § wurde die in der Regel anwendbare Formel zur Ermittlung der elastischen Dehnung aufgestellt. Um ein Urteil zu bekommen, in wie weit für eine Versuchsreihe $p_1 - p_2 = 0$ als hinlänglich richtig genommen werden darf, ist es nicht überflüssig, das Zahlenverhältnis von δ_1 und δ_2 (§ 20) genau zu kennen.

I. Für Temperaturdifferenzen bis ungefähr 50°C ist dieses Verhältnis von der Zeit x unabhängig,

also für denselben Versuch konstant. Man erhält aus den Gleichungen des § 20 I

$$\delta_2 = \delta_1 \cdot e^{-K\xi} \quad 49)$$

Bei den später angeführten Versuchen entfällt auf die 10 An- und Abspannungen höchstens die Zeit von 4', somit ist $\xi = 0,4'$. Ferner ist für die Mitteltemperatur der Luft von 17,75°C

$$e^{K\xi} = 2,71828^{0,0035 \cdot 0,4} = 1,0014 \text{ somit} \\ \delta_2 = 0,99860 \delta_1.$$

II. Für höhere Temperaturdifferenzen ist nach den Gleichungen des § 20 II:

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{1 - m \frac{\alpha\xi + 2\beta x\xi + \beta\xi^2}{\alpha\xi + 2\beta x\xi + \beta\xi^2} \cdot m^{\alpha\xi + 2\beta x\xi + \beta\xi^2}}{1 - m}$$

Setzt man $u = m^{\alpha\xi + 2\beta x\xi + \beta\xi^2}$ so ergibt sich:

$$\delta_2 = \frac{1 - u \cdot m^{2\beta\xi^2}}{1 - u} \cdot u \cdot \delta_1 \quad 50)$$

Unter Benützung der Zahlen der im § 19 erwähnten Versuchsreihe erhält man:

$$\alpha\xi = -0,001140; 2\beta x\xi = 0,00004224; \beta\xi^2 = 0,00000084; \\ m^{2\beta\xi^2} = 1,0000039;$$

sohin kann man $\delta_2 = u \cdot \delta_1$ setzen. Der Wert von u ist von der Zeit x abhängig. Es wird für den in Rede stehenden Fall für $x = 10'$ das $\delta_2 = 0,99748\delta_1$. Für kleinere Werte von x muss sich u weiter von 1 entfernen. In der That wird für $x = 1'$ das $u = 0,99739$.

III. Die in I und II ermittelten Zahlenverhältnisse gelten strenge nur für die Lufttemperatur von $17,75^{\circ}\text{C}$. Die nachfolgenden Versuche wurden meist im Winter bei niederen Zimmertemperaturen — durchschnittlich $3 - 6^{\circ}\text{C}$ — angestellt. Die auf der Skala sich aufzeichnenden Werte p_1 und p_2 sind jenen von δ_1 und δ_2 proportional. Die Gl. $p_1 - p_2 = 0$ verliert möglicherweise ihre bislang genügend strenge Giltigkeit zunächst bei höheren Temperaturdifferenzen. Aber auch hier sind die Abweichungen der von x abhängigen Werte u von einander so gering, dass man recht wohl einen Mittelwert benützen darf. Es sei dieser ν , so erhält man für $2n$ nacheinander folgende An- und Abspannungen:

$$\begin{array}{rcl}
 p_2 & = \nu & p_1 \\
 p_2 & = \nu & p_1 \\
 p_2 & = \nu & p_1 \\
 . & . & . \\
 . & . & . \\
 \hline
 \sum_1^{2n} p_2 & = \nu & \sum_1^{2n} p_1
 \end{array}
 \qquad 51)$$

worin $\nu = \frac{\delta_2}{\delta_1}$.

§. 23. Die elastische Nachwirkung während der An- und Abspannungen.

Nach Gl. 13) ist:

$$\sum_1^n (A_2 + A'_2) = \sum_1^n A + \sum_1^n A_0, \text{ sohin zufolge}$$

Gl. 42) und 43)

$$\sum_1^n (A_2 + A'_2) = \sum_1^n [(c - a) - (p_1 + p_2)]; \text{ und da}$$

gewöhnlich $p_1 + p_2 = 2p$ gesetzt werden kann:

$$\sum_1^n (A_2 + A'_2) = \sum_1^n (c - a) - \sum_1^n (2p), \text{ welcher Ausdruck}$$

in Rücksicht auf Gl. 27) in

$$\sum_1^n (A_2 + A'_2) = \sum_1^n (c - a) - 2 \frac{r_1}{r_2} [k_1 (\tau_1 - \tau_0) + k_2 (t - T)]$$

übergeht. 52)

Für die gegenwärtigen Versuche ergibt sich:

$$\sum_1^5 A' = \sum_1^5 (A_2 + A'_2) = \sum_1^5 (c - a) - [0,82(\tau_1 - \tau_0) + 1,01(t - T)]$$

53)

§ 24. Berücksichtigung des Gliedes: $\frac{1}{n - m_{m+1}} \sum_{m+1}^n \frac{A_2 - A'_2}{2}$
in Gl. 18).

Kann dieses Glied nicht vernachlässigt werden, so dürfte sich eine Korrektur auf folgende Art ergeben:

$$\text{Es ist: } \sum_{m+1}^n A_2 + \sum_{m+1}^n A'_2 = \sum_{m+1}^n (A + A_0) \text{ und}$$

$$\sum_{m+1}^n A'_2 = \mu \sum_{m+1}^n A_2, \text{ worin } \mu \text{ eine erst zu}$$

ermittelnde Konstante ist. Daraus ergibt sich:

$$(1 + \mu) \sum_{m+1}^n A_2 = \sum_{m+1}^n (A + A_0) \text{ folglich}$$

$$\sum_{m+1}^n A_2 = \frac{1}{1 + \mu} \sum_{m+1}^n (A + A_0)$$

$$\sum_{m+1}^n A'_2 = \frac{\mu}{1 + \mu} \sum_{m+1}^n (A + A_0) \text{ und}$$

$$\sum_{m+1}^n (A_m - A'_m) = \frac{1-\mu}{1+\mu} \sum_{m+1}^n (A + A_0)$$

wodurch Gl. 18) übergeht in:

$$A_1 = \frac{1}{n-m} \cdot \sum_{m+1}^n \frac{A - A_0}{2} - \frac{1}{n-m} \cdot \frac{1-\mu}{1+\mu} \sum_{m+1}^n \frac{A + A_0}{2} \quad 54)$$

§ 25. Bestimmung der Konstanten μ .

Nach § 24 ist $\mu = \frac{\sum_{m+1}^n A'_m}{\sum_{m+1}^n A_m}$ Die Versuche weisen darauf-

hin, dass vom $(m+1)^{\text{ten}}$ zusammengehörigen An- und Abspannen an die elastischen Nachwirkungen während desselben sich kaum mehr unterscheiden lassen, so dass von da an alle A'_m , sowie alle A_m entweder als gleich betrachtet, oder wenigstens Mittelwerte M_m und M'_m gebraucht werden können; deren Verhältnis $\frac{M'_m}{M_m} = \frac{A'_m}{A_m}$ genommen werden soll,

wenn A'_m und A_m die elastische Nachwirkung während der ersten Ab- bzw. Anspannung bedeutet. Es ist eben nicht abzusehen, weshalb sich die elastischen Nachwirkungen bei den späteren An- und Abspannungen wesentlich anders zu einander verhalten sollen als bei der ersten, weshalb in Rücksicht darauf, dass es sich hier nur um eine Korrektur handelt, obige Annahmen erlaubt sein dürften. Darnach ist:

$$\mu = \frac{\sum_{m+1}^n A'_m}{\sum_{m+1}^n A_m} = \frac{(n-1) M'_m}{(n-1) M_m} = \frac{A'_m}{A_m}.$$

Daraus erhalten wir gemäss Gl. 5) und 7)

$$\mu = \frac{A_0 + A'_1}{A - A_1} = \frac{(c_1 - b_1) - p_1 + A'_1}{(b_1 - a_1) - p_1 - A_1} \quad 55)$$

Wir nehmen auch hier $A_1 = A'_1$ und können nach den Ergebnissen der Versuche näherungsweise für den Wert dieser Grösse das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen der letzten An- und Abspannung einer Gruppe nehmen. Dies gibt:

$$\mu = \frac{(c_1 - b_1) - p_1 + \left(b_n - \frac{a_n + c_n}{2}\right)}{(b_1 - a_1) - p_1 - \left(b_n - \frac{a_n + c_n}{2}\right)}$$

Dabei ist $p_1 = \nu p_1$, wo ν nach § 22 oder durch eine direkte Ablesung während einer Abkühlung des Dampfmantels und unter gleichzeitiger Beobachtung der Zeit näherungsweise zu bestimmen wäre. Auf letztere Art ergab sich für die allererste Zeit der Abkühlung bei niedriger Lufttemperatur $\nu = 0,92$. Nimmt man, was bei den hier in Betracht kommenden kleinen Zeiträumen gestattet ist, auf die Temperaturänderung des vertikalen Teils des Apparates keine Rücksicht, so ist:

$$p_1 = \frac{1}{10} \cdot 2 \frac{r_1}{r_2} \cdot k_2 (t - T) = 0,102 (t - T) \quad 56)$$

$$p_2 = 0,92 \cdot 0,102 (t - T) = 0,094 (t - T) \quad 57)$$

§ 26. Anwendung der Formel 54).

Es ist:

$$\sum_{m+1}^n (A - A_0) = \sum_{m+1}^n [2b - (a + c)] - \sum_{m+1}^n (p_1 - p_2)$$

$$\sum_{m+1}^n (A + A_0) = \sum_{m+1}^n (c - a) - \sum_{m+1}^n (p_1 + p_2)$$

Nun ist $\sum_{m+1}^n (p_1 + p_2) = S$, und es kann S aus der be-

obachteten Temperaturdifferenz des Drahtes berechnet, somit als bekannt angesehen werden. Ferner haben wir:

$$\sum_{1+m}^n p_2 = \nu \cdot \sum_{m+1}^n p_1 \text{ also:}$$

$$\sum_{m+1}^n (p_1 - p_2) = \frac{1-\nu}{1+\nu} \sum_{m+1}^n (p_1 + p_2) \quad 58\}$$

Die Gl. 54 verwandelt sich somit in:

$$A_1 = \frac{1}{2(n-m)} \left\{ \sum_{m+1}^n [2b - (a+c)] - \frac{1-\nu}{1+\nu} \sum_{m+1}^n (p_1 + p_2) \right\} - \frac{1}{2(n-m)} \cdot \frac{1-\mu}{1+\mu} \cdot \left\{ \sum_{m+1}^n (c-a) - \sum_{m+1}^n (p_1 + p_2) \right\} \quad 59)$$

$$S = 2 \cdot \frac{r_1}{r_2} [k_1 (\tau_1 - \tau_0) + k_2 (t - T)] \cdot \frac{n-1}{n} \quad 60)$$

Für unsere Versuche würde:

$$S = \sum_2^5 (p_1 + p_2) = \frac{4}{5} \cdot [0,82 (\tau_1 - \tau_0) + 1,02 (t - T)] = 0,7 (\tau_1 - \tau_0) + 0,8 (t - T). \quad 61)$$

Wegen der Kleinheit von $\tau_1 - \tau_0$ für kleine Zeiträume kann das erste Glied in Gl. 61) gewöhnlich vernachlässigt werden und man erhält zur Anwendung auf unsere Versuche:

$$A_1 = \frac{1}{4} \cdot \sum_2^5 \left[b - \frac{a+c}{2} \right] - \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot 0,1 (t - T) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1-\mu}{1+\mu} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \sum_2^5 (c-a) - 0,4 (t - T) \right\} \quad 62)$$

Da $\frac{1 - \nu}{1 + \nu} = 0,04$, so kann das 1. Korrektionsglied immer weggelassen werden. Auch bei dem zweiten hat sich herausgestellt, dass es nur bei der Siedetemperatur, wo die elastische Nachwirkung noch beträchtlich ist, einen Einfluss auf die Beobachtung übt; hiefür ist aber $t - T = 0$ also:

$$A_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} \left[b - \frac{a + c}{2} \right] - \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} (c - a). \quad (63)$$

Nach Formel 63) wurde nur die Versuchsreihe bei der Siedetemperatur rechnerisch behandelt. Ist $\mu = \nu = 1$ so erhält man wieder:

$$A_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} \left[b - \frac{a + c}{2} \right] \quad (64)$$

welche Formel für alle, ausser der eben erwähnten Versuchsreihe, verwertet worden ist.

