
Sitzungsberichte
der
mathematisch-physikalischen Classe
der
k. b. Akademie der Wissenschaften
zu **München.**

1883. Heft I.



Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

1883.

~~~~~  
In Commission bei G. Franz.

Herr von Seidel theilt eine von Herrn Prof. Ludwig Matthiessen in Rostock übersandte Abhandlung mit:

„Ueber die Form der unendlich dünnen  
astigmatischen Strahlenbündel und über  
die Kummer'schen Modelle.“

(Mit einer Tafel.)

Im Juli 1860 legte Professor Kummer der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Berlin Modelle von drei Arten unendlich dünner Strahlenbündel vor, deren Ausführung sich auf die Ergebnisse einer im 57. Bande des Borchardt'schen Journals für reine und angewandte Mathematik (1859) von ihm publicirten Abhandlung stützt. An die Vorlage seiner Modelle knüpfte Kummer eine Mittheilung, welche in den Monatsberichten der Berl. Akad. für 1860 S. 469—474 veröffentlicht ist. Das Modell der Strahlenbündel erster Art soll die Brennfläche eines unendlich dünnen Strahlenbündels in einfach brechenden Medien darstellen, wenn ein homocentrisches Strahlenbündel beliebig viele Brechungen erlitten hat. Nach einem bekannten Theorem von Malus sind die Strahlen nach der letzten Brechung noch immer normal auf den Wellenflächen und es würde mithin das Modell erster Art überhaupt die Umhüllungsfläche sämmtlicher Normalen eines unendlich kleinen Elements einer krummen Oberfläche darstellen. Diese Strahlen erster Art, von C. Neumann reguläre Strahlen genannt, sind im Modelle und in der Mittheilung von Kummer derartig characterisirt, dass sie von

geradlinigen Flächen (Brennflächen) umhüllt sind, deren erzeugende Gerade stets durch zwei auf der Axe des Strahlenbündels senkrecht stehende und um  $90^\circ$  gedrehte gerade Linien (Brennlinien) und zugleich durch eine die Axe concentrisch umgebende unendlich kleine geschlossene Curve hindurchgehen. In dem Modelle ist diese geschlossene Curve als Kreis gewählt, dessen Ebene auf dem Hauptstrahle senkrecht steht und dessen Mittelpunkt in dem Hauptstrahle liegt. Die durch die beiden Brennlinien und den Hauptstrahl gelegten Ebenen werden Focalebenen genannt und mit ihnen coincidiren die beiden Hauptnormalschnitte des durch einen mit der kleinen geschlossenen Curve coincidirenden Dupin'schen Kegelschnitt von der Wellenfläche abgeschnittenen paraboloidischen Flächenelemente. Dieselbe Charakteristik eines sogenannten astigmatischen Strahlenbündels ist vor wie nach den Kummer'schen Publicationen aufgestellt. Zuerst von Sturm in seinem *Mémoire sur l'optique* in Liouville's Journ. de math. III p. 357 (1838) und in einer gleich betitelten Abhandlung in den *Compt. rend.* T. XX. p. 554, 761 et 1238 (1845), übersetzt in *Pogg. Ann.* LXV. S. 116, 374 (1845); von Möbius in den Sitzungsberichten der Sächs. Akad. der Wiss. math.-phys. Classe XIV (1862); von Kummer in seiner *Allgemeinen Theorie der geradlinigen Strahlensysteme* in Borchardt's Journal LVII S. 189 (1860); endlich auch von C. Neumann in einer Untersuchung über die Brechung eines unendlich dünnen regulären Strahlenbündels, in den Sitzungsberichten der Sächs. Akad. der Wiss. math.-phys. Classe (1. März 1880).

Diese Anschauungen sind dann von Anfang her unbeanstandet übergegangen in alle neueren hervorragenden Werke über physiologische Optik von Helmholtz, Fick, Donders, Hermann, Lippich u. A. Die These, dass die beiden Brennlinien eines jeden Strahlenbündels auf dem Hauptstrahle senk-

recht stehen sollen, wird von Sturm, dem Begründer der Theorie des Astigmatismus, gestützt auf die Voraussetzung, dass man in der Gleichung der Normalen die unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung vernachlässigen und also das durch einen Dupin'schen Kegelschnitt abgetrennte kleine Segment der Wellenfläche als den Scheitel eines elliptischen Paraboloides (osculirendes Paraboloid) betrachten dürfe. Dass diese Voraussetzung eine ungerechtfertigte und irrthümliche sei, ergeben schon die einfachsten Betrachtungen des Verlaufes eines durch eine einzige sphärische Fläche bei schiefer Incidenz gebrochenen unendlich dünnen homocentrischen Strahlenbündels, sowie überhaupt die elementar-geometrische Untersuchung über die Normalfläche des Elementes irgend einer anderen krummen Oberfläche, wie im Folgenden gezeigt werden wird.

