Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1883. Heft I.

München.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

1883.

In Commission bei G. Franz.

Sitzung vom 3. März 1883.

Herr **Brill** legt eine Abhandlung von Herrn Dr. W. **Hess** in München vor:

„**Ueber die Biegung und Drillung eines unendlich dünnen elastischen Stabes.**"

Wirken auf das eine Ende eines geraden und ungedrillten elastischen Stabes von cylindrischer Gestalt und im Verhältnis zur Länge des Stabes sehr dünnem Querschnitte (eines Drahtes) irgend welche Kräfte ein, während das andere Ende festgehalten bleibt, so wird die gerade elastische Centrallinie oder die Achse des Stabes, d. i. die Verbindungslinie der Trägheitsmittelpunkte der einzelnen Querschnitte, in eine Curve gebogen. In jedem Punkte P dieser Curve setzt der Stab der beabsichtigten Deformation Widerstände entgegen, welche nach 3 durch P zu einander senkrechten Achsen wirkend gedacht werden können: nach den 2 Hauptträgheitsachsen des Querschnittes (Hauptwiderstandsmomente gegen Biegung) und nach der Tangente an die Centrallinie in P (Hauptwiderstandsmoment gegen Drillung). Reducieren sich die wirkenden Kräfte auf eine Einzelkraft. deren Richtung in die Ebene aus der geraden Stabachse und einer der Hauptträgheitsachsen des Querschnitts fällt, so ist die Gleichgewichtsfigur der Centrallinie eine ebene Curve, die sogenannte elastische Linie.

Die Eigenschaft derselben, in jedem Punkte eine dem Momente der Kraft proportionale Krümmung zu besitzen, wurde bekanntlich von Jacob Bernoulli [1]) entdeckt. Die Gleichung, ausgedrückt durch ein elliptisches Integral 1. Gattung, wurde von Euler [1]) und Lagrange [1]) gefunden, und es stellte Ersterer [2]) mit Hilfe von Reihenentwicklungen und durch Betrachtung der Differentialgleichung der Curve für diese letztere 9 verschiedene Formen auf.

Die elastische Linie doppelter Krümmung hingegen war nicht so einfach zu charakterisieren. Lagrange [1]) versuchte zwar, das Bernoulli'sche Theorem von der Proportionalität der Krümmung ohne Weiteres auf die Raumcurve zu übertragen, er übersah jedoch, dass bei der Deformation des Drahtes die einzelnen Querschnitte in ihren Ebenen Drehungen erfahren, wodurch sie einen Widerstand, den gegen Torsion, zu überwinden haben. Poisson [1]) vervollständigte die Lagrange'schen Gleichgewichtsbedingungen durch Hinzufügen eines Terms, welcher auf das Torsionsmoment Rücksicht nimmt; freilich setzte er das letztere constant voraus für jeden Punkt der Centrallinie, was nur für einen Stab erfüllt ist, dessen Querschnitt bezüglich aller durch seinen Mittelpunkt gezogenen Geraden gleiches Trägheitsmoment besitzt. Es waren daher die Integrationen der Poisson'schen Gleichungen durch Binet [3]) und Wantzel [3]) nur für einen solchen, in allen Richtungen gleich biegsamen Draht giltig.

Erst Kirchhoff [4]) hat die strengen Bedingungen für das Gleichgewicht des elastischen Drahtes in endgiltiger Form aufgestellt und dabei die Bemerkung gemacht, dass dieselben genau mit denjenigen Gleichungen übereinstimmen, welche

---

1) Vgl. hierüber die Literaturangabe in Navier: de la résistance des corps solides (XII—XXII). Paris, bei Dunod. 1874. 8⁰.

2) De curvis elasticis. Additamentum primum zu Methodus inveniendi lineas curvas etc. Lausanne und Genf 1744. 4⁰.

3) Comptes rendus, Bd. 18, 1115—1119. Ibidem 1197—1201.

4) Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes. Crelle's J. 56. p. 285—313.

die Bewegung eines um einen festen Punkt rotierenden starren Körpers definieren. Durch diese Uebereinstimmung zweier ganz verschiedener Probleme ist somit nicht nur die Möglichkeit geboten, die expliciten Formeln, welche für die Bewegung bereits aufgestellt sind, für die Bestimmung der Gleichgewichtszustände des Stabes zu verwerten, sondern auch Schritt für Schritt jedem Vorgange bei der Rotation des Körpers einen äquivalenten bei der Deformation des Drahtes gegenüberzustellen und umgekehrt aus der wechselseitigen Beziehung beider Probleme vielleicht zu neuen Fragen für das erstere zu gelangen. Eine derartige Uebertragung scheint bisher, obgleich die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt bereits für mehrere Fälle gelöst ist, noch nicht versucht worden zu sein; ich habe mich daher mit dieser Frage näher beschäftigt, und zwar vorerst unter der Annahme, dass auf den freien Endquerschnitt nur ein Kräftepaar einwirke. Das Analogon hiezu findet sich in der Drehung eines Körpers um seinen Schwerpunkt. Diese Art der Bewegung ist aber hinreichend klar gestellt, sobald man, wie ich in meiner Doktordissertation [1]) gethan habe, auf die Verknüpfung der bekannten Anschauungsweisen Poinsot's [2]) mit den strengen analytischen Formeln Jacobi's [3]) Bedacht nimmt; es muss also möglich sein, sich auch von den Vorgängen bei der Biegung und Drillung des elastischen Stabes ein Bild zu verschaffen. Meine Untersuchung, deren wesentliche Resultate ich im Folgenden mitzuteilen mir erlaube, war zunächst darauf gerichtet, die Grösse der Biegung und Drillung in jedem der einzelnen Querschnitte und den Einfluss, welchen eine verschiedene Anordnung der absoluten Werte der 3 Haupt-

---

1) Das Rollen einer Fläche 2. Grades auf einer invariablen Ebene. München 1880 oder Programm der Kreisrealschule Müchen 1881.

2) Théorie nouvelle de la rotation des corps. Liouv. J. Jahrg. 1851. p. 9—129, 289—336.

3) Sur la rotation d'un corps. Op. II. p. 139—197.

widerstände auf dieselbe ausüben, zu ermitteln; sodann bestimmte ich die Curve, in welche die elastische Centrallinie gebogen wird; endlich übertrug ich die Poinsot'sche Interpretation, wonach die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt versinnlicht werden kann durch das Abrollen eines beweglichen Kegels auf einem festen, in der Weise, dass die Ueberführung des geraden Stabes in seinen gebogenen und gedrillten Zustand hervorgebracht erscheint durch das Aufbiegen einer biegsamen windschiefen Fläche auf eine zweite, feste windschiefe Fläche.