§ 27. Berechnung der wirklichen elastischen Dehnung.

Zur Berechnung der wirklichen elastischen Dehnung l in Skalenteilen ist die Gleichung 23) anzuwenden. Da es sich hier jedoch um sehr kleine Differenzen handelt, so ist es nicht gleichgiltig, an welcher Stelle der Skala die Differenz $n_1 - n_0 = A_1$ abgelesen wird, d. h. es ist das Glied $\frac{11}{2} \cdot \frac{n_1^3 - n_0^3}{(4r_1)^3}$ in die Rechnung aufzunehmen. Für $n_1 - n_0$ ist der Wert aus Gl. 48) resp. 63) zu entnehmen; dagegen ist für n_0 , da dieses sich wegen der Temperaturänderung und der elastischen Nachwirkung von Versuch zu Versuch ändert, ein Mittelwert $m_0 = \frac{a_2 + c_2}{2}$ zu setzen. Dann wird $n_1 = m_0 + A_1$, somit

$$l = 2r_2 \left[\frac{A_1}{4r_1} - \frac{11}{2} \cdot \frac{3m_0 A_1 (m_0 + A_1) + A_1^3}{(4r_1)^3} \right] \quad (65)$$

§ 28. Versuche.

Nachdem nun der Apparat mit, wie ich glaube, genügender Gründlichkeit untersucht ist, kann zu den Versuchen geschritten werden. Ehe dies jedoch geschieht, sind noch zwei Vorfragen experimentell zu erledigen. Erstens ist zu bestätigen, dass die elastische Dehnung von ihrer Entstehungszeit als unabhängig betrachtet werden kann, und zweitens ist zu untersuchen, ob jene, wie für die Dehnung mit Einschluss der elastischen Nachwirkung angenommen wird, der Grösse der spannenden Kraft proportional ist.

§ 29. Unabhängigkeit der elastischen Dehnung von der Zeit.

In der Tabelle II ist jede Versuchsgruppe mit einer römischen Ziffer, die einzelne Beobachtungsreihe mit einer arabischen Ziffer fortlaufend bezeichnet. Kolumne 1 enthält die zur Ausführung einer Versuchsgruppe nötige Zeit in Minuten ('); Kolumne 2 die vollständig korrigierte Temperaturablesung des Drahtes; Kolumne 3 die Temperatur der Luft. Ferner enthält: Kolumne 4 die Skalenablesung a — stets von der m. St. an — bei der Belastung 0; Kolumne 5 und 6 die Skalenablesungen b und c bei den Belastungen P und 0; die Kolumnen 7, 8, 9 die am Kopfe bezeichneten Differenzen, Kolumne 10 den korrigierten Mittelwert der elastischen Dehnung in Skalenteilen, berechnet nach Formel 48) und endlich Kolumne 11 die Summe der elastischen Nachwirkung während des Versuches, wegen des Temperatureinflusses berechnet nach Formel 53). Zwischen den einzelnen Versuchsgruppen verstrich so viel Zeit — etwa 20' — dass der Hauptteil der e. N. verschwunden war.

Gruppe	Nummer	Zeit ()	Tempera- tur des Drahtes	Tempera- tur d. Luft	Skalen- teil a	Skalen- teil b	Skalen- teil c	a - b	c - b	a - c	A ₁	$\sum A'$	Datum des Versuches und Bemerkungen
III	1		9,96	11,0	-1,3	143,0	-0,8	144,3	143,7	0,6			23/11 81.
	2				-0,8	143,0	-0,7	143,7	143,7	0,0		0,85	
	3	13,50	9,98		-0,7	143,0	-0,6	143,7	143,6	0,1	143,675		Zeit des An- und Ab- spannens verschieden
	4				-0,6	143,1	-0,6	143,7	143,7	0,0			
	5		10,01	11,0	-0,6	143,1	-0,4	143,7	143,5	0,2			
					Mittel:			143,82	143,64	0,9			
IV	1		10,64	11,0	-1,2	143,0	-0,7	144,2	143,7	0,5			23/11 81.
	2				-0,7	143,0	-0,7	143,7	143,7	0,0		0,54	
	3	3,25	10,37		-0,7	143,0	-0,7	143,7	143,7	0,0	143,662		Die Zeit beim An- u. Abspannen gleich.
	4				-0,7	143,0	-0,6	143,7	143,6	0,1			
	5		10,10	11,0	-0,6	143,0	-0,6	143,6	143,6	0,0			
					Mittel:			143,78	143,66	0,6			

Die Zahlen der Kolumne 10 zeigen, dass die elastische Dehnung von der Zeit, während welcher sie entstanden ist, nicht abhängt. Die Gruppen II, III, IV enthalten mit hinlänglicher Genauigkeit übereinstimmende Werte von A_1 , indes der Wert von A_1 in I nur um 0,187 von dem arith. Mittel abweicht, obwohl der Ablesungsfehler auf 0,1 geschätzt werden muss. Aber selbst das Bedenken bezüglich dieser Abweichung schwindet, wenn man erwägt, dass die Werte A_1 der Gruppen II—IV incl. trotz der verschiedenen Zeiten gleich, und die der Gruppen I und IV verschieden sind, obwohl die Zeiten nahehin gleich. Die kleine Differenz wird eher auf Rechnung der Verschiedenheit der e. N. zu setzen sein.

§ 30. Das Proportionalitätsgesetz der elastischen Dehnung.

Bekanntlich wird nach den bisherigen Erfahrungen angenommen, dass innerhalb der sog. Elastizitätsgrenze die Dehnung einschliesslich der Nachwirkung der spannenden Kraft proportional sei. Es lässt sich dies wegen der Unabhängigkeit von der Zeit noch in höherem Grade von der elastischen Dehnung vermuten. Ich habe mit zwei Eisendrahtexemplaren von gleicher chemischer Beschaffenheit und Länge, sowie gleichem Querschnitte bei verschiedenen spannenden Kräften und jeweils gleichen Temperaturen Versuche angestellt. Für die Belastungen war der gleiche Hebelarm gewählt, dagegen wurden die Gewichte mittelst der Wage genau bestimmt, da die Messung der Hebelarme für diesen Zweck nicht die nötige Zuverlässigkeit geboten hätte. Die Versuchsergebnisse folgen in Tabelle III, deren Anlage mit jener II bis auf zwei Kolumnen übereinstimmt. In den Versuchsgruppen I und II und jenen III bis VII ist der Draht je der gleiche. Das an den Hebelarm angebrachte Gewicht bei I, V, VII war 1199,200 gr., bei II, III, IV und VI dagegen 626,178 gr.

Da das Verhältniss der Belastungen

$626,178 : 1199,200 = 0,5221$ ist, so soll das Verhältniss der „elastischen Dehnungen“, die erwähnte Proportionalität vorausgesetzt, bei gleichen Temperaturen und wenigstens demselben Drahtindividuum das gleiche sein. Nun ergibt sich aus:

$$\begin{aligned} \text{I und II 1)} & 77,062 : 146,875 = 0,52468 \\ \text{(III und IV) und V 2)} & 77,074 : 146,675 = 0,52547 \\ \text{VI und VII 3)} & 76,087 : 145,650 = 0,52240. \end{aligned}$$

Diese Zahlen dürften zu dem Schlusse berechtigen: dass auch die „elastische Dehnung“ bei gleicher Temperatur und sonst gleichen Umständen der spannenden Kraft proportional ist.

(Siehe Tabelle III pag., 421.).

§ 31. Hauptversuche.

Nachfolgend sind die Versuchsergebnisse, welche an einem Eisendrahtindividuum vorgenommen worden sind, tabellarisch zusammengestellt. Die Zahlen der Kolumne 9 sind nach Formel 48), die der Kolumne 10 nach 53) berechnet worden. Die Anlage der Tabellen ist der der vorhergehenden ähnlich. Um einen Einblick in den Vorgang bei den Versuchen zu gestatten, halte ich es zweckmässig, wenigstens für diesmal sämtliche abgelesene Zahlen in die Tabellen aufzunehmen, was vielleicht in Zukunft unterbleiben könnte.

(Siehe Tabelle IV, pag. 424.)

Tabelle III.

Gruppe	Nummer	Tempera- tur des Drahtes	Skalen- teil a	Skalen- teil b	Skalen- teil c	a - b	c - b	a - c	A ₁	$\sum_{i=1}^5 A'$	Datum d. Versuches und Bemerkungen.
I	1	0,0	11,9	163,0	15,8	151,1	147,2	3,9	146,875	5,0	12/5 81.
	2		15,8	163,3	16,8	147,5	147,0	0,5			
	3	0,0	16,3	163,4	16,7	147,1	146,7	0,4			
	4		16,7	163,6	16,8	146,9	146,8	0,1			
	5	0,0	16,8	163,6	16,9	146,8	146,7	0,1			
			Mittel:			147,88	146,88	5,0			
II	1	0,0	15,6	93,2	16,1	77,6	77,1	0,5	77,062	0,8	12/5 81.
	2		16,1	93,3	16,2	77,2	77,1	0,1			
	3	0,0	16,2	93,3	16,3	77,1	77,0	0,1			
	4		16,3	93,3	16,3	77,0	77,0	0,0			
	5	0,0	16,3	93,4	16,4	77,1	77,0	0,1			
			Mittel:			77,20	77,04	0,8			

Gruppe	Nummer	Tempera- tur des Drahtes.	Skalen- teil a	Skalen- teil b	Skalen- teil c	b - a	c - b	c - a	A ₁	$\sum_{i=1}^5 A_i$	Datum des Versuches und Bemerkungen.
III	1	0,0	0,4	78,1	1,0	77,7	77,1	0,6	77,112	0,7	?
	2		1,0	78,2	1,1	77,2	77,1	0,1			
	3	0,0	1,1	78,2	1,1	77,1	77,1	0,0			
	4		1,1	78,2	1,1	77,1	77,1	0,0			
	5	0,0	1,1	78,2	1,1	77,1	77,1	0,0			
			Mittel:			77,24	77,10	0,7			
IV	1	0,0	0,3	78,0	1,0	77,7	77,0	0,7	77,037	0,8	?
	2		1,0	78,0	1,0	77,0	77,0	0,0			
	3	0,0	1,0	78,0	1,0	77,0	77,0	0,0			
	4		1,0	78,1	1,0	77,1	77,0	0,1			
	5	0,0	1,1	78,1	1,0	77,0	77,0	0,0			
			Mittel:			77,16	77,00	0,8			

III und IV wurden an
einem Tage hinterein-
ander ausgeführt.