Kummer spricht sich in seiner Mittheilung während der Sitzung am 30. Juli 1860 S. 469 folgendermassen aus: „Die durch diese Modelle dargestellten drei Arten von Strahlenbündeln mit ihren Gränzfällen, nämlich dem konischen und cylindrischen, sind die einzig mathematisch möglichen.“ Und weiter am Schlusse S. 474 heisst es: „Ein Strahlenbündel der ersten Art mit beliebig gegebenen Abständen der beiden gegeneinander rechtwinklig liegenden geradlinigen Querschnitte kann man auf die einfachste Weise durch eine convexe sphärische Linse erzeugen, in die man das von einem leuchtenden Punkte durch eine enge Oeffnung hindurchgehende Licht hineinsendet. Richtet man die Linse so, dass ihre Axe in der Richtung der auffallenden Strahlen selbst liegt, so erhält man nur das konische Strahlenbündel, in welchem die beiden geradlinigen Querschnitte zu einem einzigen Punkte, dem Brennpunkte vereinigt sind. Dreht man aber die Linse so, dass ihre Axe mit der Richtung des auffallenden Lichtes einen spitzen Winkel bildet, so treten die beiden geradlinigen Querschnitte auseinander und ihr Ab-

stand wird immer grösser, je kleiner (?)<sup>1)</sup> dieser Winkel wird; zugleich nehmen auch die beiden geradlinigen Querschnitte verhältnissmässig an Länge zu.“

Gerade in diesem einfachen Falle aber ist bei allen denkbar möglichen schiefen Incidenzen die Form des von Kummer definirten astigmatischen Strahlenbündels factisch ganz unmöglich. Zwar ist der Winkel, welchen die I. Brennnlinie mit dem Haupt- oder Leitstrahle bildet, ein Rechter; der Winkel jedoch, welchen die II. Brennnlinie mit ihm bildet, ist immer spitz; er ist um so kleiner, je kleiner der Incidenzwinkel ist und geht mit diesem zugleich in Null über. Ja durch wiederholte Brechungen in einem nicht centrirtten Systeme von sphärischen Flächen, deren Krümmungscentra im Raume vertheilt sind, kann auch der erste Winkel ein spitzer werden. Ganz ähnlich verhält es sich mit den Normalflächen aller krummen Oberflächen mit Ausnahme der Kugel und des Kreiscylinders.

Erwähnenswerth ist die Mittheilung eines Schreibens von Professor von Seidel durch Kummer in den Berl. Monatsberichten vom 18. December 1862 S. 695. Seidel hatte 1857 der Münchener Akademie ein Modell der durch die Brechung eines unendlich dünnen Strahlenbündels in sphärischen Flächen erzeugten Brennfläche vorgelegt und hatte während einer Zusammenkunft mit Kummer im Jahre 1861 bei der Vergleichung seines eigenen Modelles mit dem Kummer'schen der Krümmungsmittelpunctsfläche des Ellipsoides, also eines Strahlenbündels erster Art aus der Analogie die Vermuthung gezogen, es möchte zwischen der Krümmungsmittelpunctsfläche des Paraboloides und der Brennfläche eine nähere Beziehung stattfinden. Prof. von Seidel hat sich dann nach dem Inhalte des Briefes bemüht, die unendlich kleine Wellenfläche des gebrochenen Lichtstrahles auf das Flächen-

---

1) Soll wohl heissen: „grösser“.

element eines Paraboloides zu reduciren, das bis auf Glieder 6. Ordnung mit jener coincidirt.

Der Zweck der vorliegenden Abhandlung ist nun nachzuweisen, dass die Sturm'sche Theorie des Astigmatismus der Allgemeinheit entbehrt und nur für einige wenige specielle Fälle Gültigkeit besitzt, und dass sich mit Rücksicht auf den Fall ein- oder mehrmaliger Brechung eines homocentrischen Strahlenbündels immer eine Fläche finden lässt, von der ein bestimmbares unendlich kleines, durch einen Dupin'schen Kegelschnitt gebildetes Segment sich der Wellenfläche genauer anschmiegt, als das sogenannte osculirende Paraboloid.

Professor C. Neumann sagt in seiner oben citirten Abhandlung: „Beschränken wir uns auf ein unendlich dünnes reguläres Strahlenbündel, und bezeichnen wir den mittleren Strahl desselben als Hauptstrahl, so werden alle Strahlen dieses unendlich dünnen Bündels sich anlehnen an zwei bestimmte gerade Linien, welche den Hauptstrahl schneiden, gegen denselben senkrecht stehen und auch gegeneinander senkrecht stehen.“ Neumann beruft sich dabei auf die bekannten Untersuchungen von Kummer in Borchardt's Journ. Bd. 57. Die Schlussworte sind nicht misszuverstehen und dieselbe Definition findet sich überall gleichlautend.

