

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXIV. Jahrgang 1894.

München.

Verlag der K. Akademie.

1895.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Referat über eine Arbeit:

Exacte Grundlagen für eine Theorie der Ovale.

Von Hermann Brunn.

(Eingelaufen 3. März.)

Der Verfasser hat in seiner Doctordissertation, betitelt: „Ovale und Eiflächen“ jene einfachen geometrischen Gestaltungen in der Ebene und im Raume behandelt, welche überall convex nach aussen begrenzt sind. In jener Arbeit kam es ihm darauf an, zu zeigen, dass sich auch über derartige geometrische Gebilde von ungemein wenig specialisirtem Bildungsgesetz eine Menge nicht ganz auf der Hand liegender Sätze aussagen lässt. Die Grundlagen für seine Entwicklungen entnahm er der Anschauung, und verzichtete bei den auf Seite 1—3 der Dissertation gegebenen Sätzen, auf welchen die folgenden sich aufbauen, in eine ausführliche Beweisführung einzutreten. Es geschah dies indess nicht, weil er die genannten Sätze eines Beweises nicht für fähig oder für bedürftig erachtet hätte.

Gerade auf eine exacte Festlegung dieser Grundlagen für die Theorie der Eigeilde nun bezieht sich die gegenwärtige Arbeit. Dass das Thema nicht so einfach ist, als uns der Augenschein verleiten möchte anzunehmen, dürfte schon der Umstand beweisen, dass es dem Verfasser nicht

gelang, seine Aufgabe auf weniger als etwa fünf Druckbogen zu erledigen.

Die Anregung, auf diesen Gegenstand zurückzukommen, dessen Bearbeitung dem Verfasser lange Zeit als eine undankbare erschien, schöpfte derselbe aus der Kenntnissnahme von gleichgerichteten Bestrebungen des Herrn Prof. Minkowski in Bonn (künftig Königsberg). Minkowski hat bei Teubner¹⁾ die Voranzeige eines im Drucke befindlichen Werkes betitelt „Geometrie der Zahlen“ erscheinen lassen, in welchem eine unvermuthete und fruchtbare Verbindung zwischen der Zahlentheorie und der Geometrie der nirgends concav begrenzten Gebilde hergestellt werden und desswegen auch die Theorie der letzteren ausführlicher in analytischem Gewande behandelt werden soll. Es kommt somit den Eigebilden auch von anderem als rein geometrischem Standpunkt eine gewisse Wichtigkeit zu, und dies hat den Verfasser ermuntert, seine Doctorarbeit in der oben angedeuteten Weise zu ergänzen. Die vorliegende Arbeit wird vermuthlich mit gewissen Capiteln des Minkowskischen Buches in der Materie die grösste Verwandtschaft haben, doch steht zu hoffen, dass bei der grossen Verschiedenheit der Behandlungsmethoden (analytisch und rein geometrisch), sowie des Ausgangspunktes und des Zieles der Forschungen sich doch auch viele wesentliche und instruktive Abweichungen im Ausbau ergeben werden.

Die Untersuchung beschränkt sich auf die ebenen Ovalgebilde, auf deren Theorie sich diejenige der Eigebilde im Raume naturgemäss zu stützen hat.

Die Arbeit beginnt mit einem Abschnitt, der mit dem Namen „Seitenrechnung“ betitelt ist. Es stellte sich näm-

1) Im Juni 1893 in den Anzeigen. Vgl. auch Bulletin des Sc. math. 2. série t. XVII janv. 1893: Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite, par M. H. Minkowski.