V	1	0,0	2,0	149,3	2,5	147,3	146,8	0,5	18/5. 81
	2	0,0	2,5	149,3	3,0	147,0	146,3	0,5	
	3	0,0	3,0	149,6	3,0	146,6	146,6	0,0	1,1
	4		3,0	149,7	3,0	146,7	146,7	0,0	
	5	0,0	3,0	149,9	3,1	146,9	146,8	0,1	
			Mittel:			146,90	146,64	1,1	
VI	1	18,81	31,0	108,4	32,3	77,4	76,1	1,3	?
	2		32,3	108,4	32,3	76,1	76,1	0,0	
	3	18,81	32,3	108,5	32,4	76,2	76,1	0,1	1,6
	4		32,4	108,6	32,7	76,2	75,9	0,3	
	5	18,81	32,7	108,7	32,6	76,0	76,1	-0,1	
			Mittel:			76,38	76,06	1,6	
VII	1	18,81	32,0	178,7	33,1	146,7	145,6	1,1	VI und VII wurden an einem Tage hintereinander ausgeführt.
	2		33,1	179,0	33,3	145,9	145,7	0,2	
	3	18,81	33,2	179,0	33,4	145,8	145,6	0,2	
	4		33,4	179,1	33,7	145,7	145,4	0,3	1,7
	5	18,81	33,7	179,2	33,6	145,5	145,6	-0,1	
			Mittel:			145,72	145,58	1,7	

Tabelle IV.

Da die Temperatur des Drahtes konstant erhalten werden konnte, so wurde sie am Thermometer abgelesen und korrigiert.

Gruppe	Nummer	Temperatur des Drahtes 1	Temperatur d. Luft 2	a	b	c	α — — —	β — — —	γ — — —	δ — — —	A ₁	A ₂	Datum des Versuches und Bemerkungen.
I	1	0,00	16,26	2,0	149,3	2,5	147,3	146,8	0,5				18/5. 81.
	2			2,5	149,3	3,0	147,0	146,3	0,5				
	3	0,00		3,0	149,6	3,0	146,6	146,6	0,0		146,675	1,1	
	4			3,0	149,7	3,0	146,7	146,7	0,0				
	5	0,00	16,26	3,0	149,9	3,1	146,9	146,8	0,1				
				Mittel:			146,90	146,64	1,1				20/5. 81.
II	1	18,09	18,36	26,7	173,9	28,8	147,2	145,1	2,1				
	2			28,4	174,7	29,1	146,3	145,6	0,7				
	3			29,1	174,9	29,3	145,8	145,6	0,2				
	4	18,13		29,3	175,0	29,6	145,7	145,4	0,3		145,380	2,8	
	5			29,6	175,0	29,7	145,4	145,3	0,1				

6	29,7	175,1	29,8	145,4	145,3	0,1	21/5 81.		
7	18,18	19,16	29,8	175,1	29,8	145,3		0,0	
			Mittel:		145,87	145,37		3,5	
1	18,81	19,06	32,0	178,1	33,1	146,7	145,6	1,1	21/5 81.
2			33,1	179,0	33,3	145,9	145,7	0,2	
3	18,81		33,2	179,0	33,4	145,8	145,6	0,2	
4			33,4	179,1	33,7	145,7	145,4	0,3	
5	18,81	19,16	33,7	179,2	33,6	145,5	145,6	-0,1	
			Mittel:		145,92	145,58	1,7		
1	33,71	19,26	49,0	197,0	50,2	148,0	146,8	1,2	21/5 81.
2			50,2	197,0	50,5	146,8	146,5	0,3	
3	33,91		50,5	197,2	50,6	146,7	146,6	0,1	
4			50,6	197,6	50,8	147,0	146,8	0,2	
5	34,12	19,56	50,8	197,7	51,0	146,9	146,7	0,2	
			Mittel:		147,08	146,68	2,0		
							145,650	1,6	
							146,750	1,3	

Gruppe	Nummer	Tempera- tur des Drathes	Tempera- tur d. Luft	a	b	c	d	e	f	g	h	A ₁	A ₂	Datum des Versuches und Bemerkungen.
V	1	22,97	18,96	36,2	182,7	37,1	146,5	145,6	0,9					21/5 81.
	2			37,1	182,9	37,1	145,8	145,8	0,0					
	3	22,75		37,1	183,0	37,2	145,9	145,8	0,1			145,787	1,5	
	4			37,2	183,0	37,2	145,8	145,8	0,0					
	5	22,43	18,96	37,2	182,9	37,2	145,7	145,7	0,0					
Mittel:										145,94	145,74			
VI	1	8,19	16,26	17,8	164,3	19,0	146,5	145,3	1,2					23/5 81.
	2			19,0	164,3	19,0	145,3	145,3	0,0					
	3			19,0	164,6	19,0	145,6	145,6	0,0			145,560	1,1	
	4	8,22		19,0	164,6	19,1	145,6	145,5	0,1					
	5			19,1	164,7	19,0	145,6	145,7	0,1					
Mittel:										145,71	145,51			
	6	8,24	16,36	19,0	164,7	19,0	145,7	145,7	0,0					

VII	1	8,30	16,36	18,5	164,6	19,1	146,1	145,5	0,6	23/5 81.
	2			19,1	164,7	19,1	145,6	145,6	0,0	
	3	8,31		19,1	164,8	19,2	145,7	145,6	0,1	
	4			19,2	164,8	19,2	145,6	145,6	0,0	
	5	8,32	16,36	19,2	164,9	19,3	145,7	145,6	0,1	
				Mittel:			145,74	145,58	0,8	
VIII	1	13,70	15,86	24,8	170,3	25,6	145,5	144,7	0,8	23/5 81.
	2			25,6	170,6	25,3	145,0	145,3	-0,3	
	3			25,3	170,7	25,7	145,4	145,0	0,4	
	4			25,7	170,9	25,7	145,0	145,2	0,0	
	5	13,72		25,7	170,7	25,7	145,0	145,0	0,0	
	6			25,7	170,7	25,7	145,0	145,0	0,0	
	7			25,8	170,8	25,8	145,0	145,0	0,0	
	8	13,74	16,56	25,9	170,8	25,9	144,9	144,9	0,0	
				Mittel:			145,23	145,02	0,9	

Gruppe	Nummer	Tempera- tur des Drahtes	2	Tempera- tur d. Luft	a	b	c	a	b	c	a - b	c - b	A ₁	A ₂	Datum des Versuches und Bemerkungen.
IX	1	98,54	19,56		121,9	273,1	124,4	151,2		148,7	2,5		9	10	25/5 81.
	2				124,4	274,1	125,0	149,7		149,1	0,6				
	3				125,0	274,5	125,3	149,5		149,2	0,3				
	4	98,54			125,3	274,8	125,6	149,5		149,2	0,3	149,340			
	5				125,6	275,0	125,7	149,4		149,3	0,1	4,02			
	6	98,54	19,66		125,7	275,1	126,0	149,4		149,1	0,3				
										Mittel:			149,78	149,10	4,1

Die in der Spalte 1 der Tabelle IV bei jeder Gruppe in der Mitte stehende Zahl gibt die mittlere Temperatur des Drahtes in der jeweiligen Versuchsgruppe an. Sie ist das arithmetische Mittel der am Anfange und Ende der Gruppe geschehenen Thermometerablesung. Die zweite Dezimale dieser Ablesungen in Spalte 1 und jene in 2 ergab sich in Folge der vorgenommenen Korrekturen. (Weiters siehe Seite 434.)

Tabelle V.

Der Dampfmantel wurde bis zum Siedepunkt erwärmt, 30' auf dieser Temperatur erhalten und dann wurden bei stets sinkender Temperatur die Beobachtungen gemacht.

Gruppe	Nummer	Temperatur des Drahtes	Temperatur der Luft	a	b	c	$\alpha - \beta$	$\gamma - \delta$	$\epsilon - \zeta$	A ₁	$\Delta \frac{1}{A_1}$	Datum des Versuches und Bemerkungen.
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Ia	1	98,54	26,3	126,3	276,1	129,0	149,8	147,1	2,7			1/6 81.
	2			129,0	277,0	129,3	148,0	147,7	0,3			
	3	98,54		129,3	277,0	129,6	147,7	147,4	0,3	147,960	3,70	
	4			129,6	277,3	129,8	147,7	147,5	0,2			
	5			129,8	278,7	130,0	147,9	147,7	0,2			
	6	98,54	26,3	130,0	278,0	130,0	148,0	148,0	0,0			
				Mittel:			148,18	147,57	3,7			
Ib	1	98,54	28,0	130,0	277,0	130,0	149,2	147,0	2,2			1/6 81.
	2			130,0	277,5	130,0	147,5	147,5	0,0			
	3			130,0	277,8	130,0	147,8	147,8	0,0			
	4	98,54		130,0	277,8	130,0	147,8	147,8	0,0	148,040	2,2	

Gruppe	Nummer	Tempera- tur des Drahtes	Tempera- tur d. Luft	a	b	c	a — c	b — c	A ₁	A ₂ - A ₁	Datum des Versuches und Bemerkungen.
Ib	5			130,0	278,0	130,0	148,0	148,0			
	6	98,54	28,0	130,0	278,0	130,0	148,0	148,0			
II				Mittel: 148,05				147,68	2,2		
	1	89,21		113,6	261,8	114,9	148,2	146,9			1/6 81.
	2			114,9	262,0	114,9	147,1	147,1			
	3	88,93	25,9	114,9	261,9	115,0	147,0	146,9	146,987	1,75	
	4			115,0	261,8	114,9	146,8	146,9			
	5	88,66		114,9	261,9	114,8	147,0	147,1			
III				Mittel: 147,22				146,98	1,2		
	1	78,87		101,3	248,9	102,3	147,6	146,6			1/6 81.
	2			102,3	248,8	102,3	146,5	146,5			
	3	78,57	23,0	102,3	248,8	102,3	146,5	146,5	146,512	1,29	
	4			102,3	248,7	102,3	146,4	146,4			
	5	78,28		102,3	248,8	102,0	146,5	146,8			
				Mittel: 146,70				146,56	0,7		