Wenn sie nun aber schon der Vorstellung, welche wir von der Evolute oder kaustischen Fläche einer krummen Fläche haben, augenscheinlich widerspricht und es auch a priori möglich erscheint, eine unendlich dünne Brennfläche zu construiren, deren erzeugende Gerade stets durch zwei feste gegen die Axe der Brennfläche um einen spitzen Winkel geneigte und um  $90^\circ$  oder einen andern Winkel gedrehte gerade Linien (Brennlinien) und zugleich durch eine die Axe umgebende unendlich kleine geschlossene Curve hindurchgeht, und ebenso nothwendig, dass dem ganzen von der Brennfläche eingeschlossenen Strahlenbündel ein System von Orthogonalflächen angehöre, so ist dieses ganz und gar der Fall,

welcher eintritt, wenn ein homocentrisches Strahlenbündel bei schiefer Incidenz durch eine sphärische Fläche gebrochen wird. Die eine der beiden Brennnlinien durchschneidet den Hauptstrahl unter einem bestimmaren spitzen Winkel und coincidirt mit der Centrale des leuchtenden Punktes. Diese II. Brennnlinie nämlich ist mit der sphärischen Längenabweichung geradezu identisch.

Wie viele Andere, welche sich mit der Theorie des Astigmatismus im menschlichen Auge beschäftigt haben, so kommt auch Hermann in der Einleitung zu seiner Abhandlung: Ueber Brechung bei schiefer Incidenz (Pflüger's Arch. f. Physiologie XVIII S. 443 [1878]), geleitet durch die Auctorität Sturm's nicht über diese Schwierigkeit hinweg. Er sagt S. 445: „Für einen unendlich kleinen Theil der Wellenfläche kann immer das osculirende Paraboloid gesetzt werden.“ Und S. 445—447 wird mehrfach bei der Betrachtung eines unendlich dünnen Strahlenbündels von der unendlich kleinen geraden I. Brennnlinie, die zur Ebene des Papiers senkrecht stehe und ausdrücklich von der II. Brennnlinie, die sich auf einen Punct (!) der optischen Axe, der sogenannten „Directionslinie“ reducir, gesprochen. Wenn die II. Brennnlinie aber zu Stande komme, so solle sie nach beliebig vielen Brechungen in einem centrirten Systeme die letzte Directionslinie schneiden.

Wir wollen nun den Beweis führen, dass der letzte Satz unrichtig ist für den Fall wo der leuchtende Punct in der Centralen liegt; dass weder das osculirende Paraboloid der Wellenfläche über die wahre Form der Brennnfläche genauen Aufschluss gibt, noch auch die II. Brennnlinie in dem vorliegenden Specialfalle sich auf einen Punct der optischen Axe reducir, sondern wirklich vorhanden ist, nämlich als ein unendlich kleines Stück I. Ordnung der Axe selbst. Wir discutiren zunächst diesen letzten Punct. (Vergl. Reusch, Pogg. Ann. 130.)

Wir gedenken uns durch den leuchtenden Punkt P (Fig. 1), den Incidenzpunkt O des Hauptstrahles und das Centrum C der brechenden sphärischen Fläche eine Ebene gelegt, welche einen unendlich kleinen Bogen aus der Basis des einfallenden Strahlenkegels ausschneidet. Ein dem Incidenzpunkte O unendlich naher Punkt dieses Bogens sei M und OM gleich  $dS$ . Die durch O und M in die brechende Fläche eintretenden Strahlen werden so gebrochen, dass sie sich zunächst in der kaustischen Curve des Kreises bei  $B_1$  schneiden und dann folgeweise durch zwei einander unendlich nahe Punkte  $B_2, B_2$  der optischen Axe oder Centrale PC gehen. Der Abstand  $B_2, B_2$  sei  $da$ ; eine einfache geometrische Betrachtung ergibt, dass  $\frac{da}{dS}$  ein von Null und  $\infty$  verschiedenes Verhältniss haben, wenn der Incidenzwinkel von  $0^\circ$  und  $90^\circ$  verschieden ist. Alle zwischen O und M in die Fläche einfallende Strahlen gehen durch denselben Punkt  $B_1$  der kaustischen Curve und zugleich durch das Axendifferenzial  $B_2, B_2 = da$ ; keiner dem letzteren vorbei.

