Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band VI. Jahrgang 1876.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1876.

In Commission bei G. Franz.

Sitzung vom 6. November 1876.

Mathematisch-physikalische Classe.

Herr Seidel legt nachstehende Abhandlung vor:

„Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylorschen Reihenentwickelung von dem correspondirenden Mitgliede Herrn **P. du Bois-Reymond** in Tübingen".

Bedingungen, welche für die Taylorsche Entwickelbarkeit einer Function genügen, ergeben sich, wenn es sich um Functionen reeller Veränderlichen handelt, aus den bekannten Restausdrücken, während Cauchy's berühmte Regeln Aehnliches leisten für Functionen, welche man von complexen Argumenten abhängen lässt. Von den nothwendigen Bedingungen für die Taylorsche Entwickelung, falls dergleichen vorhanden sind, haben wir aber nicht die geringste Vorstellung; ja ich glaube sogar, dass über den Spielraum, welchen sie gewähren könnten, irrige Ansichten allgemein verbreitet sind.

Gegenstand dieser kleinen Mittheilung sind einige Bemerkungen über die Gültigkeit der Taylorschen Entwickelung bei Functionen einer reellen Veränderlichen.

1.

Setzen wir

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \cdots \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(n-1)}(x) + R_n$$

so lautet das Restintegral und der Lagrangesche Rest:

$$R_n = \int_x^{x+h} d\alpha f^{(n)}(\alpha) \frac{(x+h-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \; x \leqq \xi \leqq x+h.$$

Damit das Integral mit ins Unbegrenzte wachsendem n der Null sich nähere, würde es zwar nicht nothwendig sein, aber genügen, dass die Function unter dem Integralzeichen verschwindet, eine Bedingung, die ihrerseits dadurch wieder zwar noch mehr eingeschränkt, jedoch sehr vereinfacht würde, dass man statt der zwischen Null und h sich bewegenden Grösse $x + h - \alpha$ die Grösse h einführte. Aber wenn wir statt des Integrals den Lagrangeschen Rest zu Grunde legen, so erhalten wir direct eine vortheilhaftere Bedingung, nämlich die, dass

$$\lim_{n=\infty} \frac{h^n f^{(n)}(\alpha)}{n!}$$

verschwinden müsse für jeden Werth α des Intervalls $x \leqq \alpha \leqq x + h$. Diese ausreichende Bedingung wollen wir uns etwas näher ansehen.

2.

Man hat:

$$n! = u\sqrt{2\pi}\, e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln - n}$$

wo $\lim_{n=\infty} u = 1$. Demnach lautet die Entwickelbarkeitsbedingung:

$$f^{(n)}(\alpha) < e^{n\ln + n\left(l\frac{1}{h} - 1\right) + \frac{1}{2}\ln}$$

Ist diese Bedingung erfüllt für $x \leqq \alpha \leqq x + h_1$, so gilt die Taylorsche Entwickelung für x und $h \leqq h_1$. Ist dagegen, unter Vernachlässigung des Logarithmus im letzten Gliede des Exponenten, die kürzere Bedingung

$$f^{(n)}(\alpha) < e^{n\ln + n\left(l\frac{1}{h} - 1\right)}$$

für $x \leqq \alpha < x + h_1$ erfüllt, so ist die Gültigkeit der Entwicklung nur für x und $h < h_1$ nachgewiesen. Die sich hieran knüpfende wichtigste Aufgabe wäre, die vorstehende Bedingung für die $n$te Ableitung in Eigenschaften der Function selbst zu übersetzen. Es ist mir jedoch trotz mehrfacher Bemühungen in dieser Richtung Nichts geglückt, was der Rede werth wäre. Doch schon die blosse Aufstellung jener Bedingung veranlasst Ueberlegungen, die hinsichtlich des Gültigkeitsumfangs der Taylorschen Entwickelung unsere Vorstellungen zu berichtigen geeignet sind.

3.