Hierbei ergab sich einmal, dass viele Fragen, wie diejenige nach der Gestalt der gebogenen elastischen Centrallinie, nicht aus der Betrachtung des Rotationsproblems beantwortet werden können, und weiter, dass die Untersuchung der Gleichgewichtsverhältnisse des Stabes eine viel ausgedehntere, mehr Mannigfaltigkeiten umfassende ist als jene der Bewegung — hauptsächlich aus dem Grunde, weil die 3 Widerstände des Drahtes gegen Deformation nicht, wie die 3 Hauptträgheitsmomente des Körpers, denen sie entsprechen, Grössen derselben Art sind. Während es bei den letzteren genügt, eine einzige Festsetzung hinsichtlich ihres Grössenwertes zu treffen, muss bei dem elastischen Stab unterschieden werden, ob der Widerstand gegen Drillung unter den 3 Widerständen der kleinste, mittelste oder grösste ist.

1.

Es möge auf das freie Ende des Stabes ein Kräftepaar von der Intensität 1 einwirken, dessen Achse eine beliebige Richtung besitzt. Dann wird die gerade elastische Centrallinie des Stabes in eine Curve gebogen und gleichzeitig der Querschnitt jedes Punktes P um die Tangente der Centrallinie in P gedreht — der Stab erscheint gebogen und gedrillt. Wählen wir diese Tangente zur Achse Z', die Hauptträgheitsachsen des Querschnittes zu Achsen X', Y', so bilden

X′ Y′ Z′ das rechtwinklige Coordinatensystem der 3 Hauptachsen des Stabes.

Vor der Einwirkung des Kräftepaares werden die Achsen Z′ alle in die gerade Stabachse fallen, die Linien X′ und Y′ unter sich parallel sein. Nach der Deformation werden die Lagen der 3 Hauptachsen, je nach der Bogenentfernung s ihres Anfangspunktes P vom freien Endquerschnitt, andere und andere werden, also abhängig von s sein. Dieselben sind bekannt, sobald ihre Neigungscosinus

$$a, b, c;\ a', b', c';\ a'', b'', c''$$

gegen die 3 festen Coordinatenachsen

$$X;\ Y;\ Z$$

eines mit X′ Y′ Z′ congruenten Systems X Y Z in Funktionen von s vorliegen.

Nun führt die Bestimmung der a, b, c zunächst auf dieselben Differentialgleichungen, wie sie bei der Rotation eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt O auftreten, nemlich auf die Euler'schen Gleichungen [1])

$$A\frac{dp}{ds} + (B-C)\,qr = o$$

$$B\frac{dq}{ds} + (C-A)\,rp = o$$

$$C\frac{dr}{ds} + (A-B)\,pq = o$$

1) Wir entnahmen dieselben für unser Problem dem Buche von Clebsch: Theorie der Elasticität fester Körper, p. 211. Da Clebsch die Bogenlänge vom festen Ende ab rechnet und wir sie vom freien Querschnitt an zählen, ist in unseren Formeln, um auf die von Clebsch angegebenen zurückzukommen, abgesehen von einer anderen Bezeichnung der Constanten A, B, C und der Grössen p, q, r, ds mit —ds zu vertauschen. — Ueber das Rotationsproblem s. etwa Poisson, traité de mécanique t. II. No. 414 u. ff.

Es entsprechen hiebei

den 3 Haupt(trägheits)achsen X', Y', Z' des rotierenden Körpers	die 2 Hauptachsen X', Y' der Biegung und die Hauptachse Z' der Drillung des elastischen Stabes [dieselben mögen vor der Einwirkung des Kräftepaares den 3 Hauptachsen des Körpers parallel liegen];
den Hauptträgheitsmomenten A, B, C des Körpers um X', Y', Z'	die Hauptwiderstands-Momente A, B gegen Biegung um X', Y' und C gegen Drillung um Z';
dem zur Bewegung anregenden Kräftepaare l	das auf den freien Querschnitt einwirkende Kräftepaar l;
den Winkelgeschwindigkeits-Componenten p, q, r um die 3 Hauptträgheitsachsen X', Y', Z'	die Componenten p, q der Biegung um X' Y' und r der Drillung um Z' eines Punktes P der elastischen Centrallinie;
der Fortschreitung ds in der Zeit s (s gerechnet von $s_0 = o$ an)	die Fortschreitung ds auf dem Bogen s der Centrallinie (s gerechnet vom freien Ende, $s_0 = o$, an);
den Componenten des angreifenden Kräftepaares Ap, Bq, Cr um die Hauptachsen X', Y', Z', welche gerade geeignet sind, die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r hervorzubringen	die Componenten des Kräftepaares, welches in jedem Punkte P der Centrallinie die durch das afficierende Paar hervorgerufene Spannung darstellt, und gerade fähig ist, die Biegungscomponenten p, q, sowie die Drillungscomponente r für P zu erzeugen;

der aus p, q, r nach dem Parallelepiped der Winkelgeschwindigkeiten zusammengesetzten „instantanen Drehgeschwindigkeit“ $\Theta = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ für eine Zeit s	die aus den Biegungsgrössen p, q und der Drillungsgrösse r eines Punktes (s) rechtwinklig zusammengesetzte Grösse der *Krümmung* $\Theta = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ für diesen Punkt;
der Achse, um welche die momentane Drehung Θ erfolgt, der „instantanen Drehachse“	die Achse, um welche die Krümmung Θ der Centrallinie in P vollzogen gedacht wird, die *instantane Krümmungsachse*;
dem aus dem Componenten Ap, Bq, Cr nach Richtung und Grösse zusammengesetzten momentan wirkenden Kräftepaar $l = \sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}$,	die aus den Componenten Ap, Bq, Cr eines Punktes P (s) nach Richtung und Grösse resultierende *Spannung* $l = \sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}$;
der Kräftepaarachse zur Zeit s	die *Spannungsachse* für den Punkt P, dessen Entfernung vom freien Ende s beträgt.

Als neues Element kommt für den Stab die Grösse reiner Biegung $\Theta' = \sqrt{p^2 + q^2}$ herein, welche sich aus den für einen Punkt P auftretenden Componenten p, q reiner Biegung rechtwinklig zusammensetzt; die Achse von Θ', die Biegungsachse, fällt selbstverständlich stets in den Querschnitt von P. Der Biegungsgrösse Θ' würde in der Theorie der Rotation die Componente Θ' der Winkelgeschwindigkeit Θ des Körpers entsprechen, welche in die Ebene der 2 Hauptträgheitsachsen X′, Y′ zu liegen kommt; dieselbe besitzt keine besondere geometrische Bedeutung. Dagegen ist unsere „Biegungsgrösse“ Θ' offenbar das, was man für die Curve doppelter Krümmung, in welche die elastische Centrallinie gebogen werden wird, gemeinhin als „Krümmung“ zu bezeichnen pflegt. Wir werden letzteres Wort nicht gebrauchen, sondern es zur Bezeichnung der gesamten Deformation, welche das Stabelement eines Punktes P erleidet, verwerten.