IV	1	69,21	89,8	236,4	90,7	146,6	145,7	0,9	1/6 81.	
	2		90,7	236,8	91,0	146,1	145,8	0,3		
	3	68,96	21,8	91,0	236,7	90,8	145,7	145,9		0,2
	4		90,8	236,7	90,9	145,9	145,8	0,1		
	5	68,72	90,9	236,7	90,8	145,8	145,9	0,1		
			Mittel: 146,02 145,82 1,0							
V	1	59,31	79,1	225,7	80,0	146,6	145,7	0,9	1/6 81.	
	2		80,0	225,7	80,2	145,7	145,5	0,2		
	3	59,09	21,3	80,2	225,8	80,2	145,6	145,6		0,0
	4		80,2	225,7	80,3	145,5	145,4	0,1		
	5	58,87	80,3	225,7	80,3	145,4	145,4	0,0		
			Mittel: 145,76 145,52 1,2							
VI	1	49,31	69,1	215,0	70,1	145,9	144,9	1,0	1/6 81.	
	2		70,1	215,0	70,1	144,9	144,9	0,0		
	3	49,19	21,0	70,1	215,0	70,1	144,9	144,9		0,0
	4		70,1	215,0	70,1	144,9	144,9	0,0		
	5	49,08	70,1	215,0	70,1	144,9	144,9	0,0		
			Mittel: 145,10 144,90 1,0							

Gruppe	Nummer	Tempera- tur des Drahtes.	Tempera- tur d. Luft	a	b	c	σ — ρ	σ — ρ	σ — ρ	A_1	Δ = $\frac{1}{2} \Delta$	Datum des Versuches und Bemerkungen.
VII	1	40,71		60,1	205,1	61,1	145,0	144,0	1,0			1/6 81.
	2			61,1	205,4	61,1	144,3	144,3	0,0			
	3	40,61	19,9	61,1	205,6	61,1	144,5	144,5	0,0	144,462	1,50	
	4			61,1	205,7	61,2	144,6	144,5	0,1			
	5	40,51		61,1	205,7	61,3	144,6	144,4	0,2			
				Mittel:			144,56	144,34	1,3			1/6 81.
VIII	1	34,78		55,0	199,8	55,9	144,8	143,9	0,9			
	2			55,9	200,0	56,0	144,1	144,0	0,1			
	3	34,68	19,2	56,0	200,1	56,1	144,1	144,0	0,1	144,012	1,39	
	4			56,1	200,0	56,1	143,9	143,9	0,0			
	5	34,59		56,1	200,2	56,2	144,1	144,0	0,1			
				Mittel:			144,20	143,96	1,2			

IX	1	22,73	43,0	187,5	44,0	144,5	143,5	1,0	2/6 81.	143,662	1,36
	2		44,0	187,7	44,2	143,7	143,5	0,2			
	3	22,70	44,2	187,9	44,3	143,7	143,6	0,1			
	4		44,3	188,0	44,3	143,7	143,7	0,0			
	5	22,67	44,4	188,1	44,4	143,7	143,7	0,0			
			Mittel: 143,86					1,3			
X	1	11,35	33,1	176,4	34,5	143,3	141,9	1,4	2/6 81.	142,162	1,84
	2		34,5	176,8	34,8	142,3	142,0	0,3			
	3	11,38	34,8	176,9	34,9	142,1	142,0	0,1			
	4		34,9	177,1	34,9	142,2	142,2	0,0			
	5	11,41	34,9	177,2	35,0	142,3	142,2	0,1			
			Mittel: 142,44					1,9			
XI	1	7,69	33,0	177,8	34,1	144,8	143,7	1,1	3/6 81.	143,925	1,12
	2		34,1	178,1	34,2	144,0	143,9	0,1			
	3	7,78	34,2	178,1	34,2	143,9	143,9	0,0			
	4		34,2	178,2	34,3	144,0	143,9	0,1			
	5	7,87	34,3	178,2	34,3	143,9	143,9	0,0			
			Mittel: 144,12					1,3			
Mit Wasser abgekühlt.											

Mit Wasser abgekühlt.

Mit Wasser abgekühlt.

Gruppe	Nummer	Tempera- tur des Drahtes.	Tempera- tur d. Luft.	a	b	c	c — p	c — p	A ₁	A ₂ - A ₁	Datum des Versuches und Bemerkungen.
		1	2	3	4	5	6	7	8	10	
XII	1	2,27		31,9	175,9	32,7	144,0	143,2	0,8		3/6 81.
	2			32,7	176,0	32,8	143,3	143,2	0,1		
	3	2,33	18,9	32,8	176,1	33,0	143,3	143,1	0,2	143,212 0,99	Mit Wasser abgekühlt.
	4			33,0	176,2	33,0	143,2	143,2	0,0		
	5	2,38		33,0	176,2	33,0	143,2	143,2	0,0		
				Mittel:			143,40	143,38	1,1		

Die in Spalte 8 unter dem Striche angegebene Zahl ist die Summe der darüberstehenden. Wo in Spalte 2 nur eine Zahl angeführt ist, ist diese ein Mittelwert aus zwei Beobachtungen auf je zwei in verschiedenen Höhen aufgehängten Thermometern. Der Wert von n in Spalte 10 ist aus der mit „Nummer“ überschriebenen zu entnehmen. Diese Bemerkungen beziehen sich unter Berücksichtigung des auf Seite 435 Angegebenen auch auf alle folgenden Tabellen.

Tabelle VI.

Diese Tabelle gibt eine Uebersicht der Mittelwerte von Versuchen, welche an meist verschiedenen Tagen angestellt worden sind, chronologisch geordnet.

Gruppe	Nummer	Temperatur des Drahtes.	b — a	b — c	$\sum_1^n (c-a)$	A_1	$\sum_1^n A'$	Datum des Versuches.
I.	1 — 5	13,52	143,16	142,72	2,2	142,800	2,15	4/6 81.
II.	1 — 5	22,34	144,28	143,76	2,6	143,912	2,58	22/6 81.
III.	1 — 5	98,42	151,32	150,62	3,5	150,737	3,50	22/6 81.
IV.	1 — 5	59,31	148,00	147,60	1,2	147,750	2,14	22/6 81.
V.	1 — 5	30,45	145,94	145,68	1,3	145,875	1,37	23/6 81.
VI.	1 — 5	9,76	143,72	143,36	1,8	143,425	1,73	23/11 81.
VII.	1 — 5	0,53	144,12	143,58	2,7	143,687	2,48	8/2 82.
VIII.	1 — 5	— 0,87	144,04	143,70	1,7	143,762	1,70	12/2 82.

Die in der Mitte jeder Gruppe in Spalte 1 angegebene Temperatur ist von der nächsten Tabelle an nach Formel 37) berechnet.

Tabelle VII.

Von nun an wurde die Temperatur des vertikalen Theils des Apparates durch die in § 6 angegebene Vorrichtung besonders beobachtet. Der Dampfmantel war 1 Stunde mit dem Dampf des kochenden Wassers gefüllt, bevor die Beobachtung begann.

Gruppe	Nummer	Temperatur des Drahtes	Temperatur des Apparates	Temperatur d. Luft	a	b	c	d	e	f	g	A ₁	A ₂	Datum des Versuches und Bemerkungen.
I	1	98,61	6,30		109,2	260,5	110,7	151,3	149,8		1,5			12/2 82.
	2				110,7	260,9	110,9	150,2	150,0		0,2			
	3	98,61	6,51	4,75	110,9	261,0	111,1	150,1	149,9		0,2	149,966	2,0	
	4				111,1	261,1	111,2	150,0	149,9		0,1			
	5	98,61	6,70		111,2	261,2	111,2	150,0	150,0		0,0			
					Mittel:		150,32	149,92	2,0					12/2 82.
II	1	86,52	6,60		95,0	242,0	93,0	147,0	149,0		-- 2,0			
	2				93,0	241,7	92,3	148,7	149,4		-- 0,7			
	3	83,42	6,59	4,45	92,3	241,0	92,0	148,7	149,0		-- 0,3	148,837	0,91	

[illegible]

Gruppe	Nummer	Tempera- tur des Drahtes	Tempera- tur des Apparates	Tempera- tur d. Luft	a	b	c	e - p	7	c - p	8	e - c	A ₁	A ₂	Datum des Ver- suches und Be- merkungen
V	1	55,59	6,00		63,6	211,0	63,9	147,4	147,1	0,3					12/2 82.
	2				63,9	210,8	63,7	146,9	147,1	-0,2					
	3	54,11	5,96	4,45	63,7	210,3	63,2	146,6	147,1	-0,5			146,900	1,46	
	4				63,2	210,0	63,0	146,8	147,0	-0,2					
	5	53,25	5,93		63,0	209,7	62,7	146,7	147,0	-0,3					
					Mittel:		146,88	147,06	-0,9						
VI	1	48,64	5,83		56,8	202,8	57,0	147,0	146,8	0,2					12/2 82.
	2				57,0	202,4	56,9	146,4	146,5	-0,1					
	3	47,45	5,81	4,5	56,9	202,2	56,7	146,3	146,5	-0,2			146,425	1,09	
	4				56,7	202,9	56,3	146,2	146,6	-0,4					
	5	46,77	5,80		56,3	202,6	56,0	146,3	146,6	-0,3					
					Mittel:		146,44	146,60	-0,8						

VII	1	39,57	5,60	47,9	194,1	48,1	146,2	146,0	0,2	12/2 82.
	2			48,1	194,1	48,2	146,0	145,9	0,1	
	3	39,04	5,59	4,5	48,2	194,0	48,0	145,8	— 0,2	145,862 0,92
	4				48,0	193,7	47,9	145,7	— 0,1	
	5	38,16	5,58		47,9	193,5	47,4	145,6	— 0,5	
					Mittel:		145,86	145,96	0,5	
VIII	1	29,50	5,30		37,8	83,9	38,7	146,1	145,2	0,9
	2				38,7	83,9	38,7	145,2	145,2	0,0
	3	29,50	5,30	4,55	38,7	83,8	38,6	145,1	145,2	— 0,1
	4				38,6	83,8	38,4	145,2	145,4	— 0,2
	5	28,48	5,30		38,4	83,6	33,2	145,2	145,4	— 0,2
					Mittel:		145,36	145,28	0,4	
IX	1	19,80	4,85		28,2	173,7	29,0	145,5	144,7	0,8
	2				29,0	173,8	29,1	144,8	144,7	0,1
	3	19,72	4,90	4,7	29,1	173,8	29,0	144,7	144,8	— 0,1
	4				29,0	173,9	29,1	144,9	144,8	0,1
	5	19,25	4,95		29,1	173,8	29,0	144,7	144,8	— 0,1
					Mittel:		144,92	144,76	0,8	

Gruppe	Nummer	Temperatur der Drähte 1	Temperatur des Apparates 2	Temperatur d. Luft 3	a 4	b 5	c 6	a - b 7	c - b 8	a - c 9	A ₁ 10	A ₂ 11	Datum des Versuches und Bemerkungen
X	1	15,58	4,83		24,3	169,1	25,0	144,8	144,1	0,7			12/2 82.
	2				25,0	169,1	25,0	144,1	144,1	0,0			
	3	15,30	4,89	4,8	25,0	169,2	25,0	144,2	144,2	0,0	144,175	1,09	
	4				25,0	169,2	25,0	144,2	144,2	0,0			
	5	15,19	4,95		25,0	169,2	25,0	144,2	144,2	0,0			
					Mittel:			144,30	144,16	0,7			
XI	1	12,63	4,70		21,0	165,7	21,7	144,7	144,0	0,7			12/2 82.
	2				21,7	165,8	21,8	144,1	144,0	0,1			
	3	12,21	4,75	4,0	21,8	165,8	21,8	144,0	144,0	0,0	144,037	1,12	
	4				21,8	165,8	21,7	144,0	144,1	- 0,1			
	5	12,41	4,80		21,7	165,8	21,8	144,1	144,0	0,1			
					Mittel:			144,18	144,02	0,8			