Wenn die vorstehende Bedingung auch nicht die nothwendige ist, so kann man z. B. soviel aussagen, dass, falls das Unendlich nach n von $f^{(n)}(\alpha)$ für ein ganzes Intervall von α eine gewisse Grösse übersteigt, die Function für Werthe von x und $x + h$, die diesem Intervall angehören, nicht entwickelbar ist. Nun nimmt man gewöhnlich an, dass die Stetigkeit einer Function und ihrer sämmtlichen Ableitungen ihre Taylorsche Entwickelbarkeit bedinge. Danach müsste also die Stetigkeit der Ableitungen der Function mit dem Unendlich nach n der $n$ten Ableitungen in unmittelbaren Zusammenhang stehen. Möglich ist das schon, aber ich muss bekennen, dass die Entdeckung einer solchen Beziehung, nach welcher aus der Stetigkeit von $f^{(n)}(x)$ eine Grenze für das Unendlich nach n von $f^{(n)}(x)$ folgte, mich ungemein überraschen würde.

Man steht also einerseits unter dem Einfluss der mit der mathematischen Muttermilch eingesogenen Vorstellung, dass eine in einem Intervall mit allen ihren Ableitungen stetige Function für jeden Werth x jenes Intervalls, höchstens einzelne Puncte ausgenommen, in denen ihr analytischer Sinn undeutlich wird, und für hinreichend kleine Werthe von h sich auf die Taylorsche Weise convergent entwickeln lassen müsse, andererseits erzeugen die obigen Ueberlegungen den Verdacht, dass die Brauchbarkeit dieser Entwickelungsart durch die Stetigkeit der Ableitungen einer Function nicht nothwendig bedingt werde, sondern auf anderen Functionaleigenschaften beruhe. Dem Schwanken zwischen diesen beiden Standpuncten wird, wie in anderen ähnlichen Fällen, ein Ende gemacht durch sorgfältiges Erwägen der Umstände, unter denen die in Rede stehende Formel versagen kann. So gelangt man denn zu folgender einfachen und entscheidenden Frage:

Giebt es mit ihren sämmtlichen Ableitungen stetige Functionen einer reellen Veränderlichen x, die für keinen besonderen Werth von x einer besonderen Erklärung bedürfen, bei denen gleichwohl in einem Puncte $x = x_1$ die Taylorsche Entwickelung $f(x_1 + h) = f(x_1) + hf'(x_1) + \cdots$ für jeden Werth von h versagt?

Hat man nämlich erst eine Function, welche einen solchen Punct x_1 besitzt, so giebt es verschiedene Kunstgriffe, um aus dieser Function andere zu bilden, die dergleichen Puncte in jeder kleinsten Strecke der Veränderlichen haben, woraus dann weiter sich schliessen lässt, dass diese neuen Functionen überhaupt nicht nach der Taylorschen Reihe entwickelbar sind.

Nun, diese Frage einmal gestellt, bieten sich mancherlei Functionen dar, die sie zu bejahen zwingen. Ich werde im Folgendem zwei Functionen besprechen, von denen die erstere, ob sie gleich zusammengesetzter ist, mir doch in Rücksicht auf die hier verfolgten Ziele die entscheidende zu sein scheint, während gegen das Gewicht des zweiten, übrigens bekannten Beispieles schwer zu entkräftende Einwendungen erhoben werden können.

4.

Es sei also erstens vorgelegt die Function:

$$f(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p\,!} \cdot \frac{x^{2p}}{x^2 + a_p^2},$$

in der die Grössen a_p mit unendlich werdendem p gegen Null abnehmen, wie z. B. $a_p = 2^{-p}$.

Die Function f(x) ist 1. sammt allen ihren Ableitungen stetig, 2. nicht nach x entwickelbar.

Wir wollen diese Eigenschaften durch Rechnung bestätigen.