Hat man die Euler'schen Differentialgleichungen gelöst, so dienen die Relationen

$$da = (br - cq)\, ds \qquad da' = (b'r - c'q)\, ds \qquad da'' = (b''r - c''q)\, ds$$

u. s. w.

zur Bestimmung der 9 Neigungscosinus a, b, c ... c'' des Coordinatensystems $X' Y' Z'$ der 3 Hauptachsen des Stabes gegen das feste Coordinatensystem X Y Z des Raumes. Diese Grössen hängen bekanntlich durch folgende, der orthogonalen Substitution entspringende Gleichungen zusammen:

$$a = b'c'' - b''c' \qquad a' = b''c - bc'' \qquad a'' = bc' - b'c$$

u. s. w.

Die Tangente Z' eines Punktes P der Centrallinie bildet mit den festen Coordinatenachsen X, Y, Z Winkel, deren Neigungscosinus beziehungsweise c, c', c'' sind; für die Coordinaten x, y, z von P bezüglich dieses Systems erhält man also

$$dx = c\,.\,ds \qquad dy = c'\,.\,ds \qquad dz = c''\,.\,ds$$

Integriert man diese Differentialgleichungen, so erhält man die Coordinaten x, y, z eines Punktes der Stabcurve in Funktionen des Bogens s.

Sind für einen Punkt P der elastischen Centrallinie die Grösse der in ihm auftretenden Biegung und Drillung bestimmt, ist ferner die Lage des für ihn verzeichneten Systems der Hauptachsen der Biegung und Drillung gegen ein festes Coordinatensystem bekannt, und ist überdies jede Coordinate von P bezüglich dieses festen Systems gefunden, so ist der Gleichgewichtszustand des elastischen Stabes im Wesentlichen als bekannt zu betrachten.

2.

Das einen starren, um seinen Schwerpunkt drehbaren Körper angreifende Kräftepaar l bleibt bekanntlich während der ganzen Dauer s der Bewegung nach Intensität und Stellung constant, d. h. die Grösse l ist ebenso unveränderlich, wie die Lage der Kräftepaarebene und der Kräftepaarachse im Raume. Die letzteren werden als „invariable Ebene“ und „invariable Achse“ bezeichnet. Analog folgt:

> Das Kräftepaar l, welches für einen Punkt P der Centrallinie die daselbst hervorgerufene Spannung bezeichnet, ist für alle Punkte der Centrallinie s nach Intensität und Stellung constant, d. h. alle Spannungsachsen im gebogenen Stabe sind parallel der Achse des den freien Querschnitt afficierenden Kräftepaares und haben mit dieser gleiche Grösse. Es ist also die Ebene des anregenden Paares eine „invariable Ebene“, die Achse desselben eine „invariable Achse“ des Raumes.

Aus der Thatsache, dass die Componente der Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Körpers längs der invariablen Achse des Kräftepaares für die ganze Zeitdauer s der Drehung constant bleibt, folgt,

> dass die Componente der Krümmung eines Punktes P des gegebenen Stabes auf die invariable Achse des die Spannung in P darstellenden Kräftepaars für die ganze Bogenlänge s des Stabes constant ist.

Aus dieser Bemerkung darf natürlich nicht geschlossen werden, dass die Projection der gebogenen Stabachse auf die zu der invariablen Achse senkrecht liegende invariable Ebene ein Kreis sei; denn die soeben erwähnte Krümmungscomponente ist nicht eine Grösse reiner Biegung, sondern sie enthält neben einer solchen auch noch einen Drillungsanteil.

Nach der Anschauungsweise Poinsot's kann die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt versinnlicht werden durch das Abrollen eines beweglichen Kegels auf einem festen, mit welchem der erstere in jedem Augenblicke eine Erzeugende gemein hat. Die Spitzen beider Kegel befinden sich in dem fixen Punkte; die gemeinsame Erzeugende ist die Achse, um welche sich die augenblickliche Drehung vollzieht, und wird „instantane Achse der Drehung" genannt. Ganz ähnlich

> kann die Ueberführung eines unendlich dünnen elastischen Stabes von seinem geraden und ungedrillten in seinen gebogenen und gedrillten Zustand hervorgebracht werden durch das Aufbiegen einer biegsamen windschiefen Fläche auf eine zweite, feste windschiefe Fläche, mit welcher die erstere in jedem Augenblicke eine Erzeugende gemein hat. Die Leitlinien beider Flächen sind die gerade und die gebogene elastische Centrallinie; die gemeinsame Erzeugende ist die Achse, um welche sich die Krümmung des Stabelementes eines Punktes P vollzieht,[1]) und wird „instantane Achse der Krümmung" genannt.

Dreht sich der starre Körper um seinen Schwerpunkt O, so ist der rollende Kegel vom zweiten Grade, der feste Kegel transcendent. Man erhält den ersteren, wenn man aus den Componenten p, q, r der Winkelgeschwindigkeit bezüglich der als ruhend angenommenen 3 Hauptträgheitsachsen die Lage der jedesmaligen instantanen Drehungsachse verzeichnet, und man erhält den festen Kegel, wenn man ganz ebenso aus den Winkelgeschwindigkeitscomponenten, welche um die 3 durch O gehenden festen Coordinatenachsen des Raumes erscheinen, die resultierende Drehungsachse construiert. Hieraus kann gefolgert werden:

> Falls auf das Ende des elastischen Stabes nur ein Kräftepaar einwirkt, sind die Erzeugenden der biegsamen windschiefen Fläche parallel der Erzeugenden eines Kegels zweiten Grades (des rollenden Kegels der instantanen Dreh-

1) Man kann sich diese Krümmung hervorgebracht denken, indem man zuerst das Bogenelement um die Achse Θ' der Biegung dreht und sodann dem Querschnitt um ds selbst eine Drehung erteilt.

ungsachsen der Bewegung); die Erzeugenden der festen windschiefen Fläche sind parallel den Erzeugenden eines transcendenten Kegels (des festen Kegels der instantanen Drehungsachsen der Bewegung).

Die Erzeugenden der ersteren, biegsamen Fläche erhält man, wenn man für jeden Punkt der elastischen Centrallinie des noch undeformierten Stabes die Achse Θ der Gesamtkrümmung aus den 3 Krümmungscomponenten p, q, r, welche in dem betreffenden Punkte um die Hauptachsen der Biegung und Drillung erscheinen, sich construiert. Die Erzeugenden der zweiten, festen Fläche werden gefunden, wenn man für jeden Punkt P des deformierten Stabes aus den Componenten der Krümmung, welche um die Richtungen der 3 festen Coordinatenachsen wirkend gedacht werden können, die resultierende Krümmung aufsucht.