XII	1	9,44	4,20	17,3	161,8	18,0	144,5	143,8	0,7	12/2 82.
	2			18,0	162,0	18,1	144,0	143,9	0,1	
	3	9,05	4,20	3,67	18,1	161,9	18,1	143,8	0,0	
	4				18,1	161,9	18,2	143,8	0,1	
	5	9,26	4,20		18,2	161,9	18,2	143,7	0,0	
					Mittel:		143,96	143,78	0,9	12/2 82.
XIII	1	6,33	3,10	13,7	157,9	14,2	144,2	143,7	0,5	
	2			14,2	158,0	14,4	143,8	143,6	0,2	
	3	6,21	3,15	3,67	14,4	158,0	14,6	143,6	0,2	
	4				14,6	158,0	14,7	143,4	0,1	
	5	6,20	3,20		14,7	158,1	14,8	143,4	0,1	
					Mittel:		143,68	143,46	1,1	13/2 82(morgens).
XVI	1	0,82	1,10	6,5	150,8	7,3	144,3	143,5	0,8	
	2			7,3	150,9	7,7	143,6	143,2	0,4	
	3	0,83	1,25	1,50	7,7	151,0	7,7	143,3	0,0	
	4				7,7	151,0	7,7	143,3	0,0	
	5	0,85	1,40		7,7	151,0	7,8	143,3	0,1	
					Mittel:		143,56	143,30	1,3	

Tabelle VIII.

Wegen der noch vorhandenen Unregelmässigkeit — siehe § 32 — wurde die Temperatur des Drahtes wieder auf den Siedepunkt des Wassers gebracht, dort sodann ungefähr eine Stunde erhalten, worauf die Beobachtungen begannen.

Gruppe	Nummer	Temperatur des Drahtes	Temperatur des Apparates	Temperatur d. Luft	a	b	c	α	ρ	σ	A ₁	Δ	Datum des Versuches und Bemerkungen
I	1	98,33	8,10		105,9	257,8	108,0	151,9	149,8	2,1			19/2 82.
	2				108,0	258,0	108,1	150,0	149,9	0,1			
	3	98,33	8,33	7,2	108,1	258,5	108,4	150,4	150,1	0,3	149,949	3,10	
	4				108,4	258,6	108,8	150,2	149,8	0,4			
	5	98,33	8,55		108,8	258,9	109,0	150,1	149,9	0,2			
					Mittel:		150,52	149,70	3,1				
II	1	94,40	8,55		95,0	245,0	95,6	150,0	149,4	0,6			19/2 82.
	2				95,6	244,6	95,2	149,0	149,4	— 0,4			
	3	89,09	8,59	7,3	95,2	244,0	94,7	148,8	149,3	— 0,5	149,087	?	

Tabelle VIII.

Wegen der noch vorhandenen Unregelmässigkeit — siehe § 32 — wurde die Temperatur des Drahtes wieder auf den Siedepunkt des Wassers gebracht, dort sodann ungefähr eine Stunde erhalten, worauf die Beobachtungen begannen.

Gruppe	Nummer	Temperatur des Drahtes	Temperatur des Apparates	Temperatur d. Luft	a	b	c	σ	ρ	σ	ρ	A_1	ΔW	Datum des Versuches und Bemerkungen	
I	1	98,33	8,10		105,9	257,8	108,0	151,9	149,8	2,1				19/2 82.	
	2				108,0	258,0	108,1	150,0	149,9	0,1					
	3	98,33	8,33	7,2	108,1	258,5	108,4	150,4	150,1	0,3		149,949	3,10		
	4				108,4	258,6	108,8	150,2	149,8	0,4					
	5	98,33	8,55		108,8	258,9	109,0	150,1	149,9	0,2					
					Mittel:		150,52	149,70	3,1						
II	1	94,40	8,55		95,0	245,0	95,6	150,0	149,4	0,6				19/2 82.	
	2				95,6	244,6	95,2	149,0	149,4	— 0,4					
	3	89,09	8,59	7,3	95,2	244,0	94,7	148,8	149,3	— 0,5		149,087	?		

Gruppe	Nummer	Tempera- tur der Drahtes 1	Tempera- tur des Apparates 2	Tempera- tur d. Luft 3	a	b	c	d	e	f	A ₁	A ₂	Datum des Ver- suches und Be- merkungen
V	1	37,85	7,13		45,2	191,9	45,8	146,7	146,1	0,6			19/2 82.
	2				45,8	191,8	45,8	146,0	146,0	0,0			
	3	37,57	7,14	6,25	45,8	191,7	45,6	145,9	145,1	-0,2	145,925	1,09	
	4				45,6	191,3	45,4	145,7	145,9	-0,2			
	5	36,80	7,15		45,4	191,2	45,2	145,8	146,0	-0,2			
					Mittel:		146,02	146,02		0,0			
VI	1	22,43	6,23		29,3	175,0	30,0	145,7	145,0	0,7			19/2 82.
	2				30,0	175,0	30,0	145,0	145,0	0,0			
	3	22,49	6,26	6,0	30,0	174,9	30,0	144,9	144,9	0,0	144,900	1,13	
	4				30,0	174,9	30,0	144,9	144,9	0,0			
	5	21,95	6,30		30,0	174,8	30,0	144,8	144,8	0,0			
					Mittel:		145,06	144,92		0,7			

VII	1	14,68	5,85	21,1	166,1	21,8	145,0	144,3	0,7	19/2 82.
	2			21,8	166,2	21,9	144,4	144,3	0,1	
	3	14,42	5,91	21,9	166,3	22,0	144,4	144,3	0,1	144,325 1,00
	4			22,0	166,3	22,0	144,3	144,3	0,0	
	5	14,18	5,98	22,0	166,3	22,0	144,3	144,3	0,0	
				Mittel:			144,48	144,30	0,9	

Tabelle IX.

Es wurde die Temperatur des Drahtes 10 Stunden auf dem Siedepunkt des Wassers erhalten und am nächsten Tage wieder auf dieselbe gebracht, 1 Stunde darauf erhalten, und nun wurden die Beobachtungen in der bisherigen Weise angestellt.

Gruppe	Nummer	Temperatur des Drahtes	Temperatur des Apparates	Temperatur d. Luft	a	b	c	d	e	A ₁	A ₂	Datum des Versuches und Bemerkungen.
I	1	98,94	6,90		106,8	259,0	108,0	152,2	151,0			21/2 82.
	2				108,0	259,2	108,4	151,2	150,8			
	3	98,94	7,15	5,62	108,4	259,3	108,7	150,9	150,6	150,643	2,30	

Gruppe	Nummer	Tempera- tur des Drahtes	Tempera- tur des Apparates	Tempera- tur d. Luft	a	b	c	s	c	s	A ₁	Δ = A ₁ - 11	Datum des Ver- suches und Be- merkungen.
I	4				108,7	259,7	109,0	151,0	150,7	0,3			
	5	98,94	7,40		109,0	259,8	109,1	150,8	150,7	0,1			
					Mittel: 151,02 150,76					2,3			
II	1	90,70	7,20		95,7	246,8	96,7	151,1	150,1	1,0			21/2 82.
	2				96,7	246,7	96,5	150,0	150,2	-0,2			
	3	88,59	7,21	5,55	96,5	246,3	96,2	149,8	150,1	-0,3	149,950	1,76	
	4				96,2	246,0	96,0	149,8	150,0	-0,2			
	5	88,95	7,23		96,0	245,7	95,7	149,7	150,0	-0,3			
III					Mittel: 150,08 150,08					0,0			21/2 82.
	1	80,66	6,70		84,5	234,1	84,7	149,6	149,4	0,2			
	2				84,7	234,7	84,0	149,0	149,7	-0,7			
	3	78,02	6,70	5,27	84,0	232,0	83,0	149,0	149,8	-0,8	149,262	1,45	
	4				83,2	232,2	83,0	149,0	149,2	-0,2			
	5	76,68	6,70		83,0	231,9	82,4	148,9	149,5	-0,6			
					Mittel: 149,10 149,52					-2,1			

IV	1	69,85	6,50	73,7	222,7	74,0	149,0	148,7	0,3	148,412	1,63	21/2 82.
	2			74,0	222,5	74,0	148,5	148,5	0,0			
	3	68,90	6,50	74,0	222,3	73,8	148,3	148,5	—0,2			
	4			73,8	223,1	73,6	148,3	148,5	—0,2			
	5	68,25	6,50	73,6	221,8	73,3	148,2	148,5	—0,3			
				Mittel:			148,02	148,54	—0,4			
V	1	59,44	6,30	62,0	210,1	62,4	148,1	147,7	0,4	147,612	2,16	21/2 82.
	2			62,4	209,1	61,1	146,7	148,0	—0,3			
	3	56,80	6,25	61,1	208,2	60,5	147,1	147,7	—0,6			
	4			60,5	208,2	60,0	147,7	148,2	—0,5			
	5	54,85	6,20	60,0	207,7	59,4	147,7	148,3	—0,6			
				Mittel:			147,46	149,98	—1,6			
VI	1	48,89	6,10	52,4	199,8	52,5	147,4	147,3	0,1	147,025	1,10	21/2 82.
	2			52,5	199,5	52,3	147,0	147,2	—0,2			
	3	47,59	6,06	52,3	199,1	52,1	146,8	147,0	—0,2			
	4			52,1	198,9	51,8	146,8	147,1	—0,3			
	5	46,79	6,03	51,8	198,5	51,3	146,7	147,2	—0,5			
				Mittel:			146,94	147,16	—1,1			

Gruppe	Nummer	Tempera- tur des Drahtes.	Tempera- tur des Apparates.	Tempera- tur d. Luft.	a	b	c	d	e	f	A ₁	A ₂	Datum des Ver- suches und Be- merkungen.
VII	1	39,75	5,73		43,3	190,1	43,7	146,8	146,4	0,4			21/2 82.
	2				43,7	190,0	43,6	146,3	146,4	— 0,1			
	3	39,25	5,73	5,01	43,6	190,0	43,4	146,4	146,6	— 0,2	146,287	1,13	
	4				43,4	189,8	43,2	146,4	146,2	— 0,2			
	5	38,35	5,73		43,2	189,3	43,0	146,1	146,3	— 0,2			
VIII					Mittel:		146,40	146,38		— 0,3			21/2 82.
	1	28,56	5,25		32,1	178,2	32,8	146,1	145,4	0,7			
	2				32,8	178,2	32,8	145,4	145,4	0,0			
	3	28,71	5,25	4,66	32,8	178,2	32,7	145,4	145,5	— 0,1	145,475	1,12	
	4				32,7	178,0	32,4	145,3	145,6	— 0,3			
	5	28,00	5,25		32,4	178,0	32,4	145,6	145,6	0,0			
					Mittel:		145,56	145,50		0,3			

21/2 82.