Die Reihe ist zunächst gliedweise differenzirbar nach einem Satze, den man sich leicht beweisen kann, und der besagt, dass eine Reihe $\sum_{p=1}^{p=\infty} \varphi_p(x)$ zum Differentialquotienten die Reihe $\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{d\varphi_p(x)}{dx}$ hat in jedem Puncte $x = x_1$, für welchen letztere „vollständig convergirt", d. i. für den der Rest $R_m(x) = \sum_{p=m}^{p=\infty} \frac{d\varphi_p(x)}{dx}$ verschwindet, wie man auch gleichzeitig oder nacheinander m unendlich werden und $x_1 - x$ verschwinden lassen möge.

Um diesen Satz anwenden zu können, müssen wir das Glied der Reihe f(x), also die Grösse $\frac{x^{2p}}{x^2 + a_p^2}$ n mal differenziren.

Wir setzen:

$$\frac{x^{2p}}{x^2 + a_p^2} = \frac{x^{2p-1}}{2} \left\{ \frac{1}{x + a_p i} + \frac{1}{x - a_p i} \right\},$$

und wenden auf den Ausdruck $\frac{x^{2p-1}}{x \pm a_p i}$ die Formel $\frac{d^n uv}{dx^n}$

$= u v^{(n)} + n u' v^{(n-1)} +$ etc. an, indem wir $u = x^{2p-1}$, $v = \frac{1}{x \pm a_p i}$ annehmen.

Man erhält so:

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{x^{2p-1}}{x \pm a_p i} = \frac{n!(-1)^n}{2} x^{2p-n} \cdot \left\{ \quad \right\},$$

wo die Klammer $\left\{ \quad \right\}$, wenn $\frac{x}{x \pm a_p i} = \gamma$ gesetzt wird, die Grösse enthält:

$$\gamma^{n+1} - (2p-1)\gamma^n + \frac{(2p-1)(2p-2)}{1 \cdot 2} \gamma^{n-1} - \cdots$$
$$\pm \frac{(2p-1)(2p-2)\cdots(2p-n)}{1 \cdot 2 \cdots n} \gamma.$$

Es handelt sich darum, eine obere Grenze für den numerischen Werth von $\frac{d^n}{dx^n} \frac{x^{2p}}{x^2 + a_p^2}$ aufzustellen. Wir vereinigen zu dem Zweck die in dem Zeichen $\frac{d^n}{dx^n} \frac{x^{2p-1}}{x \pm a_p i}$ enthaltenen Ausdrücke, indem wir:

$$\left(\frac{x}{x + a_p i}\right)^r + \left(\frac{x}{x - a_p i}\right)^r = 2 \left(\frac{x^2}{x^2 + a_p^2}\right)^{\frac{r}{2}} \cos(r\lambda)$$

setzen, wo $\lambda = \operatorname{arctg} \frac{a_p}{x}$. Die Grösse rechts kann Zwei nicht erreichen.

Es bleibt also

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{x^{2p}}{x^2 + a_p^2}$$

weit unter

$$(n+1)! \cdot (2p-1)(2p-2)\cdots(2p-n)\, x^{2p-n}$$

und das Glied:

$$2 \cdot \frac{(-1)^{p+1}}{2p\,!} \frac{d^n}{dx^n} \frac{x^{2p}}{x^2 + a_p^2}$$

bleibt daher ebenfalls weit unter:

$$(n+1)\,! \ \frac{x}{2p} \cdot \frac{x^{2p-n-1}}{(2p-n-1)\,!},$$

so dass die Reihe, welche durch $n$malige Differentiation unserer vorgelegten Reihe $f(x)$ entsteht, durchweg, also auch im Puncte $x = o$, vollständig convergirt, daher sie der $n$te Differentialquotient von $f(x)$ ist, und wie $f(x)$ durchweg stetig ist.

Weiter ist zu zeigen, dass die Potenzentwickelung von

$$f(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p!} \frac{x^{2p}}{x^2 + a_p^2}$$

nicht convergirt. Zu dem Zweck bestimmen wir die Coefficienten der Reihe $f(x) = f(o) + xf'(o) + \cdots$.