Trägt man auf jeder Drehungsachse des Körpers die Grösse der um dieselbe stattfindenden Drehgeschwindigkeit vom Schwerpunkt O aus als Strecke auf, so bilden die erhaltenen Endpunkte für den beweglichen Kegel eine Raumcurve 4. Ordnung, die Poinsot'sche Polodie. Auf dem festen Kegel hingegen wird eine ebene, wellenförmige Curve von transcendentem Charakter erzeugt, in welcher niemals Wendepunkte[1]) auftreten können; dieselbe hat von Poinsot den Namen Herpolodie erhalten. Analog zeigt sich:

> Trägt man auf jeder instantanen Krümmungsachse des Stabes die Grösse der um dieselbe wirkenden Krümmung vom Punkte P der elastischen Centrallinie aus auf, so bilden die auf diese Weise erhaltenen Endpunkte je eine Curve für die biegsame und feste windschiefe Fläche — die Curve der Polodie und Herpolodie.[2]) Beide Curven

1) Vgl. hierüber meine oben erwähnte Dissertation.

2) Unter Beibehaltung der Bezeichnungen Poinsot's.

sind transcendent; die Polodie ist auf einem um die gerade elastische Centrallinie des Stabes beschriebenen Cylinder zweiten Grades gelegen.

Verzeichnet man, wie aus den Componenten p, q, r die instantane Drehungsachse Θ, so aus den jeweiligen Componenten Ap, Bq, Cr die Achse des wirkenden Kräftepaars l nach Richtung und Grösse, so bilden diese Achsen für den als ruhend angenommenen Körper gleichfalls einen Kegel zweiten Grades, ihre Endpunkte wieder eine (sphärische) Raumcurve 4. Ordnung; dagegen ist für den Raum, wie bekannt, die Achse des Kräftepaares nach Lage und Grösse unveränderlich.

Construiert man aus den Componenten Ap, Bq, Cr der Spannung eines Punktes P der elastischen Centrallinie die Achse der Spannung nach Grösse und Richtung, so bilden diese Achsen für den in seinem undeformirten Zustande sich befindenden Stab wieder eine windschiefe Fläche, deren Erzeugende denjenigen eines Kegels 2. Grades parallel sind und deren Endpunkte eine transcendente Curve bilden, welche auf einem um die gerade Centrallinie beschriebenen Cylinder 2. Grades gelegen ist. Dagegen sind für die Punkte der gebogenen elastischen Centrallinie die Spannungsachsen, wie oben erwähnt, alle parallel, erfüllen also eine Cylinderfläche, deren Erzeugende mit der Achse des anregenden Kräftepaares l gleiche Richtung besitzen; die Endpunkte bilden eine Curve, welche der gebogenen elastischen Centrallinie congruent und parallel ist.

Die Kegel der Kräftepaarachsen und die beiden Flächen der Spannungsachsen besitzen übrigens keine so hervorragende geometrische Bedeutung wie die Kegel der instantanen Drehungsachsen beziehungsweise die Flächen der instantanen Krümmungsachsen.

3.

Wir haben bereits oben hervorgehoben, dass vielen Fragen, welche bei der Untersuchung des Gleichgewichtszustandes des elastischen Stabes auftreten, äquivalente in der Theorie der Rotation nicht zur Seite stehen. Insbesondere besitzt die Untersuchung der Form der gebogenen elastischen *Centrallinie* kein Analogon.

Man findet für dieselbe

eine schraubenförmig gewundene periodische Linie, welche in gleichlange congruente Teile zerlegt werden kann. Sie kann niemals Wendepunkte besitzen, auch keine ebene Curve sein, ausgenommen jene Fälle, in welchen das afficierende Kräftepaar um eine der Biegungsachsen des Endquerschnitts oder um die Stabachse selbst gedreht hat, wobei die elastische Centrallinie in einen Kreis gebogen wird, respective gerade bleibt.

Unter allen *Projectionen* dieser Curve ist jene *auf die invariable Ebene* des angreifenden Kräftepaars die einfachste:

dieselbe ist gleichfalls periodisch und besitzt ebensowenig Wendepunkte wie die Raumcurve selbst. Ihre Form kann niemals ein Kreis werden, ausser es dreht wieder das Kräftepaar um eine Hauptbiegungsachse selbst oder es sind die beiden Widerstände gegen Biegung einander gleich. Es kann also die elastische Centrallinie des Stabes mit Ausnahme dieser 2 speciellen Möglichkeiten nie auf einem Kreiscylinder liegen, dessen Achse der invariablen Kräftepaarachse parallel ist.

Eine Untersuchung der Projectionen der Gleichgewichtsfigur der elastischen Centrallinie auf andere Ebenen zeigt,

dass diese Projectionen in keiner derselben Periodicität besitzen, dass sie insbesondere die Form eines Kreises nicht annehmen können, so dass also die elastische Centrallinie im allgemeinen Falle überhaupt nicht auf einen Kreiscylinder aufgeschraubt werden kann.

4.

Eine weitere Abweichung in der Behandlung der Probleme des elastischen Stabes und der Bewegung des starren Körpers ergibt sich daraus, dass die 3 Hauptträgheitsmomente A, B, C des Körpers Grössen derselben Art sind, während die Widerstände A, B gegen Biegung des Drahtes von dem Widerstande C gegen Drillung[1]) ebenso verschieden sind, wie das Wesen der Biegung von jenem der Drillung selbst. Es genügt für das Rotationsproblem eine einzige Anordnung der Grössen A, B, C etwa $A > B > C$; dagegen müssen von vornherein für das Problem des Stabes notwendig 3 Unterscheidungen getroffen werden, je nachdem der Widerstand gegen Drillung der kleinste ($A > B > C$), mittelste ($B > C > A$) oder grösste ($C > A > B$) unter den 3 Widerständen überhaupt ist.

Bleibt man bei der Festsetzung $A > B > C$ für die zu betrachtende Bewegung stehen, so zerfällt die Untersuchung in 2 verschiedene Teile: es ist nemlich der Poinsot'sche Kegel der Polodie niemals um die Achse des mittleren Trägheitsmomentes beschrieben, sondern entweder um die Achse grössten oder kleinsten Momentes, und je nachdem die eine oder andere dieser zwei Möglichkeiten eintritt, sind die sich ergebenden Formeln verschiedene. Ganz ebenso muss für jede der 3 Möglichkeiten, dass der Widerstand gegen Drillung unter den 3 Widerständen gegen Deformation des Drahtes der grösste mittelste, kleinste sei, noch einmal unterschieden werden, ob der Kegel, dessen Erzeugenden die instantanen Krümmungsachsen parallel

1) S. hierüber Clebsch a. a. O. p. 196.

sind (s. § 2), um die Achse des grössten oder kleinsten Widerstandes beschrieben erscheint — so dass das Problem der Biegung und Drillung eines unendlich dünnen elastischen Stabes für 6 verschiedene Möglichkeiten zu lösen sein wird, welche sich übrigens der Gleichartigkeit der 2 Biegungswiderstände wegen auf 3 wesentlich differierende reducieren.