IX	1	20,07	4,95	23,3	169,1	24,0	145,8	145,1	0,7
	2			24,0	169,2	24,0	145,2	145,2	0,0
	3	19,96	5,02	4,92	24,0	169,1	24,1	145,1	145,0
	4				24,1	169,1	24,1	145,0	145,0
	5	19,46	5,10		24,1	169,0	24,1	144,9	144,9
				Mittel: 145,20 145,04 0,8					
X	1	11,62	4,20	14,1	159,2	14,8	145,1	144,4	0,7
	2			14,8	159,4	15,0	144,6	144,4	0,2
	3	11,17	4,25	4,45	15,0	159,5	15,0	144,5	144,5
	4				15,0	159,5	15,0	144,5	144,5
	5	11,43	4,30		15,0	159,6	15,0	144,6	144,6
				Mittel: 144,66 144,48 0,9					
XI	1	4,63	4,00	7,8	153,0	8,7	145,2	144,3	0,9
	2			8,7	153,0	8,8	144,3	144,2	0,1
	3	4,63	4,11	4,60	8,8	153,1	8,8	144,3	144,3
	4				8,8	153,1	9,0	144,3	144,1
	5	4,63	4,23		9,0	153,2	9,0	144,2	144,2
				Mittel: 144,46 144,20 1,2					
				145,037 1,42					
				144,525 1,10					
				144,237 1,20					

21/2 82.

22/2 82.
(morgens).

145,037	1,42
144,525	1,10
144,237	1,20

§ 32. Graphische Darstellung der Versuchsergebnisse.

In den Figuren 5 und 6 sind die Zahlen der Tabellen IV, V, VI, VII, VIII, und IX graphisch dargestellt, und zwar die Temperaturen als Abscissen (Kol. 1) und die elastischen Dehnungen (Kol. 10) als Ordinaten genommen.

§ 33. Betrachtung der graphischen Darstellungen.

Der Elastizitätsmodul wird allgemein aus der gesamten Dehnung, — der elastischen Dehnung (e. D.) plus der elastischen Nachwirkung (e. N.) — berechnet. Da in § 30 das Gesetz der Proportionalität auch für die e. D. bestätigt worden ist, so können wir von einem Modul der elastischen Dehnung (M. d. e. D.) wie von einem Modul der gesamten Dehnung (M. d. g. D.) sprechen.

Was nun den Einfluss der Temperatur auf den M. d. e. D. des Eisendrahtes betrifft, so sieht man aus den Kurven I—III, dass derselbe zwischen 10 und 20° C ein Maximum besitzt, insoweit der Draht nicht in den Zustand durch Erwärmen und Erkalten übergeführt ist, in welchem die Kurve eine regelmässige, ständige Gestalt, hier die nahehin gerade, hat. Es dürfte somit der sogenannte Normalzustand des Eisendrahtes durch das Eintreffen der Geraden angezeigt sein. Indes habe ich ¹⁾ ein solches Maximum auch bei dem M. d. g. D. des Eisens gefunden.

Der Unterschied der e. D. für dieselbe Belastung und nahezu gleiche Temperaturdifferenzen scheint mit dem Wiederholen des Erwärmens und Erkaltes des Drahtes zu wachsen, um für den Normalzustand konstant zu werden. Es ergibt sich diess aus folgender Zusammenstellung:

1) A. Miller, Blätter für das bayerische Realschulwesen, I. Bd. S. 66.

Tabelle:	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Temperatur- differenz	98,54	96,21	99,29	97,78	83,97	94,31
Differenz d. e. D.	2,665	4,788	6,975	6,654	5,624	6,406

Würde man aus jeder der Tabellen IV bis IX den mittleren M. d. e. D. berechnen, so ergäbe sich, wie die Kurven I bis VI (§ 32) zeigen, dass dieser m. M. d. e. D. von Kurve I auf II bedeutend steigt, dann fällt, wieder steigt und endlich wieder fällt, und dass dieser M. d. e. D. selbst dann, wenn er sich einer Grenze nähert, noch kleinen Schwankungen unterworfen zu sein scheint. Die gleiche Beobachtung machte auch F. Kohlrausch — § 4 citierte Abhandlung Seite 493 unten — so dass angenommen werden muss, es bestehen diese Schwankungen auch bei dem M. d. g. D.

§ 34. Zahlengesetz der Aenderung des M. d. e. D. durch die Temperatur.

Bezeichnet E_t den M. d. e. D. bei t^0 , L die Länge des Drahtes, l_t die der e. D., welche der spannenden Kraft P bei der Temperatur t^0 entspricht und Q den Querschnitt des Drahtes, so ist bekanntlich:

$$E_t = \frac{L}{l_t} \cdot \frac{P}{Q} \quad (66)$$

Ist ferner λ_t die e. D. der Längeneinheit bei t^0 und π die Belastung der Querschnittseinheit, so ist:

$$E_t = \frac{1}{\lambda_t} \cdot \pi. \quad (67)$$

Im Hinblick auf die Kurve VI erscheint es zulässig:

$$E_t = \frac{\pi}{\lambda_t} = a + b t \quad (68)$$

zu setzen.

Nach der Methode der kleinsten Quadrate ergibt sich:

$$a = \pi \cdot \frac{\sum t \cdot \sum \frac{1}{\lambda_t} - \sum \frac{1}{\lambda_t} \cdot \sum t^2}{(\sum t)^2 - n \sum t^2} = \pi \cdot \alpha \text{ sowie:}$$

$$b = \pi \cdot \frac{\sum t \cdot \sum \frac{1}{\lambda_t} - n \cdot \sum \frac{t}{\lambda_t}}{(\sum t)^2 - n \cdot \sum t^2} = \pi \cdot \beta.$$

Wird der M. d. e. D. bei 0° mit $E_0 = \pi \cdot \alpha$ bezeichnet und $\frac{\beta}{\alpha} = \gamma$ gesetzt, so erhält man als das erwähnte Zahlengesetz:

$$E_t = E_0 (1 + \gamma t). \quad (68)$$

Diese Formel auf Tabelle IX angewendet gibt:

$$\alpha = + 592,079$$

$$\beta = - 0,251518 \text{ und somit}$$

$$\gamma = - 0,0004277.$$

Die so erhaltene Gleichung:

$$E_t = E_0 (1 - 0,0004277 t) \quad (69)$$

zur Berechnung der M. d. e. D. aus Tabelle IX benützt, liefert die in Tabelle X enthaltenen Werte, welche mit den beobachteten in Anbetracht der Umstände hinlänglich übereinstimmen dürften.

Tabelle X.

t	E_t beobachtet.	E_t berechnet.	Δ
4,63	590,209 π	590,907 π	+ 0,698 π
11,17	589,088 π	589,269 π	+ 0,181 π
19,96	587,107 π	587,059 π	— 0,048 π
28,71	585,692 π	584,858 π	— 0,834 π
39,25	582,791 π	582,207 π	— 0,584 π
47,59	579,668 π	580,109 π	+ 0,441 π
56,80	577,702 π	577,793 π	+ 0,091 π
68,90	574,867 π	574,769 π	— 0,097 π
78,02	571,639 π	572,456 π	+ 0,817 π
88,59	569,533 π	569,797 π	+ 0,264 π
98,94	567,208 π	567,194 π	— 0,015 π

Aus $\pm \left[\frac{\sum \Delta^2}{n-2} \right]^{\frac{1}{2}}$ ergibt sich als „mittlerer Beobachtungsfehler“ für Tabelle IX: $\pm 0,562 \pi$.

§ 35. Anwendung der Formel 69) auf die Tabellen VII und VIII.

Ich habe wegen der im § 33 erwähnten Schwankungen des M. d. e. D. selbst innerhalb des Normalzustandes des Drahtes die Koeffizienten a und b nicht aus allen Tabellen, die schon einen Normalstand des Drahtes wenigstens teilweise anzeigen, berechnet, will aber nun untersuchen, inwieweit sich Formel 69) diesen Beobachtungszahlen anschmiegt. Es muss selbstverständlich für jede Tabelle das E_0 besonders bestimmt werden.

Ist t_1 die mittlere Versuchstemperatur, und λ_1 die dieser entsprechende e. D., haben E_1 und E_0 die bisherigen Bedeutungen, so ist:

$$E_t = E_0 (1 - \gamma t_1) \quad \text{folglich}$$

$$E_t = \frac{\pi}{\lambda_{t_1} (1 - \gamma t_1)} \cdot (1 - \gamma t) \quad (70)$$

Für Tabelle VII ist $t_1 = 41, 20^\circ$ und: $\lambda_{t_1}' = \frac{0,90314}{536,5}$;
die Tabelle liefert somit gemäss (Gl. 70) die Werte:

Tabelle XI.

t	E_t beobachtet	E_t berechnet	Δ
0,83	594,037 π	593,973 π	— 0,065 π
6,21	592,902 π	592,605 π	— 0,297 π
9,05	592,144 π	591,884 π	— 0,260 π
12,21	591,225 π	591,080 π	— 0,145 π
15,30	590,704 π	590,295 π	— 0,408 π
--	—	—	—
29,50	587,684 π	586,686 π	— 0,998 π
39,04	584,230 π	584,261 π	+ 0,031 π
47,45	582,139 π	582,124 π	— 0,015 π
54,11	580,388 π	580,431 π	+ 0,043 π
65,02	577,326 π	577,658 π	+ 0,332 π
74,80	575,231 π	575,172 π	— 0,059 π
83,42	573,446 π	572,982 π	— 0,464 π
98,61	569,584 π	569,121 π	— 0,463 π

In der gleichen Weise liefert die Tabelle VIII, für
welche $t_1 = 63,70$ und $\lambda_{t_1} = \frac{0,92804}{536,5}$ ist:

Tabelle XII.

t	E _t beobachtet	E _t berechnet	Δ
14,42	589,978 π	590,627 π	+ 0,649 π
—	—	—	—
37,57	583,967 π	584,742 π	+ 0,775 π
65,81	577,614 π	577,563 π	— 0,051 π
77,34	575,395 π	574,632 π	— 0,763 π
88,73	572,532 π	571,736 π	— 0,796 π
98,33	569,601 π	569,296 π	— 0,405 π

Der seltene Zeichenwechsel bei Δ kann nicht überraschen, da γ ohne Rücksicht auf Tabelle VII und VIII bestimmt worden ist; immerhin schliessen sich auch die Linien IV und V der Geraden an, nur weichen die Neigungen der 3 Geraden gegen die Abscissenachse etwas von einander ab.

§ 36. Die elastischen Nachwirkungen.