Wir haben zuerst:

$$\frac{x^{2p}}{x^2 + a_p^2} = \sum_{q=o}^{q=\infty} \frac{(-1)^q \cdot x^{2(p+q)}}{a_p^{2(q+1)}}$$

und

$$f(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \sum_{q=o}^{q=\infty} \frac{(-1)^{p+q+1} \, x^{2(p+q)}}{2p\,! \; a_p^{2(q+1)}}$$

Ordnen wir diesen Ausdruck nach Potenzen von x, indem wir $p + q = r$ setzen, so folgt:

$$f(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^{r+1} x^{2r} \sum_{p=1}^{p=r} \frac{1}{2p\,! \; a_p^{2(r-p+1)}}$$

Dies ist die fragliche Potenzentwickelung, die unzweifelhaft für jedes x divergirt. Denn man nehme z. B. an:

$$a_{\lambda-1} > x > a_\lambda,$$

so zerfällt $f(x)$ in die Theile:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^{r+1}x^{2r}\sum_{p=1}^{p=\lambda-1}\frac{1}{2p!\ a_p^{2(r-p+1)}}$$

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^{r+1}x^{2r}\sum_{p=\lambda}^{p=r}\frac{1}{2p!\ a_p^{2(r-p+1)}},$$

in deren erstem die innere Summe, falls $r<\lambda$, nur bis r genommen zu denken ist. Der erste Theil ist endlich, der zweite $\pm\infty$.

5.

Scheinbar viel einfacher ist folgendes Beispiel:

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Auch diese Function ist nicht nach steigenden Potenzen von x entwickelbar, dabei aber mit ihren sämmtlichen Differentialquotienten stetig. Nur ist hier die Schwierigkeit, dass die Werthe $\varphi(o)$, $\varphi'(o)$, .. besonderer Festsetzungen bedürfen, wenn unter diesen Werthen das verstanden wird, was man durch Berechnung der Function für den vorgelegten Zahlenwerth $x=o$ erhält, und nicht einen $\text{Limes}_{x=o}\,\varphi(x)$, etc. Man kann durch geeignete Festsetzungen diese Bedenken auch bei Functionen wie $\varphi(x)$ beseitigen, aber auf Kosten ihrer Einfachheit. Die Function $\varphi(x)$ ist entweder als

$$\Sigma\frac{1}{p!}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^p$$

oder als

$$\frac{1}{\Sigma\frac{1}{p!}\left(+\frac{1}{x^2}\right)^p}$$

aufzufassen. Bei Ausschluss von $x=o$ ist die Gleichartigkeit beider Definitionen offenbar. Aber für $x=o$ ist die erste ganz werthlos und die zweite setzt die Gleichheit $\frac{1}{\frac{1}{0}}=o$ voraus. Man wird daher, um $\varphi(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ für alle

Werthe von x auf gleiche Weise definiren zu können, diese Grösse als $\text{Limes}_{\varepsilon=0}\,\varphi(x \pm \varepsilon)$ auffassen müssen. Dies wird aber lästig, wenn man, wie im Folgenden, eine Summe von unbegrenzt vielen Functionen $\varphi(x)$ bildet, für Argumente, die schliesslich einander unendlich nahe rücken. Alsdann scheint diese Auffassung sogar die erheblichsten Schwierigkeiten im Gefolge zu haben, wenn man den deutlichen Sinn der analytischen Ausdrücke nicht aus dem Auge verlieren will. Aus diesem Grunde habe ich eben vorgezogen, als Beispiel (Art. 4) eine Function hinzustellen, die für alle Werthe des Arguments die gewöhnliche Bestimmung eines Reihenwerthes:

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} u_p = \lim_{q=\infty} \sum_{p=1}^{p=q} u_p$$

gestattet, wo jeder Term u_p für jeden Werth von x mit beliebiger Genauigkeit berechenbar ist.

6.

