

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXIV. Jahrgang 1894.

München.

Verlag der K. Akademie.

1895.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber den Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes unter Gasmolekülen.

Von Max Planck.

(Eingelaufen 8. November.)

Unter obigem Titel hat Herr L. Boltzmann in den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften vom 5. Mai 1894 gegen den Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes, wie er sich in den von mir herausgegebenen Kirchhoff'schen Vorlesungen über die Theorie der Wärme, S. 142 ff., findet, einen Einwand geltend gemacht. Da sich die Spitze des Angriffs zum grossen Theil gegen den Herausgeber jener Vorlesungen richtet, indem von Ungenauigkeiten der Darstellung gesprochen und sogar die Stellung des Herausgebers zur kinetischen Gastheorie damit in Verbindung gebracht wird, so liegt mir daran, mich gegen diesen Vorwurf zu vertheidigen. Es könnte nämlich durch ihn leicht die Meinung erweckt werden, als ob in die Darstellung des genannten Beweises sich irgend ein Mangel in der Form eingeschlichen habe, der durch Anwendung grösserer Sorgfalt und Genauigkeit von Seiten des Herausgebers hätte vermieden werden können.

Eine solche Meinung wäre aber durchaus irrig. Bei keiner anderen Stelle des Kirchhoff'schen Buches bietet das

vom Verfasser hinterlassene Manuscript mehr Garantien dafür, dass die Vorlesung thatsächlich genau so gehalten wurde, wie sie gedruckt vorliegt, und in der That handelt es sich bei dem Boltzmann'schen Einwand keineswegs um ein mögliches Missverständniss oder um eine Unklarheit in der Ausdrucksweise, sondern der Einwand trifft gerade den Kern des ganzen Beweises; es ist nicht denkbar, demselben Rechnung zu tragen, ohne dass der Ideengang vollständig abgeschnitten wird. Von einem Mangel in der Darstellung kann also gar nicht die Rede sein, und damit halte ich die Aufgabe des Herausgebers für erledigt, wie das auch in meinem Vorwort ausdrücklich hervorgehoben ist. Eine Kritik des vorgetragenen Gedankenganges und an Stelle eines unvollkommenen Beweises womöglich einen besseren verlangen heisst doch nicht weniger, als vom Herausgeber ein neues Buch fordern. Wer würde dann wohl die Verantwortung übernehmen können, ein nachgelassenes Werk herauszugeben?

Nach der formellen Rechtfertigung sei mir auch noch ein Wort zum Inhalt verstattet. Den Boltzmann'schen Einwand habe ich mir seinerzeit ebenfalls gemacht, wenn auch in etwas anderer, doch in so wenig abweichender Form, dass ich hier nicht mehr darauf zurückkomme und mich einfach auf die Anerkennung seiner sachlichen Berechtigung beschränke. Ich habe aber daran noch eine weitere Ueberlegung geknüpft, die ich bei dieser Gelegenheit hier anfügen möchte, obwohl ich nicht sicher weiss, ob sie nicht schon einmal angestellt worden ist. In dem Maxwell-Kirchhoff'schen Beweis wird die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Moleküle nach Beendigung eines Zusammenstosses in bestimmter Weise auseinanderfliegen, aus dem Satze von der Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens mehrerer unabhängiger Ereignisse auf zwei verschiedene Weisen berechnet: einmal direct durch Betrachtung des Zustandes nach dem Stoss, das andere Mal durch Betrachtung des Zustandes vor

dem Stoss. Aus der Gleichsetzung beider Ausdrücke resultirt dann das Maxwell'sche Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz. Die erste Berechnungsart ist aber im Allgemeinen nicht zulässig, da die Zustände der Moleküle nach dem Stoss nicht mehr unabhängige Ereignisse sind im Sinne jenes benutzten Satzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Nur bei Gültigkeit des Maxwell'schen Gesetzes wird also jene Berechnung richtig, oder mit anderen Worten: wenn das Maxwell'sche Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz gilt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Moleküle mit bestimmten Geschwindigkeiten auseinanderfliegen, ebenso gross als die, dass zwei Moleküle mit denselben Geschwindigkeiten zusammentreffen. Bei allen anderen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzen gilt dieser Satz nicht.

Wenn man nun in einem in vollständigem Gleichgewicht befindlichen Gas die Geschwindigkeiten sämtlicher Moleküle plötzlich gerade umgekehrt denkt, so verwandelt sich je ein Paar gerade vor einem Zusammenstoss befindlicher Moleküle in ein Paar gerade auseinanderfliegender Moleküle und umgekehrt; dann vertauschen sich also auch die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. Gilt nun das Maxwell'sche Vertheilungsgesetz, bei welchem diese Wahrscheinlichkeiten einander gleich sind, so befindet sich auch nach dem Verwandlungsakt das Gas in einem Zustand dynamischen Gleichgewichts; gilt aber ein anderes Vertheilungsgesetz, so kann dies offenbar nicht mehr zutreffen.

Nun besagt aber ein allgemeiner, aus dem Hamilton'schen Princip abzuleitender Satz der Mechanik, dass in einem Punktsystem mit conservativen Kräften, welches sich im dynamischen Gleichgewicht befindet, eine plötzliche Umkehrung aller Geschwindigkeiten abermals einen dynamischen Gleichgewichtszustand bedingt. Demzufolge muss man schliessen: „Das Maxwell'sche Gesetz ist das einzige Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz, welches im Einklang steht

mit dem Satze der Mechanik, dass der dynamische Gleichgewichtszustand eines Punktsystems durch ein plötzliches Umkehren aller Geschwindigkeiten nicht gestört wird.“ Durch diese Ueberlegung wird, so viel ich sehe, der Boltzmann'sche Einwand ganz vermieden und das Maxwell'sche Gesetz auf einen festeren Boden gestellt. Hervorheben möchte ich noch besonders, dass die Frage, ob eine solche plötzliche Umkehrung aller Geschwindigkeiten physikalisch ausführbar ist, hiebei ganz ausser Betracht bleibt.