Die Gestalt der gebogenen elastischen Centrallinie wird von den verschiedenen Anordnungen der Grössen A, B, C der Deformationswiderstände im Wesentlichen nicht beeinflusst, so dass

> die gebogene elastische Centrallinie immer den Typus besitzen wird, wie er im vorhergehenden Abschnitte charakterisiert wurde — einerlei, ob der Widerstand gegen Torsion als der numerisch grösste, mittelste oder kleinste unter den 3 Widerständen gegen Deformation angenommen wird.

Um so bedeutender ist dagegen die Rolle, welche eine verschiedene Ordnung der Grössen A, B, C der Hauptwiderstände in den Biegungs- und Drillungsverhältnissen eines einzelnen Querschnittes spielt. Wir notieren hierüber die Sätze:

> Ist der Widerstand gegen Torsion unter den 3 Hauptwiderständen des Drahtes gegen Deformation der mittelste, so kann die Drillung des Stabes nicht fortwährend im nemlichen Sinne erfolgt sein, sondern es muss notwendig Querschnitte geben, zu deren beiden Seiten der Stab im entgegengesetzten Sinne gedrillt erscheint; diese Querschnitte selbst haben dann gar keine Drehung in ihrer Ebene erfahren, und für alle Querschnitte, welche von ihnen nach links und rechts gleichweit entfernt liegen, ist die absolute Grösse der Drillung die gleiche.
>
> Ist der Widerstand gegen Drillung unter den 3 Hauptwiderständen des Drahtes gegen Deformation der grösste,

so kann in einem der 2 vorhin angeführten Unterfälle der Sinn der Drillung niemals wechseln: sämtliche Querschnitte des Stabes erscheinen im nemlichen Sinne gedreht und es wechselt die Grösse der Drillung ganz symmetrisch zwischen einem Maximum und einem Minimum. Im anderen Unterfalle wird dagegen die Richtung in der Drillung wechseln. — Genau die gleichen Bemerkungen sind zutreffend für einen Stab, dessen Torsionswiderstand der kleinste ist.

Auch bezüglich des Sinnes, in welchem die Biegung um eine der Biegungsachsen des Querschnittes vor sich gegangen scheint, lassen sich solche Ueberlegungen anstellen.

Ist ein Widerstand gegen Biegung unter den 3 Hauptwiderständen der mittelste, so kann die Biegung, welche man sich um die Achse des Widerstandes wirkend denken kann, niemals im selben Sinne erfolgt sein. Dieselbe wechselt, indem sie für gewisse Punkte der elastischen Centrallinie 0 wird; in diesen Punkten ist nur eine Biegung um die andere Biegungsachse erfolgt — es ist also die Hauptebene aus der Biegungsachse des mittleren Widerstandes und der Torsionsachse Schmiegungsebene der elastischen Centrallinie für den betreffenden Punkt geworden.

Ist ein Widerstand gegen Biegung unter den 3 Hauptwiderständen der grösste oder auch der kleinste, so kann für je einen der 2 Unterfälle, welche diesen Festsetzungen zukommen, der Sinn der Biegung um jene Biegungsachse niemals wechseln, es kann also niemals die Hauptebene aus der besprochenen Biegungsachse und der Torsionsachse Schmiegungsebene der Centrallinie werden.

5.

Vorstehende Sätze wurden aus der Betrachtung der Ausdrücke gewonnen, welche für die Grössen p, q der Biegungscomponenten und r der Drillungscomponente in Funktionen des Bogens s aufgestellt werden können. Es mag von Interesse sein, diese Ausdrücke selbst hier folgen zu lassen.

Für die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r eines um den Schwerpunkt O rotierenden Körpers bezüglich seiner durch O gehenden Hauptträgheitsachsen muss man, wie bereits gesagt, zweierlei Formeln erhalten, je nachdem der Poinsot'sche Kegel der Polodie um die Achse kleinsten oder grössten Trägheitsmomentes beschrieben ist.

Bleibt man bei der Festsetzung

$$A > B > C$$

der 3 Hauptträgheitsmomente A, B, C stehen, so sind die beiden in Rede stehenden Fälle charakterisiert durch

$$Bh - l^2 > o \qquad\qquad Bh - l^2 < o,$$

wo l die constantane Intensität des anregenden Kräftepaares und $\frac{h}{l}$ die constante Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die (invariable) Kräftepaarachse bezeichnet. $Ah - l^2$ ist stets grösser, $Ch - l^2$ stets kleiner als Null.

Setzt man

$$n \cdot s = u,$$

wo n eine Constante bedeutet, so erhält[1]) man für die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r,

---

1) Jacobi hat (a. a. O.) die 2 Fälle $Bh - l^2 \gtrless o$ unter einen einzigen zusammengefasst, indem er $A > B > C$ annahm, sobald $Bh - l^2 > o$ und $C > B > A$, wenn $Bh - l^2 < o$ war. Diese Annahme involviert die Existenz zweier verschiedener Centralellipsoide; will man bei einem und demselben Centralellipsoid bleiben, also etwa bei der Festsetzung $A > B > C$, so muss in den Jacobi'schen Formeln A mit C, p mit r vertauscht werden.

I.

wenn $Bh-l^2>o$: | wenn $Bh-l^2<o$:

$$p=\sqrt{\frac{l^2-Ch}{A(A-C)}}\,.\cos\operatorname{am}u \qquad p=\sqrt{\frac{l^2-Ch}{A(A-C)}}\,.\varDelta\operatorname{am}u$$

$$q=\sqrt{\frac{l^2-Ch}{B(B-C)}}\,.\sin\operatorname{am}u \qquad q=\sqrt{\frac{Ah-l^2}{B(A-B)}}\,.\sin\operatorname{am}u$$

$$r=\sqrt{\frac{Ah-l^2}{C(A-C)}}\,.\varDelta\operatorname{am}u \qquad r=\sqrt{\frac{Ah-l^2}{C(A-C)}}\,.\cos\operatorname{am}u$$

Für den Modul $\varkappa$ und die constante Grösse n ergibt sich

$$\varkappa=\sqrt{\frac{(A-B)\,(l^2-Ch)}{(B-C)\,(Ah-l^2)}} \qquad \varkappa=\sqrt{\frac{(B-C)\,(Ah-l^2)}{(A-B)\,l^2-Ch)}}$$

$$n=\sqrt{\frac{(B-C)\,(Ah-l^2)}{ABC}} \qquad n=\sqrt{\frac{(A-B)\,(l^2-Ch)}{ABC}}$$

Nehmen wir nunmehr für den elastischen Stab zuerst an, das Moment C des Widerstandes gegen Drillung sei das kleinste und dasjenige A des Widerstandes gegen die Biegung um die X′-Achse des Querschnittes das grösste. Dann sind die für die Krümmungscomponenten p, q, r aufzustellenden Ausdrücke genau die vorstehenden. Will man aus ihnen auch für die Möglichkeiten, dass der Widerstand gegen Drillung der numerisch mittelste oder grösste ist, p, q, r bilden, so vertausche man cyclisch die Widerstände A, B, C einerseits und die Krümmungscomponenten p, q, r andererseits.