Wenn wir nun den Strahlenfächer POM fest mit der Axe verbunden, um diese gedreht denken, so beschreibt  $dS$  auf der brechenden Fläche einen unendlich schmalen concentrischen Ring und der Strahlenfächer einen hohlen Kreiskegel. Der gebrochene Strahlenfächer beschreibt zwei hohle Kreiskegel, die sich in dem von dem I. Brennpunkte  $B_1$  beschriebenen Kreise gegeneinander abgrenzen. Wenn wir dann durch diesen aus drei Theilen zusammengesetzten Rotationskörper zwei unendlich nahe gelegene Axenschnitte legen, so erhalten wir eine deutliche Einsicht in die Brennfläche eines in die brechende Fläche eintretenden unendlich dünnen homocentrischen Strahlenbündels. Es wird nämlich aus dem vom ersten Brennpunkte  $B_1$  beschriebenen Kreise ein unendlich kleines gegen den Hauptstrahl und den Meridionschnitt senkrecht gerichtetes Bogenelement  $B_2, B_2 = da$ ,



(I. Brennlinie) und aus der Axe ein in dem Meridionalschnitt gelegenes, jedoch nicht senkrecht gegen den Hauptstrahl  $OB_2$  gerichtetes Linienelement  $B_2 B_2 = da$  (II. Brennlinie) ausgeschnitten. Da sämtliche Strahlen des Strahlenbündels  $POMN_1 O_1$  dieses Linienelement passiren, so ist dies offenbar die II. Leitlinie der Brennfläche, d. h. die II. Brennlinie; eine III. Brennlinie kann es in dieser geradlinigen Fläche nicht geben. Das ganze Strahlenbündel  $POB_2$  besteht demnach aus dreien der Form nach von einander verschiedenen Theilen, dem einfallenden Bündel  $PO$  von konischer Gestalt, dem gebrochenen  $OB_1$  von keilförmiger, und dem zwischen den beiden Brennlinien liegenden, sogenannten Brennraume von tetraedrischer Gestalt. Diese Theile bewahren im Wesentlichen denselben Character, wenn man die im Wellenflächenelemente  $MN$  gelegene Basis des gebrochenen Bündels als kreisförmig wählt.

Es ist nun weiter nach den Untersuchungen von Prof. Zech (*Zeitschr. f. Math. u. Phys.* XVII. S. 373 [1872]) ein unendlich dünnes Strahlenbündel schon bestimmt durch drei Strahlen. Um aber die I. Brennlinie  $B_1 B_1$  geometrisch genau zu definiren, muss Hermann mindestens vier unendlich nahe gelegene Strahlen zu Hülfe nehmen, von denen sich je zwei in den beiden Endpunkten derselben schneiden. Hierzu eignen sich offenbar die vier durch die Ecken des unendlich kleinen Rechtecks  $OMM_1 O_1$  gehenden Strahlen. Damit ist aber zugleich die II. Brennlinie  $B_2 B_2$  geometrisch definirt; sie reducirt sich nicht auf einen Punct, sondern hat eine Länge  $da$ , welche der Grösse nach von derselben Ordnung ist, wie  $OM = dS$  oder  $MN = ds$ , oder  $B_1 B_1 = da_1$  wie sich leicht erweisen lässt. Die geometrischen Verhältnisse ergeben sich aus Fig. 1.

Es sei  $OB_1 = \varrho$  der Krümmungsradius des ersten Hauptnormalschnittes  $MN$  der Wellenfläche,  $OB_2 = r$  der Krümmungsradius des zweiten Hauptnormalschnittes und  $B_2 R$

senkrecht gegen den Hauptstrahl  $OB_2$ ; dann ist  $RB_2 = dr$  das Differenzial des zweiten Hauptkrümmungsradius. Bezeichnen wir den Winkel  $OB_1M$  mit  $\alpha$ , so ist  $\alpha = \frac{ds}{\varrho}$  und man erhält für die Bestimmung des Winkels  $RB_2B_2 = \beta$  die Relation

$$\tan \beta = \left( \frac{r}{\varrho} - 1 \right) \frac{ds}{dr}.$$

So lange nun  $\frac{dr}{ds}$  nicht Null wird, muss  $\beta$  offenbar ein spitzer von  $90^\circ$  verschiedener Winkel sein. Bezeichnen wir noch den Brechungswinkel  $OMN$  mit  $\psi$  und das Bogenelement des II. Hauptnormalschnittes der Wellenfläche in  $N$  mit  $d\sigma$ , so ist

$$da = \frac{(r - \varrho) \cos \psi}{\varrho \sin \beta} dS, \quad da_1 = \frac{\varrho \sin \beta}{r} \cdot \frac{d\sigma}{ds} da = \frac{r - \varrho}{r} d\sigma.$$

Es ist nun unschwer nachzuweisen, dass es unendlich viele Brennflächen gibt, für welche  $\beta$  nicht ein Rechter ist.

Es sei  $N_1B_2$  (Fig. 1), also ein Theil des gebrochenen Strahles  $OB_2$ , die Normale eines elliptischen Quadranten  $AN_1D$  und  $B_1$  ein Punkt seiner Evolute. Denken wir uns diesen Quadranten um seine kürzeste Halbaxe  $AF$ , also um die Centrale der brechenden Fläche um einen unendlich kleinen Winkel gedreht, so beschreibt das Bogenelement  $M_1N_1$  ein unendlich kleines Element einer der äquidistanten Wellenflächen des Strahles und  $da_1$  wie  $da$  bleiben wie vorhin die beiden Leitlinien dieses Flächenelementes. Wenn wir nun im Stande sind, die Halbaxen  $DF = b$ ,  $AF = a$  des Rotationsellipsoides aus den gegebenen Verhältnissen zu bestimmen, so ist zugleich diejenige Fläche gefunden, welche sich der äquidistanten Wellenfläche genauer anschmiegt, als das osculirende Paraboloid. Das osculirende Paraboloid, welches in  $N_1$  auf einem Dupin'schen Kegelschnitte (im vor-

liegenden Specialfalle Ellipse) steht, ist aber ein elliptisches Paraboloid, also kein Rotationskörper, wie es in unserm Falle offenbar die Wellenflächen sind, schmiegt sich also nicht so genau an und seine Leitlinien befolgen den Sturm'schen Satz, welcher aber für unseren Fall keine Gültigkeit hat, da  $\beta$  ein spitzer Winkel ist.