Die Zahlen der Kolumne 11 zeigen, wenn auch im ganzen, da sie im allgemeinen mit der Temperatur steigen, so doch im einzelnen keinen ganz regelmässigen Verlauf. Wollte man in dieser Richtung zuverlässige Beobachtungen machen, so müsste dafür gesorgt werden, dass sicher vor jeder neuen Beobachtung der e. N. die frühere vollständig verschwunden ist. Diese Rücksichtnahme war hier weder thunlich, noch war sie eigentlicher Zweck der Untersuchung. Dass die erwähnte Vorsorge, falls man zuverlässige Zahlen in Bezug auf die e. N. erhalten wollte, notwendig wäre, um dies zu zeigen, habe ich in Tabelle V den Versuch bei derselben Temperatur nach wenigen Minuten wiederholt. Die Zahlen der Gruppe Ia und Ib dieser Tabelle zeigen, dass bei der Wiederholung des Versuches die e. N. nur ungefähr die

Hälfte wurde. Diese Erscheinung hat sich indes oftmals bei hier nicht aufgenommenen Versuchen gezeigt. Andererseits sind diese hier gemessenen e. N. nur ein Teil der ganzen, in genügender Zeit möglichen Nachwirkungen. Endlich sind die gemessenen Grössen sehr klein, so dass leicht beträchtliche Fehler entstehen können. Trotz all' dieser Umstände, habe ich in Fig. 6 die e. N. der Tabelle IX graphisch dargestellt — Kurve VII — um den ungefähren Verlauf derselben sichtlich zu machen. Zwei Punkte O_1 und O_2 wurden dabei ausgeschlossen, weil sie auffallend weit abseits fielen.

§ 37. Beziehung zwischen dem Modul der g. D.,
der e. D. und der e. N.

Sind E , $'E$ und $''E$ beziehungsweise der M. d. g. D., der M. d. e. D. und der M. d. e. N. und weist ferner der diesen Grössen in Zukunft beigesetzte Index auf die Temperaturen 0° , t° und T° hin, auf welche sich die M. beziehen, so lassen sich folgende Relationen zwischen denselben ableiten, wenn man voraussetzen darf, dass die von F. Kohlrausch ¹⁾ aufgestellte Gleichung, welche die Abhängigkeit des E.-M. von der Temperatur ausdrückt, mit Einschluss wenigstens des grössten Teil der elastischen Nachwirkung gilt. Aus der eben erwähnten Abhandlung entnehme ich:

$$E_t = E_0 (1 - \alpha t - \beta t^2) \quad 71) \text{ also}$$

$$E_t = E_T [1 - \alpha (t - T) - \beta (t^2 - T^2)] \quad 72).$$

Im § 34 haben wir gefunden:

$$'E_t = 'E_0 (1 - \gamma t) \quad 73) \text{ somit}$$

$$'E_t = 'E_T [1 - \gamma (t - T)] \quad 74).$$

1) F. Kohlrausch, Poggendorff's Annalen, Bd. 141, S. 493.

Nun hat Kohlrausch für Eisen $\alpha = 0,000483$ und $\beta = 0,00000012$ angegeben, während sich, ebenfalls aus einer Versuchsreihe, in § 34 die Konstante $\gamma = 0,0004277$ ergab. Es ist $\alpha - \gamma = 0,0000557$, ein Wert, dessen Kleinheit bei dem Umstande, dass Herr Professor Kohlrausch und ich nach ganz verschiedenen Methoden und Zielen, sowie mit verschiedenem Material arbeiteten, Beachtung verdient. Sind nun λ_t , λ_e , λ_n die den M.: E_t , E_e , E_n entsprechenden Verlängerungen, nämlich g. D., e. D., und e. N. der Längeneinheit bei der Belastung π auf die Querschnittseinheit, so ist:

$$\lambda_t = \lambda_e + \lambda_n \quad 75) \text{ oder}$$

$$\lambda_n = \pi \cdot \frac{E_t - E_e}{E_t E_e}.$$

Weil λ_t und λ_e erfahrungsgemäss der Grösse π proportional, so ist es auch λ_n und man kann somit von einem M. d. e. N. sprechen. Darnach ist:

$$E_t = \frac{E_e E_n}{E_t - E_e} \text{ oder}$$

$$\frac{1}{E_t} = \frac{1}{E_e} + \frac{1}{E_n} \quad 76), \text{ welcher}$$

Ausdruck den Zusammenhang der drei Modul darstellt. Mit Hilfe der früheren Werte ergibt sich aus 76):

$$E_t = E_e \cdot \frac{(E_e - E_n)(1 - \alpha t - \beta t^2)(1 - \gamma t)}{E_e(1 - \gamma t) - E_n(1 - \alpha t - \beta t^2)} \quad 77) \text{ oder}$$

$$E_t = E_e \cdot \frac{E_e - E_n}{E_e(1 + \alpha t + \beta t^2) - E_n(1 + \gamma t)}; \text{ ferner ist:}$$

$$E_t = E_n \cdot \frac{E_e(1 - \gamma T) - E_n(1 - \alpha T - \beta T^2)}{E_e(1 - \gamma t) - E_n(1 - \alpha t - \beta t^2)} \cdot \frac{(1 - \alpha t - \beta t^2)(1 - \gamma t)}{(1 - \alpha T - \beta T^2)(1 - \gamma T)} \quad 78)$$

$$\text{oder: } "E_t = "E_T \cdot \frac{'E_o (1 + \alpha T + \beta T^2) - E_o (1 + \gamma T)}{'E_o (1 + \alpha t + \beta t^2) - E_o (1 + \gamma t)};$$

und ferner:

$$"E_t = \frac{E_T 'E_T [1 - \alpha (t - T) - \beta (t^2 - T^2)] [1 - \gamma (t - T)]}{'E_T [1 - \gamma (t - T)] \dots E_T [1 - \alpha (t - T) - \beta (t^2 - T^2)]} \quad 79)$$

oder endlich:

$$"E_t = \frac{E_T 'E_T}{'E_T [1 + \alpha (t - T) + \beta (t^2 - T^2)] - E_T [1 + \gamma (t - T)]}$$

Ferner hat man u. a. noch die Relation:

$$" \lambda_t = \lambda_T [1 + \alpha (t - T) + \beta (t^2 - T^2)] - \lambda_T [1 + \gamma (t - T)], \quad 79a)$$

welche eine einfache Kontrolle durch den Versuch zuliesse, die später auch vorgenommen werden soll.

§ 38. Modul der e. D. des Eisens.

Der Durchmesser des Drahtes mittelst einer Mikrometerschraube gemessen beträgt 0,5856 mm, wovon jedoch nur die bei den ersten Stellen vollkommen sicher sind. Von einer genaueren Messung des Durchmessers mittelst Bestimmung des spezifischen Gewichtes wurde vorerst abgesehen. Der Querschnitt $Q = 0,2928^2 \cdot 3,14159 = 0,269335 \square \text{mm}$. Ist p der Hebelarm des Gewichtes $P = 1,1992 \text{ Kgr.}$, so ist

$$\pi = \frac{P \cdot p}{Q \cdot r_s} = \frac{1,1992 \cdot 567}{0,269335 \cdot 70,8} = 35,657 \square \text{mm-Kgr.}$$

Darnach berechnet sich nach Tabelle X $E_o = \pi \cdot \alpha = 35,657 \cdot 592,079 = 21111,98$. Somit ist der M. d. e. D. des untersuchten Eisendrahtes bei 0° angenähert 21112 zu nehmen, angenähert, weil die Bestimmung des Q auf sehr grosse Genauigkeit keinen Anspruch erheben kann, wenn auch eine sehr bedeutende Abweichung von der Wahrheit nicht angenommen zu werden braucht. Der Wert

übersteigt den von Kohlrausch sowohl als von Wertheim für die g. D. angegebenen. Mit letzterem ist überhaupt kein genauer Vergleich zulässig, weil Wertheim auf die Temperatur nicht in dem Masse, wie hier und seitens Kohlrausch geschehen, Rücksicht genommen hat. Aus Tabelle XI ergibt sich ein noch grösserer Wert als M. d. e. D. bei 0° nämlich $'E_0 = 21187$, somit als Mittelwert des M. d. e. D. des untersuchten Eisendrahtes $'E_0 = 21150$. Kohlrausch erhielt für den M. d. g. D. die Zahl $E_0 = 20310$. $'E_0 > E_0$ musste bei nur einiger Vergleichbarkeit erwartet werden, wenn bei den Versuchen Kohlrausch's die e. N. als eingeschlossen vorausgesetzt werden kann. Dagegen gibt Pisati bei 20°C schon den E.-M. des Eisendrahtes zu 21441 an, er musste sich für 0° noch höher stellen. Da aber auch bei Pisati der Einschluss der e. N. anzunehmen ist, so müsste sich der M. d. e. D. aus den Zahlen von Pisati berechnet noch höher ergeben, sich also noch mehr von der von mir gefundenen Zahl entfernen, während die gleiche Berechnung an den Zahlen von Kohlrausch vorgenommen, die Ergebnisse sich den meinigen nähern müssten. Ich darf also wohl annehmen, dass das Gesamtergebn meiner Arbeit, nur einigermaßen gleichartiges Versuchsmaterial vorausgesetzt, mehr mit dem von Kohlrausch als mit dem von Pisati übereinstimmt. Aus Gleichung: $'E_t = 21150 (1 - 0,0004277 t)$ ergibt sich als Abnahme des M. d. e. D. für 1°C der Wert 9,045 kgr. Ferner berechnet sich daraus:

$$\begin{aligned} 'E_0 &= 21150; 'E_{20} = 20969; 'E_{40} = 20788; 'E_{60} = 20607; 'E_{80} = 20426; \\ 'E_{100} &= 20246; 'E_{30} = 20879; 'E_{50} = 20698; 'E_{70} = 20517; 'E_{90} = 20336; \\ &'E_{100} = 20246. \end{aligned}$$

§ 39. Grösse der Aenderung von E_t , $'E_t$ und $''E_t$.

Bezeichnet man die Differenzen $E_t - E_0$, $'E_t - 'E_0$, $''E_t - ''E_0$ beziehungsweise mit $\Delta_t E$, $\Delta_t 'E$, $\Delta_t ''E$ so hat man gemäss § 37:

$$\frac{\Delta_1 E}{E_0} = -(\alpha + \beta t)t \quad 83)$$

$$\frac{\Delta_1 E}{E_0} = -\gamma t; \quad 84)$$

ferner ohne Kürzung:

$$\frac{\Delta_1 E}{E_0} = \frac{(E_0 - E_0)(1 - \alpha t - \beta t^2)(1 - \gamma t)}{E_0(1 - \gamma t) - E_0(1 - \alpha t - \beta t^2)} - 1. \quad 85)$$

Es ist somit $\frac{\Delta_{100} E}{E_0} = -0,0495$ oder cca. 5%,

$$\frac{\Delta_{100} E}{E_0} = -0,0428 \text{ oder cca. 4\%,}$$

$$\frac{\Delta_{100} E}{E_0} = -0,1897 \text{ oder cca. 19\%.$$

Die elastische Nachwirkung des Eisens wird sonach in weit höherem Masse von der Temperatur beeinflusst, als die elastische Dehnung desselben. Sie unterscheiden sich also nicht bloss dadurch, dass die e. N. von der Zeit abhängig, die e. D. davon unabhängig ist, sondern auch noch dadurch, dass zwar beide in gleichem Sinne jedoch in ganz verschiedenem Grade von der Wärme beeinflusst werden. Es scheint daher angezeigt, sie voneinander getrennt zu halten. Diesen starken Einfluss der Wärme auf die e. N. bestätigen auch die Autoren, welche sich speziell mit der Erforschung derselben beschäftigt haben.

§ 40. Resultate der vorliegenden Untersuchungen.