Darnach bekommt man für die Biegungscomponenten p, q und die Drillungscomponente r,

wenn $A>B>C$ und

$Bh-l^2>o$: | $Bh-l^2<o$:

die obigen Formeln I.

II.

Wenn $B>C>A$ und

$Ch-l^2>o$:

$$p=\sqrt{\frac{Bh-l^2}{A(B-A)}}\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,u$$

$$q=\sqrt{\frac{l^2-Ah}{B(B-A)}}\,.\cos\mathrm{am}\,u$$

$$r=\sqrt{\frac{l^2-Ah}{C(C-A)}}\,.\sin\mathrm{am}\,u$$

$Ch-l^2<o$:

$$p=\sqrt{\frac{Bh-l^2}{A(B-A)}}\,.\cos\mathrm{am}\,u$$

$$q=\sqrt{\frac{l^2-Ah}{B(B-A)}}\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,u$$

$$r=\sqrt{\frac{Bh-l^2}{C(B-C)}}\,.\sin\mathrm{am}\,u$$

III.

Wenn $C>A>B$ und

$Ah-l^2>o$:

$$p=\sqrt{\frac{l^2-Bh}{A(A-B)}}\,.\sin\mathrm{am}\,u$$

$$q=\sqrt{\frac{Ch-l^2}{B(C-B)}}\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,u$$

$$r=\sqrt{\frac{l^2-Bh}{C(C-B)}}\,.\cos\mathrm{am}\,u$$

$Ah-l^2<o$:

$$p=\sqrt{\frac{Ch-l^2}{A(A-C)}}\,.\sin\mathrm{am}\,u$$

$$q=\sqrt{\frac{Ch-l^2}{B(C-B)}}\,.\cos\mathrm{am}\,u$$

$$r=\sqrt{\frac{l^2-Bh}{C(A-C)}}\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,u$$

In diesen Formeln bedeuten l die für jeden Querschnitt durch das Kräftepaar erzeugte constante Spannungsgrösse, $\frac{h}{l}$ die um diese Spannungsachse wirkend gedachte constante Componente der gesamten Deformation des betreffenden Stabelementes.

Wie erwähnt, kann man aus einem der 3 Hauptfälle I, II, III den folgenden ableiten durch cyclische Vertauschung von A, B, C und von p, q, r; die Bildung des Moduls $\varkappa$ und der

Constanten n ist hienach aus den unter I gegebenen Formeln ohne Mühe zu bewerkstelligen. Aus einem der bei jedem Hauptfalle auftretenden Unterfälle erhält man den zugehörigen, sobald man den grössten mit dem kleinsten der 3 Hauptwiderstände und gleichzeitig die nach den Achsen dieser 2 Widerstände wirkenden Krümmungen vertauscht.

6.

Nachdem wir uns im § 3 über die gebogene elastische Centrallinie des Stabes insoweit informiert haben, dass wir über ihre Gestalt nicht wesentlich im Zweifel sein können, möge es gestattet sein, die Gleichungen derselben vorzuführen. Das Nähere über deren Ableitung wird an einer anderen Stelle mitgeteilt werden.

Gelegentlich der Fixierung des Problems des elastischen Stabes (§ 1) waren für die Coordinaten x, y, z eines Punktes P der gebogenen elastischen Centrallinie bezüglich eines im Raume festgelegten Coordinatensystems XYZ gefunden worden

$$x = \int c\,.\,ds\,, \qquad y = \int c'\,.\,ds\,, \qquad z = \int c''\,.\,ds\,,$$

wo c, c', c'' die Neigungscosinus der Tangente an die Centrallinie in P gegen die festen Achsen X, Y, Z vorstellen. Diese Neigungscosinus sind zunächst in Funktion des Bogens s darzustellen.

Dieselben lassen sich aber zurückführen auf den einzigen Winkel ψ, welchen eine feste Gerade der Coordinatenebene XY bildet mit der Schnittlinie zwischen eben dieser Coordinatenebene und der Ebene X′Y′ des Querschnittes eines Punktes P der elastischen Centrallinie. Dieser Winkel wird sich, je nachdem der Widerstand gegen Drillung des Drahtes unter den 3 Widerständen gegen Deformation der grösste oder mittelste oder kleinste ist, je nachdem also für p, q, r die oben angeführten Formeln I oder II oder III zur Geltung kommen, verschieden darstellen. Da die Gestalt der elastischen Centrallinie nicht wesentlich anders sein wird, ob man unter den 3 Annahmen I, II, III diese oder jene wählt, so genügt es wohl, nur für einen Fall die Bildung der Ausdrücke für die Coordinaten x, y, z zu vollziehen. Wir wählen hiezu den Fall, in welchem der Widerstand gegen Drillung der kleinste ist und gleichzeitig der Kegel zweiter Ordnung, dessen Erzeugenden die für den noch undeformierten Stab verzeichneten Krümmungsachsen parallel sind, um die Hauptachse der Drillung beschrieben erscheint, also den Fall, der charakterisiert ist durch

$$A > B > C, \qquad Bh - l^2 > o.$$

Wählen wir hiefür die invariable Achse des angreifenden Kräftepaares l als die feste Coordinatenachse Z des Raumes, so wird die XY-Coordinatenebene zur invariablen Ebene des Kräftepaars. Der obige Winkel ψ zwischen einer festen Geraden dieser Ebene und der Schnittlinie der letzteren mit der Querschnittsebene X′Y′ ist dann derselbe Winkel wie der Euler'sche Winkel ψ zwischen einer festen Geraden der invariablen Ebene des Kräftepaars, welches einen Körper zur Bewegung um seinen Schwerpunkt anregt, und der Schnittlinie dieser Ebene mit der Ebene X′Y′ der beiden Hauptträgheitsachsen X′, Y′ des Körpers.