Wir sind nun aber im Stande, das gedachte Rotationsellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

genau zu bestimmen. Die Gleichung der brechenden Kugel-  
fläche sei

$$\xi^2 + y^2 + \zeta^2 = R^2.$$

Für eine gegebene Objectweite PS und Amplitude  $\mathfrak{P}$  des einfallenden Strahles PO sind  $r$ ,  $\varrho$  und  $\beta$  bestimmbare, bekannte Grössen. Betrachten wir vorläufig nur die Wellenlinie und Brennfläche des Axenschnittes, so sind  $z$  und  $\zeta$  gleich Null und es existiren folgende realisirbare Gleichungen, worin  $t$  den gegenseitigen Abstand der beiden Wellenlinien MN und  $M_2 N_2$  bedeutet:

$$\text{I. } \varrho - t = f(y, a, b),$$

$$\text{II. } r - t = \varphi(y, a, b) = y : \sin \beta,$$

$$\text{III. } r - \varrho = \psi(y, a, b).$$

Weil nun in unserem Falle  $\varrho$  und  $t$  für ein variables  $r$  innerhalb der unendlich kleinen Wellenfläche constant bleiben, so ist, wenn  $M_2 N_2 = ds_1$  gesetzt wird

$$\text{IV. } \cot \beta = \frac{\varrho}{r - \varrho} \cdot \frac{dr}{ds} = \frac{\varrho - t}{r - \varrho} \cdot \frac{dr}{ds_1},$$

also auch

$$\text{V. } \cot \beta = F(y, a, b).$$

Aus den Gleichungen II, III und V lassen sich  $y$ ,  $a$  und  $b$  bestimmen;  $x$  oder VF findet man aus  $y$ ,  $t$  aus II und UF

$= x + t \cos \beta$ . Hiedurch sind Grösse und Lage des osculirenden Rotationsellipsoides völlig bestimmt.

Wenn die I. Leitlinie  $B_1 B_1 = da_1$  um einen spitzen Winkel  $\beta$ , gegen den Hauptstrahl geneigt ist, so lässt sich derselbe auf ähnliche Art bestimmen. Es ist nämlich

$$\text{VI. } \cot \beta_1 = \frac{r}{r - \varrho} \cdot \frac{d\varrho}{d\sigma} = \frac{r - t}{r - \varrho} \cdot \frac{d\varrho}{d\sigma_1},$$

wo  $d\sigma_1$  ein unendlich kleines Bogenelement des II. Hauptnormalschnittes der Wellenfläche in  $N_2$  bezeichnet. Es lässt sich aber für den vorliegenden Specialfall leicht nachweisen,

dass  $\frac{d\varrho}{d\sigma_1} = 0$ , also  $\beta_1 = 90^\circ$  ist.

Bei welcher Art von Brechung  $\beta$  und  $\beta_1$  spitz sein müssen, bedarf keiner schwierigen Untersuchung. Dass dieser Fall geometrisch realisirbar ist, lässt sich z. B. an dem elliptischen Paraboloiden

$$x = a \left( \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)$$

beweisen. Es sei CAO (Fig. 2) einer der beiden Hauptaxenschnitte z. B. die  $xy$  Ebene,  $OB_1$  der Hauptstrahl auf der Evolute  $CB_1$ ,  $ON = ds$  ein Bogenelement des I. Hauptnormalschnittes,  $OT = d\sigma$  ein Bogenelement auf dem II. Normalschnitte. Ferner sei wiederum  $B_2 B_2 = da$  die Brennpunktlinie in dem Hauptaxenschnitte, also die II. Brennpunktlinie,  $B_1 B_1 = da_1$  die I. Brennpunktlinie, der Krümmungshalbmesser  $OB_1$  des I. Hauptnormalschnittes gleich  $\varrho$ , der des II. Normalschnittes  $OB_2$  gleich  $r$ , der auf  $NB_1$  gelegene Abschnitt  $B_2 R = dr$  sein Differenzial und endlich  $\beta$  der Winkel, welchen  $B_2 B_2$  mit dem Hauptstrahle  $OB_1$  bildet. Alsdann gelten folgende Gleichungen für einen Punkt  $(x, y, 0)$ :

$$\text{I. } \varrho = \frac{b^2 + 4ax}{2ab} \sqrt{b^2 + 4ax}; \quad \text{II. } r = \frac{c^2}{2ab} \sqrt{b^2 + 4ax}.$$

Es ist nun

$$\frac{ds}{dr} = \frac{b(b^2 + 4ax)}{2c^2\sqrt{ax}} = \frac{\varrho b}{2r\sqrt{ax}}$$

und

$$\text{III. } \tan \beta = \left(\frac{r}{\varrho} - 1\right) \frac{ds}{dr} = \frac{c^2 - b^2 - 4ax}{2c^2} \cdot \frac{b}{\sqrt{ax}}.$$

Mit der gegen früher verwechselten Lage der beiden Brennpunkte setzen wir voraus, es sei  $r < \varrho$ , also  $c < b$ . Alsdann findet ein absolutes Minimum von  $\tan \beta$  statt für  $4ax = b^2 - c^2$ . Ist demnach  $c$  von  $b$  verschieden, so ist für

$$\begin{array}{ll} x = 0 \text{ (Scheitelpunkt),} & \beta = 90^\circ, \\ x = \text{endlich,} & \beta = \text{spitz,} \\ x = \infty, & \beta = 90^\circ. \end{array}$$