Hält man die im Vorstehenden definierten Begriffe und deren Bezeichnungen „gesamte Dehnung“ (g. D.), „elastische Dehnung“ (e. D.) und „elastische Nachwirkung“ (e. N.),

sowie die Bezeichnungen des diesen Deformationen entsprechenden Modul, nämlich M. d. g. D., M. d. e. D., M. d. e. N. fest, so ergibt sich im Zusammenhalte mit dem von Herrn Kohlrausch und Loomis bezüglich des E.-M. d. g. D. gefundenen Resultaten in Bezug auf Eisen Folgendes:

1) Wie der M. d. g. D. nimmt auch der M. d. e. D. mit zunehmender Temperatur zwischen 0° und 100° C ab, bei letzterem jedoch ist die Abnahme der ersten Potenz der Temperatur gerade proportional.

2) Dieses Gesetz gilt aber erst dann, wenn der Eisendraht durch öfteres Erwärmen und Erkalten in den sogenannten Normalzustand eingetreten ist, der durch die in Ziff. 1 angegebene Eigenschaft definiert zu sein scheint.

3) Bei dem Uebergang von dem ursprünglichen in den Normalzustand besitzt der M. d. e. D. des Eisendrahtes zwischen 10° und 20° C ein Maximum, was ich indes auch für den M. d. g. D. bei früheren Versuchen gefunden habe.

4) Ausserhalb des Normalzustandes ist der mittlere M. d. e. D. ziemlichen Schwankungen unterworfen, die jedoch auch innerhalb desselben nicht gänzlich zu verschwinden scheinen.

5) Die e. N. — auch während des An- und Abspannens — des Drahtes nimmt mit der Temperatur zu, also der M. d. e. N. ab, jedoch ist der Einfluss der Temperatur auf die e. N. weit grösser als auf die e. D.

6) Da sich, wie gezeigt worden ist, die elastische Nachwirkung während der An- und Abspannung wenigstens mit erster Annäherung bestimmen lässt, so könnte hiemit auch die Untersuchung der gesamten elastischen Nachwirkung eine Förderung erfahren.

7) Ferner weisen vorstehende Resultate darauf hin, dass es bei der Untersuchung der Molekularkräfte geboten

erscheint, die e. D. und e. N. strenge getrennt zu halten.

8) Endlich dürfte nun als feststehend angenommen werden können, dass der longitudinale Modul d. g. D. des Eisens innerhalb des Normalzustandes durch die Temperatur dieselbe Aenderung erfährt, wie der der Torsion ¹⁾.

1) F. Kohlrausch, Poggendorff's Annalen, Bd. 141 S. 499.

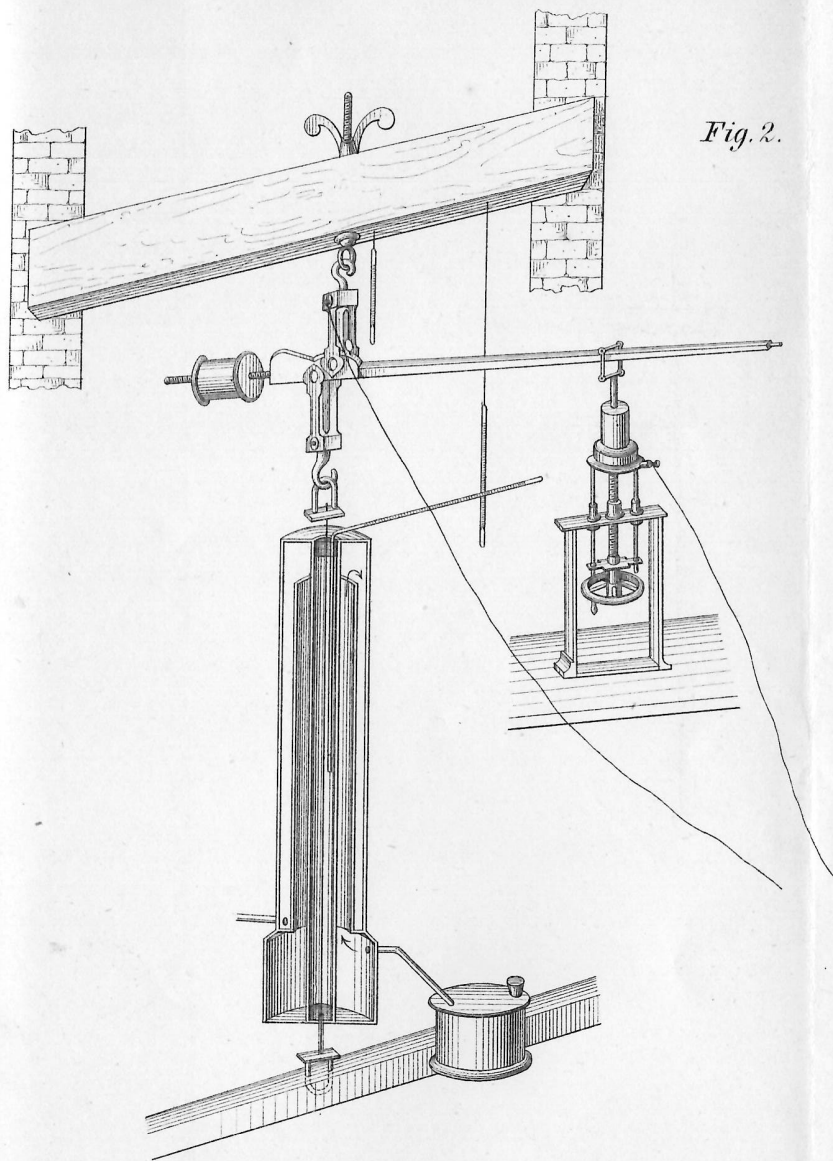
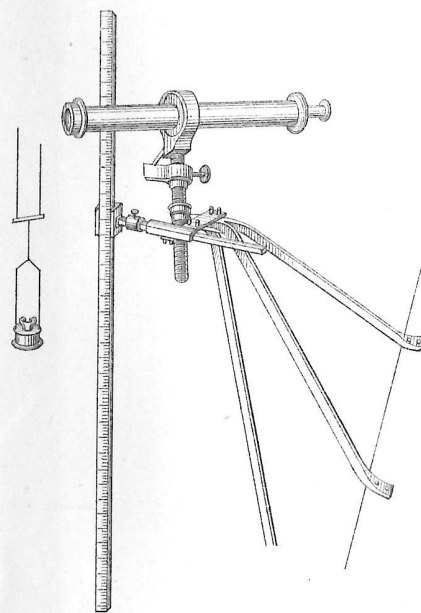


Fig. 2.



Zu Dr. A. Miller's Abhandlung.

Fig. 3.

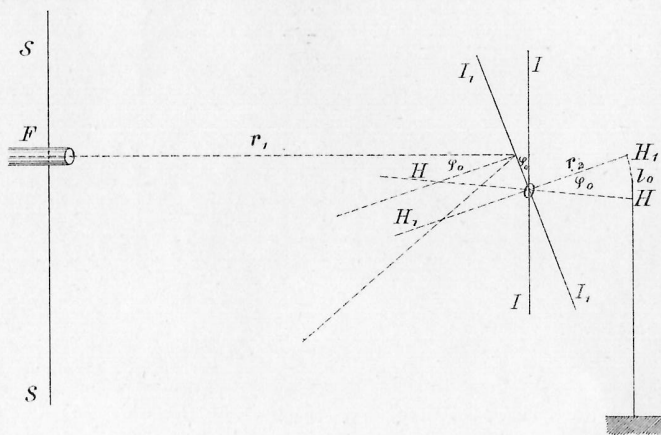
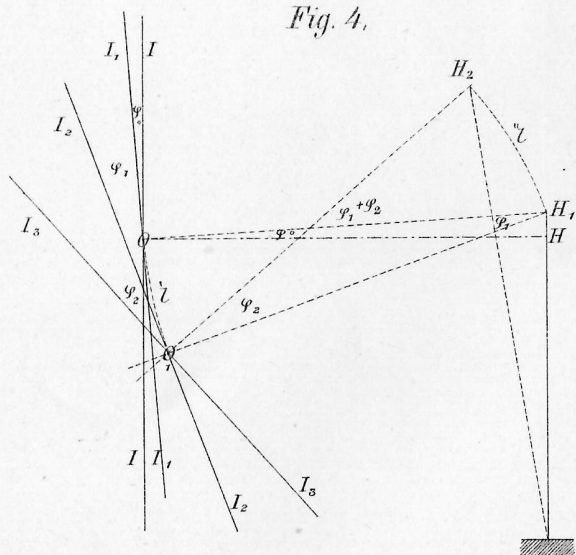
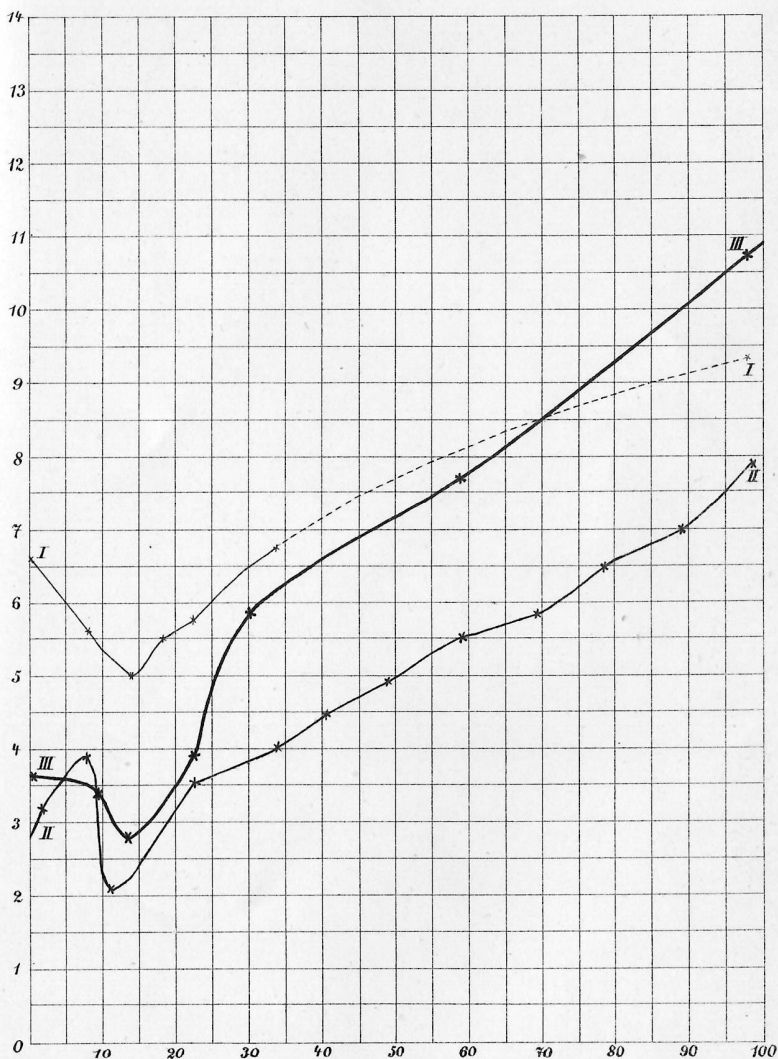


Fig. 4.



Zu Dr. A. Miller's Abhandlung.

Fig. 5.



Zu Dr. A. Miller's Abhandlung.

Fig. 6.