Für diesen Winkel fand Jacobi[1]), dass er sich aus einem mit der Zeit s proportionalen und einem damit periodischem Term zusammensetze; genau so verhält es sich mit unserem Winkel ψ. Setzen wir daher

$$\psi = \psi' + n'.u,$$

so wird $n'u$ mit der Grösse $u = n.s$, also mit dem Bogen s der elastischen Centrallinie proportional, und ψ' muss eine

1) a. a. O. p. 157—159.

periodische Funktion der Grösse u d. i. des Bogens s sein. Jacobi findet für die letztere

$$\psi = \frac{1}{2i} \cdot \log \frac{\Theta(u + ia)}{\Theta(u - ia)}$$

Hiebei wurde

$$\sqrt{\frac{C(Ah - l^2)}{A}} = -i \cdot \sin \operatorname{am} ia$$

gesetzt, und die Constante n′ ergab sich als

$$n' = \frac{l}{An} + \frac{\partial}{\partial(ia)} \cdot \log \Theta(ia).$$

Da ψ der Winkel zwischen der Schnittlinie der Querschnittsebene X′Y′ mit der invariablen Ebene XY einerseits und einer festen Geraden, etwa der Y-Achse, andererseits ist, so stellt offenbar ψ' den Winkel zwischen der genannten Schnittlinie und einer neuen Achse (Y) der XY-Ebene dar, welche sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{n'}{n}$ im negativen Sinne in der XY-Ebene zu bewegen scheint.

Man kann nun ebenso gut die Coordinaten des Stabpunktes P auf das feste Coordinatensystem ZXY beziehen als auch auf ein neues System, zusammengesetzt aus der invariablen Achse Z des angreifenden Kräftepaares und 2 beweglichen Achsen (X), (Y) der invariablen Kräftepaarebene. Da für das letztere System die Winkel ψ' periodisch werden, so wird bei einer graphischen Darstellung der gebogenen elastischen Centrallinie thatsächlich am besten verfahren werden, wenn man sich die Lagen der Geraden (X), (Y) für den gewählten Wert des Bogens s d. i. für ein bestimmtes u construiert und bezüglich derselben die Grössen der Coordinaten (x), (y) aufsucht.

Bezeichnet man die Neigungscosinus der Tangente Z' eines Punktes der elastischen Centrallinie gegen diese beweglichen Achsen (X), (Y) mit (c), (c'), so wird gefunden

$$(c) = \frac{H_1(o)}{2 \,.\, H_1(ia) \,.\, \Theta(u)} \cdot \left\{ \Theta(u+ia) + \Theta(u-ia) \right\}$$

$$(c') = \frac{H_1(o)}{2 \,.\, H_1(ia) \,.\, \Theta(u)} \cdot \left\{ \Theta(u+ia) - \Theta(u-ia) \right\}$$

Hieraus ergeben sich sodann die Neigungscosinus c, c' der Tangente Z' gegen die Achsen X, Y des festen Coordinatensystems; denn es ist

$$c = (c) \cdot \cos n'u + (c') \cdot \sin n'u$$
$$c' = -(c) \cdot \sin n'u + (c') \cdot \cos n'u.$$

Der Cosinus des Winkels der Tangente Z' und der festen Achse Z des invariablen Kräftepaars ist für beide Fälle

$$c'' = \frac{Cr}{l} = \frac{H(ia) \,.\, \Theta_1(u)}{i \,.\, H_1(ia) \,.\, \Theta(u)}$$

Führt man statt der Θ-Funktionen die unendlichen Reihen in die Formeln für (c), (c') ein, wie sie Jacobi in seiner Arbeit „sur la rotation" aufgeführt hat, und integriert (c) . ds, (c') . ds, c''. ds, so erhält man zunächst für das System Z, (X), (Y), dessen Achsen (X) und (Y) beweglich sind, die Coordinaten folgendermassen ausgedrückt:

$$z \,.\, D = v + 4 \,.\, \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu \,.\, \sin \mu v}{\mu(1+q^{2\mu})}$$

$$(x) \,.\, D = \frac{2q^{b/2}}{1-q^b} \cdot v - 2(q^{-b/2} - q^{b/2}) \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu(1+q^{2\mu}) \,.\, \sin \mu v}{\mu(1-q^{2\mu-b})(1-q^{2\mu+b})}$$

$$(y) \,.\, D = 4(q^{-b/2} + q^{b/2}) \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu(1-q^{2\mu}) \,.\, \sin^2 \frac{\mu v}{2}}{\mu(1-q^{2\mu-b})(1-q^{2\mu+b})}$$

In diesen Formeln bedeuten v eine mit der Bogenlänge s der elastischen Centrallinie proportionale Variable,

$$v = \frac{\pi}{K} \cdot u = \frac{n\pi}{K} \cdot s,$$

die übrigen Grössen Constante, nemlich

$$b = \frac{a}{K'}; \qquad q = l^{-\pi \cdot \frac{K'}{K}};$$

$$D^2 = \frac{4 l^2 (A-C)(B-C)}{(A-B) C^2}$$

Die Coordinaten eines Punktes der elastischen Centrallinie bezüglich des festen Coordinatensystems Z X Y des Raumes finden sich, wenn die frühere Grösse

$$n' = m \cdot \frac{\pi}{K}$$

gesetzt wird, ausgedrückt, wie folgt.

z ist dasselbe wie vorher.

$$x \cdot D = \frac{2q^{b/2}}{m(1-q^b)} \cdot \sin mv + 2q^{b/2} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu : \sin(m-\mu)v}{(m-\mu)(1-q^{2\mu+b})}$$

$$- 2q^{-b/2} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu \cdot \sin(m+\mu)v}{(m+\mu)(1-q^{2\mu-b})}$$

$$y \cdot D = \frac{4q^{b/2}}{m(1-q^{b/2})} \sin^2 \frac{mv}{2} + 4q^{b/2} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu \cdot \sin^2 \frac{m-\mu}{2} v}{(m-\mu)(1-q^{2\mu+b})}$$

$$- 4q^{-b/2} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu \sin^2 \frac{m+\mu}{2} v}{(m+\mu)(1-q^{2\mu-b})}$$

Hiebei wurde der Coordinatenanfangspunkt der beiden Systeme Z(X)(Y) und ZXY im freien Endquerschnitt des Stabes angenommen, so dass für $s = o$ d. i. $u = v = o$ jede Coordinate zu Null wird.

7.

Es erübrigt noch, einige specielle Fälle hervorzuheben. Solche können herbeigeführt werden durch specielle Lagen der Achse des den freien Endquerschnitt angreifenden Kräftepaares oder durch specielle Wahl der Constanten, welche die Widerstände des Stabes gegen Biegung und Drillung darstellen.

Wir knüpfen wieder an das Problem der Rotation eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt an.

1. Lässt man das auf den starren Körper einwirkende Kräftepaar l um eine der 3 Hauptträgheitsachsen des Körpers wirken, so vollzieht sich die Drehung stets um diese Achse und zwar mit constanter Geschwindigkeit. Der bewegliche Kegel der Polodie sowohl als der feste der Herpelodie sind in diese Achse — die permanente Rotationsachse — übergegangen, die Curven der Polodie und Herpolodie in Punkte.