Das Kummer'sche Modell I. Art gilt also nur für  $x = 0$  und  $x = \infty$ . Ist  $c = b$  (Rotationsparaboloid), dann ist für

$$\begin{array}{ll} x = 0, & \beta = 0^\circ, \\ x = \text{endlich,} & \beta = \text{spitz,} \\ x = \infty, & \beta = 90^\circ. \end{array}$$

Das Kummer'sche Modell ist also auf diesen Körper gar nicht anwendbar. Für den Winkel  $\beta$ , welchen die I. Brennpunktlinie mit dem Hauptstrahl bildet, ist, wie früher

$$\tan \beta_1 = \left(1 - \frac{\varrho}{r}\right) \frac{d\sigma}{d\varrho}.$$

Da aber  $d\sigma = dz$  und  $\frac{d\varrho}{dz} = 0$  ist für  $z = 0$ , so ist  $\beta = 90^\circ$  und die I. Brennpunktlinie steht für einen Punkt  $(x, y, 0)$  stets senkrecht zum Hauptstrahl. Wenn man aber ein unendlich kleines Oberflächenelement des elliptischen Paraboloides betrachtet, welches nicht in einem der beiden Hauptmeridiane

$(x, y, 0)$  und  $(x, 0, z)$  liegt, so verschwindet weder  $\frac{dr}{ds}$  noch  $\frac{d\varrho}{d\sigma}$  und beide Winkel  $\beta$  und  $\beta_1$  sind spitz. Es würde hieraus folgen, dass das Kummer'sche Modell ausschliesslich nur auf den Scheitel des elliptischen Paraboloides Anwendung finden kann. Dann ist es aber nicht allgemein und nicht die einzige mathematisch mögliche Form eines regulären astigmatischen Strahlenbündels. Was von den Strahlenbündeln I. Art gesagt werden kann, muss natürlich ebenso gelten von den astigmatischen Strahlenbündeln II. und III. Art, welche bei der Brechung eines homocentrischen Strahlenbündels in optisch ein- und zweiaxigen Krystallen auftreten: die beiden Brennpunktlinien sind im allgemeinen schief gegen den Hauptstrahl gestellt. Der Unterschied der beiden Theorien muss in der Realität um so merklicher hervortreten, je dicker die Strahlenbündel sind.

Wir haben zur Vereinfachung unserer Betrachtungen im Bisherigen immer vorausgesetzt, dass die I. Brennpunktlinie wirklich eine unendlich kleine Gerade sei. Für den Scheitel eines elliptischen Paraboloides ist dies im Einklange mit der Sturm-Kummer'schen Theorie freilich zutreffend. In dem allgemeinen Falle der Betrachtung der Brennpunktlfläche (Normalfläche) eines beliebigen Flächenelements ist sie jedoch, genau bei Lichte besehen, etwas anderes, nämlich eine unendlich kleine geschlossene ebene Figur, welche eine schiefe Projection der Basis des astigmatischen Strahlenbündels auf die Tangentialebene der kaustischen Fläche im Punkte  $b_1$  ist. Bei der Betrachtung der Brechung eines Strahlenbündels in einer sphärischen Fläche liegt diese kleine Brennebene in dem Hauptstrahl und senkrecht zur Einfallsebene. (Fig. 3). Ist die Basis  $MNM_1N_1$  ein Kreis, so ist die kleine Brennebene  $B_1b_1B_1$  eine Ellipse, deren kleinste Axe  $B_1B_1$  und deren grösste Axe im Hauptstrahl  $Ob_2$  liegt. Um die Ideen zu

fixiren, wollen wir diese Verhältnisse am elliptischen Paraboloid genauer betrachten. An demselben ist nämlich

$$\frac{r^3}{q} = \frac{b^4}{4a^2}, \quad \frac{dq}{dr} = \frac{3q}{r},$$

wo  $dq$  die Breite der I. Brennnlinie bezeichnet. Ferner ist allgemein

$$\frac{dr}{ds} = \left( \frac{r}{q} - 1 \right) \cot \beta, \quad \frac{da_1}{d\sigma} = \left( 1 - \frac{q}{r} \right).$$

Daraus folgt für das Paraboloid

$$\frac{dq}{ds} = 3 \left( 1 - \frac{q}{r} \right) \cot \beta, \quad \frac{dq}{da_1} = 3 \cot \beta \frac{ds}{d\sigma}.$$

Die letzte Relation gibt nun das Verhältniss der Breite der I. Brennnlinie zu ihrer Länge an. Ist  $d\sigma = ds$ , also die Basis des Strahlenbündels ein Kreis, so wird  $dq = 3 \cot \beta \cdot da_1$ . Wenn im Specialfalle  $3 \cot \beta = 1$ , d. h.  $\beta = 80^\circ 40'$  wäre, so würde  $dq = da_1$ , also auch die kleine Brennebene ein Kreis werden. Für den Scheitel des Paraboloides (osculirendes Paraboloid) ist  $\beta = 90^\circ$ , also  $dq = 0$  und die I. Brennnlinie eine Gerade; in allen übrigen Fällen degenerirt sie aber in eine Ellipse.