Was nun die Theorie dieser Beispiele betrifft, so stellen sie eine besondere Art Stetigvieldeutigkeiten dar. Die Function:

$$f(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p\,!} \; \frac{x^{2p}}{x^2 + a_p^2}$$

ist, wenn man statt x einsetzt $z = x + iy$, stetig und eindeutig, bis auf die Puncte

$$x = o\ ,\ y = \pm a_p\ ,\ p = 1,\ 2,\ \cdots$$

in denen sie unendlich wird. Einen um den Punkt $z = o$ construirbaren Convergenzkreis hat sie also nicht, natürlich, denn sie ist dort unstetig, wenn man z. B. in der y Richtung in den Punkt $z = o$ gelangt. Das Neue ist nur, dass beim Durchgang durch den Punkt $z = o$ in der xRichtung die Function mit allen in dieser Richtung genommenen

Differentialquotienten stetig ist. Aehnliches gilt von dem zweiten Beispiel $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Gelangt man durch die y Axe in dem Punct $z = o$, so wird $\varphi(z)$ unendlich, während von der x Axe her $\varphi(z)$ Null wird.

7.

Um nun von der Function $f(x)$ aus andere abzuleiten, welche die Singularität von $f(x)$ für $x = o$ in jedem kleinsten Intervall besitzen, giebt es verschiedene Kunstgriffe. Man kann z. B. so verfahren.

Wir wollen die Function nur in dem Gebiet

$$-1 \leqq x \leqq +1 \ , \ o \leqq y \leqq +1$$

betrachten, und wollen sie so bestimmen, dass sie in den Puncten

$$z = x_q^{(p)} + ia_p$$

dieses Gebietes unendlich werde, wo:

$p = o, 1, 2, \cdot\cdot$ in inf. sei,
q die ganzen Zahlen zwischen -2^p und $+2^p$, diese eingerechnet, vorstelle,

$$x_q^{(p)} = \frac{q}{2^p},$$

$$a_p = \frac{1}{2^p}$$

gedacht ist. Ferner setzen wir:

$$\lambda_q^{(p)}(x) = \frac{(x - x_q^{(p)})^{2p}}{(x - x_q^{(p)})^2 + a_p^2},$$

und bilden die Doppelsumme:

$$\sum_{p=o}^{p=\infty} \sum_{q=-2p}^{q=+2p} \mu_{pq} \lambda_q^{(p)}(x),$$

in welcher wir den Zahlencoefficienten μ_{pq} zu

$$\frac{(-1)^{p+1}}{2p!} \cdot \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \varrho_{pq}$$

bestimmen, unter ϱ_{pq} weitere Zahlen verstanden, die ich für das hier zu Zeigende auch gleich Eins annehmen konnte, und nur stehen lasse, um bei einer anderen Gelegenheit mich darauf zu beziehen. Die ϱ_{pq} sollen unter einer endlichen Grenze bleiben.

8.

Die Function:

$$F(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{q=-2p}^{q=+2p} \left(-\frac{1}{2}\right)^{p+1} \frac{1}{2p\,!} \cdot \varrho_{pq} \cdot \frac{(x - x_q^{(p)})^{2p}}{(x - x_q^{(p)})^2 + a_p^2}$$

ist erstens für $-1 \leqq x \leqq +1$ stetig mit ihren sämmtlichen Differentialquotienten. Denn F(x) als nach p fortschreitende Reihe gedacht, lautet ihr Glied:

$$\sum_{q=-2p}^{q=+2p} \left(-\frac{1}{2}\right)^{p+1} \frac{1}{2p\,!} \cdot \varrho_{pq} \cdot \lambda_q^{(p)}(x)\ ,$$

und der nte Differentialquotient dieses Gliedes bleibt nach Art. 4 weit unter:

$$\sum_{q=-2p}^{q=+2p} \frac{1}{2^p} \frac{(n+1)\,!}{2} \cdot \varrho_{pq} \cdot \frac{x - x_q^{(p)}}{2p} \cdot \frac{(x - x_q^{(p)})^{2p-n-1}}{(2p-n-1)\,!}$$

also, weil $x_q^{(p)}$ und x zwischen -1 und $+1$ sich bewegen, der Unterschied daher 2 nicht übersteigen kann, bleibt er weit unter:

$$\varrho \cdot (n+1)\,! \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{2^{p-n-1}}{(2p-n-1)\,!},$$

wo ϱ nicht grösser als das grösste der ϱ_{pq}. Hieraus folgt die behauptete Stetigkeit.