Dreht das auf den freien Endquerschnitt des Stabes wirkende Kräftepaar l um eine der 2 Hauptbiegungsachsen oder um die Torsionsachse (d. i. die gerade elastische Centrallinie) des Stabes, so ist die Krümmung um diese Achse constant. Im ersteren Falle wird die elastische Centrallinie in einen Kreis gebogen, ohne dass der Stab gedrillt wird, im zweiten Falle bleibt diese Linie gerade, dagegen werden die einzelnen Querschnitte gleichmässig um dieselbe gedreht — der Stab erscheint nur gedrillt. Die biegsame windschiefe Fläche der instantanen Krümmungsachsen sowie die feste Fläche derselben sind für den ersteren Fall in Kreiscylinder übergegangen, die Curve der Endpunkte der Krümmungsachsen, die Polodie und Herpolodie, in Kreise; für den zweiten Fall dagegen reducieren sich diese Flächen auf die Stabachse selbst, ebenso die beiden Curven.

Hiebei sind nun zwei wesentlich verschiedene Annahmen zu machen.

Dreht nemlich das den starren Körper afficierende Paar l um diejenige Hauptträgheitsachse, welcher das *grösste* oder *kleinste* Moment zukommt, so ist die Bewegung des Körpers um diese Achse *stabil*: ein der Achse erteilter kleiner Anstoss lässt diese nur einen kleinen Kreiskegel um ihre Ruhelage beschreiben. Ist hingegen das Trägheitsmoment um die Hauptachse, um welche l wirkt, das *mittelste* unter den 3 Trägheitsmomenten, so ist die Bewegung des Körpers um dieselbe ein *labile*: es bedarf nur eines kleinen Anstosses, um die Drehungsachse einen Kegel von endlichen Dimensionen, den der Herpolodie, im Raume beschreiben zu lassen. Im Körper scheint dieselbe bekanntlich den Kegel der Polodie zu durchlaufen. Derselbe ist hier in 2 Ebenen übergegangen, welche sich in der kritischen Hauptachse mittleren Trägheitsmomentes durchsetzen; je nachdem man den kleinen Anstoss im einen oder andern Sinne erfolgen lässt, erscheint die eine oder die andere Ebene als die auf dem Kegel der Herpolodie abrollende. Die Polodie ist in 2 Ellipsen übergegangen, die ebene Curve der Herpolodie in eine Spirale, der Kegel der Herpolodie ist also spiralförmig gewunden.

Dreht das auf den Querschnitt des Stabes einwirkende Kräftepaar l um diejenige der 3 Hauptachsen der Biegung und Drillung, welcher das numerisch *grösste* oder *kleinste* Widerstandsmoment zukommt, so ist das Gleichgewicht der gebogenen elastischen Centrallinie ein *stabiles*. Bringt man dieselbe ein wenig aus ihrer Ruhelage, welche als Kreis oder gerade Linie gefunden wurde, so kehrt dieselbe stets wieder dahin zurück. Hat dagegen das drehende Paar l um diejenige Hauptachse gewirkt, welche unter den 3 Hauptwiderstandsmomenten das mittlere aufweist, so ist das Gleichgewicht der gebogenen elastischen Centrallinie nur labil:

sei es, dass die Centrallinie in einen Kreis gebogen wurde, sei es, dass sie gerade geblieben war — es bedarf nur einer geringen Berührung, um dieselbe in eine ganz neue Curve, von logarithmischem Charakter, schnellen zu lassen, in welcher Biegung und Drillung neben einander vorkommen. Die windschiefen Flächen, durch deren Aufbiegen wir die Deformation des Stabes hervorgebracht erklären, besitzen, wie auch die auf ihnen gelegenen Curven der Polodie und Herpolodie, gleichfalls logarithmischen Charakter.

2. Unter den besonderen Annahmen, welche in der Wahl der Constanten des rotierenden Körpers, d. i. in der Wahl der 3 Hauptträgheitsmomente eine besondere Rolle spielen, sind die bemerkenswertesten die der Gleichheit zweier oder aller drei Trägheitsmomente.

Sind zwei Trägheitsmomente einander gleich und wirkt das den Körper drehende Kräftepaar l nicht um eine der vorhin betrachteten speciellen Achsen, so geht die Rotation wieder mit gleichförmiger Geschwindigkeit vor sich. Der rollende Kegel sowohl als der feste sind Kreiskegel geworden, die auf ihnen gelegenen Curven Kreise.

Da die 3 Hauptwiderstände des Stabes nicht Grössen gleicher Art sind, so ist zu unterscheiden, ob bei der numerischen Gleichheit zweier derselben diese beiden die Widerstände gegen Biegung darstellen, oder ob einer der Biegungswiderstände und der Torsionswiderstand gleich geworden sind.

Sind die beiden Biegungswiderstände einander gleich, und dreht das den freien Endquerschnitt beeinflussende Paar 1 nicht um eine der 3 Hauptachsen, so wird die gerade elastische Centrallinie des Stabes in eine Schraubenlinie um die Kräftepaarachse gebogen und der Stab ganz gleichmässig gedrillt. Die auf der biegsamen windschiefen Fläche gelegene Polodie ist ebenfalls in eine Schraubenlinie, beschrieben um die gerade elastische Centrallinie, übergegangen, die biegsame Fläche selbst also in eine gewöhnliche Schraubenfläche. Die Curve der Herpolodie auf der festen windschiefen Fläche ist eine secundäre Spirale, die Fläche selbst eine secundäre Schraubenfläche geworden.

Ist dagegen ein Biegungswiderstand und der Torsionswiderstand einander numerisch gleich, so wird die gerade elastische Centrallinie des Stabes in eine transcendente Curve von trigonometrischem Charakter gebogen. Die Drillung ist nicht constant, wohl aber die Grösse der Biegung um die andere Biegungsachse. Die windschiefen Flächen und dieauf ihnen gelegenen Curven besitzen gleichfalls trigonometrischen Charakter.

3. Sind für den rotierenden Körper die 3 Hauptträgheitsmomente einander gleich, so ist die Achse des einwirkenden Kräftepaares 1, welche Richtung sie auch besitzen möge, immer permanente Drehungsachse und die Drehung vollzieht sich um dieselbe mit constant bleibender Geschwindigkeit.

Werden die 3 Hauptwiderstandsmomente des Drahtes gegen Deformation einander gleich, so wird unter dem Einfluss eines Kräftepaares 1, dessen Achse eine beliebige Neigung gegen den Endquerschnitt besitzt, die gerade elastische Centrallinie wieder in eine Schraubenlinie um die Kräftepaarachse gebogen und alle Verhältnisse bleiben im

Wesentlichen so, wie sie bei der Gleichheit der zwei Biegungswiderstände besprochen wurden.

Die spezielle Annahme der Gleichheit der 3 Widerstandsmomente des Stabes fördert also gegenüber jener der 2 Widerstände gegen Biegung keine neuen Erscheinungen zu Tage — zum Unterschiede von dem Rotationsproblem, welches beim Uebergang von 2 gleichen Trägheitsmomenten auf 3 erheblich vereinfacht wird.