Beachtenswerth sind diese Verhältnisse bei dem Rotationsparaboloid, weil dieselben auch für die Wellenflächen gebrochener Lichtstrahlen gelten. Ist der Winkel  $\beta$  von  $0^\circ$  und  $90^\circ$  verschieden und

- 1)  $\frac{d\sigma}{ds} = 1$ ; so ist die I. Brennfläche eine Ellipse, die II. Brennnlinie eine in der Centrale liegende Gerade;
- 2)  $\frac{d\sigma}{ds} = 0$ ; so ist die I. Brennnlinie eine im Hauptstrahl, die II. Brennnlinie eine in der Centrale liegende Gerade;

- 3)  $\frac{d\sigma}{ds} = \infty$ ; so ist die I. Brennnlinie eine senkrecht zur Einfallsebene stehende Gerade, während die II. Brennnlinie sich auf einen Punct reducirt.

Also auch nach dieser Seite hin ist die Sturm'sche Theorie mit den wirklich bestehenden Verhältnissen nicht in Einklang zu bringen.

Die gegen den Hauptstrahl  $Ob_1$  (Fig. 3) senkrecht geführten Ebenenschnitte stellen die verschiedenen Formen der aufeinander folgenden innerhalb eines Strahlenbündels liegenden Wellenflächenelemente dar, wobei vorausgesetzt ist, dass die in unmittelbarer Nähe der brechenden Fläche liegende Basis kreisförmig sei. Alle übrigen folgenden Querschnitte sind geschlossene Curven vierten Grades, welche bei unendlich dünnen Bündeln Ellipsen  $TT_1$  werden, in dem I. Brennpuncte  $b_1$  in eine Gerade  $B_1B_1$ , innerhalb der Brennstrecke  $b_1b_2$  noch einmal in einen Kreis  $QQ_1$  übergehen, dagegen in der Nähe der II. Brennnlinie zu flachen Ovalen, innerhalb der II. Brennnlinie zu lemniskatenähnlichen Figuren  $RR_1$  degeneriren, deren Axen mit der II. Focalebene coincidiren. Die Wölbung der Wellenflächen ist im vorderen eintretenden Theile nach der Richtung der Wellenbewegung sphärisch convex im vorderen gebrochenen Theile gegen dieselbe paraboloidisch oder ellipsoidisch convex, im mittleren hyperboloidisch sattelförmig, im letzten Theile ellipsoidisch concav. Die Form der astigmatischen Bilder sehr kleiner gerader Linien bei schiefer Incidenz der Strahlen in einen sehr kleinen Theil der sphärischen Fläche lässt sich, wenn man von der Breite  $d\varphi$  der I. Brennnlinie abstrahirt, folgendermassen characterisiren:

Ein unendlich dünnes homocentrisches Strahlenbündel entwirft bei schiefer Incidenz auf eine brechende sphärische Fläche von einem leuchtenden Puncte O (Fig. 4) ein ver-



zerrtes Bild (Brennraum), begrenzt von zwei getrennten Brennlinien, von denen die eine  $O_1 O_1$  (I. Brennlinie auf einem Elemente der Tangente eines mit der Centrale des leuchtenden Punctes concentrischen Kreises der kaustischen Curve liegt, die andere  $O_2 O_2$  (II. Brennlinie) mit der Centrale coincidirt. Diejenigen Puncte, worin diese beiden Brennlinien von dem Hauptstrahle getroffen werden, heissen die Brennpuncte. Es wird demnach von einem Axenpuncte O

1) ein lineares, senkrecht gegen den Meridionalschnitt (Einfallsebene) gelegenes Bild  $O_1 O_1$  im Brennpuncte I,

2) ein lineares mit der Centrale des leuchtenden Punctes coincidirendes Bild  $O_2 O_2$  im Brennpuncte II erzeugt.