Was sodann die Entwickelbarkeit von $F(x+h)$ in eine Reihe der Form $F(x) + hF'(x) + \cdots$ anlangt, für Werthe von x und h die der Ungleichheit $-1 \leqq x,\ x+h \leqq +1$ genügen, so setzen wir

$$F_N(x) = \sum_{p=0}^{p=N} \sum_{q=-2p}^{q=+2p} \mu_{pq} \lambda_q^{(p)}(x)\ .$$

Der grösste Convergenzkreis, in welchem die Function $F_N(x+h)$ nach Potenzen von h entwickelbar ist, wenn x

die Strecke $-1 \leqq x \leqq +1$ nicht verlässt, hat den Halbmesser

$$\frac{\sqrt{5}}{2^{N+1}},$$

der also mit N^{-1} verschwindet. Es wäre freilich, weil diese Maximalhalbmesser gerade für $N = \infty$ unstetig sein könnten, noch direct zu zeigen, dass die Function $F(x)$ nicht entwickelbar ist, doch wollen wir hier diese Rechnung nicht anstellen.

9.

Zum Schluss hebe ich noch eine bemerkenswerthe Function hervor:

$$\Phi(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \mu_p \sin px ,$$

unter μ_p solche Zahlen gedacht, dass das Unendlich von μ_p^{-1} grösser als das einer Potenz von p, kleiner als das einer Potenz von e^p sei, wie z. B. $e^{\sqrt{p}}$. Ich habe bei einer früheren Gelegenheit[1]) darauf aufmerksam gemacht, dass eine Function $\Sigma\mu_p \sin px$ nicht aus dem Reellen ins Imaginäre durch Einsetzen eines complexen Werthes für x fortgesetzt werden kann, wenn nicht $\mu_p < e^{-\nu p}$, ν beliebig klein. Andererseits ist $\Phi(x)$ mit allen Differentialquotienten stetig, wenn $\mu_p < p^{-n}$, n beliebig gross. Ist also in der That, wie für $\mu_p = e^{-\sqrt{p}}$:

$$e^{-\nu p} < \mu_p < p^{-n},$$

so ist die Function $\Phi(x)$ in der reellen Linie mit sämmtlichen Differentialquotienten stetig, während $\Phi(x+iy)$ nicht existirt. Was die Entwicklung von $\Phi(x)$ anlangt, so folgt die Divergenz von

$$\Phi(x+h) = \sum_{q=0}^{q=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{e^{-\sqrt{p}}(hp)^q}{q!} \sin\left[px + \frac{q\pi}{2}\right]$$

1) Abh. d. K. Bayer. Ak. II. Cl. Bd. XII, II. Abth. Untersuchungen über die Convergenz etc., Einleitung, pag. III.

zwar schon daraus, dass, wenn man z. B. nur die Glieder berücksichtigt, für die $p = q^r$, $r > 1$, der Zahlencoefficient $\frac{e^{-\sqrt{p}}(hp)^q}{q!}$ für jedes h unendlich wird. Es kann aber allerdings auch hier der (wie alle ähnlichen) schwierige Nachweis verlangt werden, dass die übrigen Terme dieses Unendlichwerden nicht aufheben.

Est ist also $\Phi(x)$ für complexe x nicht vorhanden, im Reellen mit sämmtlichen Ableitungen stetig, aber nicht entwickelbar.

Tübingen, October 1876.