Von einer sehr kleinen senkrecht zum Meridionalschnitte stehenden Seitenlinie OA wird

1) ein lineares, ihr paralleles Bild  $O_1 A_1 O_1 A_1$  im Brennpuncte I,

2) ein rechteckiges, senkrecht zum Meridionalschnitte stehendes Bild  $O_2 A_2 A_2 O_2$  im Brennpuncte II erzeugt.

Von einer sehr kleinen im Meridionalschnitte gelegenen zur Centrale senkrecht stehenden Seitenlinie OB wird

1) ein rechtwinkliges, senkrecht zur Centrale MI stehendes Bild  $O_1 B_1 B_1 O_1$  im Brennpuncte I,

2) ein rechteckiges im Meridionalschnitte gelegenes Bild  $O_2 B_2 B_2 O_2$  im Brennpuncte II erzeugt.

Von einer sehr kleinen in der Centrale gelegenen Linie OC wird

1) ein rechteckiges, senkrecht zum Meridionalschnitte, parallel zur Centrale gelegenes Bild  $O_1 C_1 C_1 O_1$  im ersten Brennpuncte,

2) ein lineares mit der Centrale coincidirendes Bild  $O_2 C_2 O_2 C_2$  im zweiten Brennpuncte erzeugt.

Nach den vorstehenden Sätzen lassen sich leicht die Bilder von Linien construiren, welche beliebige Winkel mit der Centrale und der Einfallsebene bilden. Dieselben werden theils Rechtecke theils Rhomboide sein. Mit Leichtigkeit ergibt sich endlich die relative Lage der Brennnlinien gegen den Hauptstrahl, wenn das Strahlenbündel mehrere Brechungen erleidet. Liegt nämlich der leuchtende Punct in der Axe und ist das System centrirt, so liegen alle I. Brennnlinien senkrecht zur Einfallsebene, alle II. Brennnlinien coincidiren mit der Centrale, schneiden sie aber nicht. Liegt der leuchtende Punct seitwärts von der Axe, oder liegen die Centra der brechenden Flächen in einer Ebene zerstreut, so bleiben die ersten Brennnlinien senkrecht zu dieser Ebene, die zweiten in derselben und schneiden die Centralen oder Directionslinien unter beliebigen spitzen Winkeln, welche auch Rechte sein können. Sind die Centra der brechenden Flächen im Raume zerstreut, so sind die Brennnlinien zwar noch immer in zweien durch den Hauptstrahl gelegten, auf einander senkrecht stehenden Ebenen enthalten, bilden aber im allgemeinen mit dem Hauptstrahle spitze Winkel.

---

Herr A. Brill theilt die Resultate einer Arbeit mit:  
„Zur Theorie der geodätischen Linie und  
des geodätischen Dreiecks,“  
welche in den Denkschriften erscheinen wird.

---

Herr Kupffer berichtet über eine unter seiner Leitung  
von Herrn Dr. Ferd. Klaussner ausgeführte Untersuchung:  
„Ueber das Rückenmark von *Proteus anguineus*“;  
dieselbe ist ebenfalls für die Denkschriften bestimmt.

---

Fig. 1.

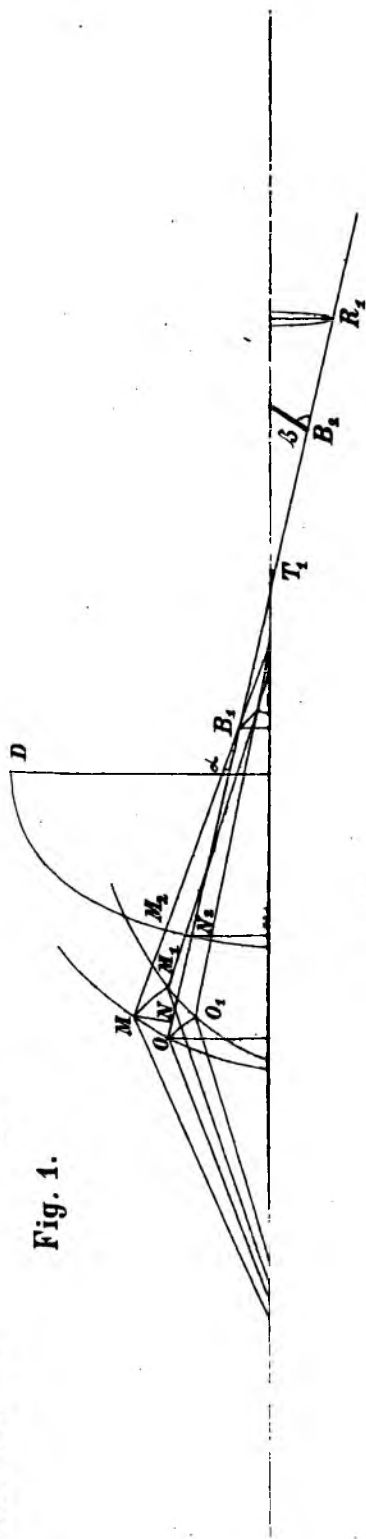


Fig. 4.