lich heraus, dass bei Besprechung der Eigenschaften der Ovale die Hälften, in welche eine Ebene durch eine Gerade, eine Gerade durch einen Punkt zerlegt wird, eine fast bedeutendere Rolle spielen, als die vollständigen Gebilde, dass es fortwährend galt, zwei „Seiten“ zu unterscheiden. Um den auf Seiten bezüglichen Schlüssen eine handliche Form und Präcision zu geben, wurden ein Symbol S für „Seite“ und symbolische Gleichungen der Form

$$Sa = Sb; c; d$$

$$Sa = - Sb; c; d$$

eingeführt. Die Bedeutung der ersten Gleichung ist, dass innerhalb einer getrennten Mannigfaltigkeit d die Elemente a, b auf der nämlichen, die der zweiten, dass sie auf verschiedenen Seiten der trennenden Mannigfaltigkeit c liegen. Es wurden die Bedingungen für die Anwendung der Seitenrechnung auf Gerade und Ebene untersucht, d. h. es wurde untersucht, welcher Theil der Axiome für die Ebenengeometrie bei der Seitenrechnung vorauszusetzen ist, resp. welche Fassung diese Axiome erhalten, wenn man den Seitenbegriff in den Vordergrund drängt.

Sodann war die Definition und Nomenclatur einer Anzahl unerlässlicher Grundbegriffe wieder mit steter Rücksicht auf den Seitenbegriff zu geben.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen wurde das eigentliche Thema mit der, wie der Verfasser glaubt, einfachsten Definition eines Ovals eröffnet, welche sich nicht auf das Oval als Curve, sondern als Flächenstück bezieht und aussagt, dass eine Gerade der Ebene des Ovals mit dem Oval höchstens ein Stück gemein hat. „Ein Stück“, das soll heissen: einen Punkt, oder eine durch zwei Endpunkte begrenzte gerade Strecke. Die Möglichkeit von „Figuren“ dieser Eigenschaft liegt auf der Hand, es wurde speciell von der Dreiecksfläche bewiesen, dass sie dazu gehört. Im übrigen wurde über die Figuren, welche der Definition genügen,

keine weitere Voraussetzung gemacht, auch nicht ein Mal die, dass es sich um zusammenhängende Ebenenstücke mit Rand und Inhalt etc. handle, wie es in gegenwärtiger kurzer Darstellung nach obiger Erwähnung des Wortes „Flächenstück“ scheinen könnte. Im Gegentheil sucht die Arbeit ihr Verdienst eben darin, rein aus den Axiomen und der Definition alles andere abzuleiten und nicht zu postuliren.

Aus der Definition ergibt sich sofort, dass das, was Ovalen gemeinsam ist, wieder ein Oval sein muss. Es wird gezeigt, wie der Satz umzukehren ist, und ein Satz über „Ovaldifferenzen“ angeschlossen. Gerade Strecken zwischen Ovalpunkten gehören vollständig zum Oval; es sind dabei je nach der Art der Endpunkte verschiedene Fälle zu behandeln (innere Punkte, Randpunkte). Es werden dann die Ovale in Beziehung gesetzt zu Strahlenbüscheln, deren Centrum innerhalb, auf dem Rande, oder ausserhalb des Ovals liegt. Es wird mittels innerer Büschel auf eine erste Art und Weise die Reihenfolge der Randpunkte des Ovals definirt. Die mit Figurpunkten belegten Geraden aus einem äussern oder Randpunkt füllen einen und nur einen von zwei „angelehnten“ Geraden begrenzten Winkel. Die beiden von jedem Randpunkt ausgehenden Strahlen = Halbgeraden jener angelehnten Geraden, in deren Strahlwinkel die ganze Figur eingeschlossen liegt, werden Grenzstrahlen genannt, ihre Existenz und Bestimmtheit exact bewiesen.

Eine längere Reihe von Paragraphen beschäftigt sich sodann mit dem Nachweise, dass die Gesammtheit der Ovalrandpunkte die Natur eines stetigen geschlossenen Curvenzuges hat, eine Ovallinie bildet. Gerade hier ist Sorgfalt nöthig, um Sätze, die man mit grosser Bereitwilligkeit unbewiesen anzunehmen geneigt ist, strenge zu begründen. Es gibt für jeden Ovalrandpunkt Nachbarrandpunkte, welche ihm beliebig nahe liegen. Bei dieser Gelegenheit wird der Begriff des „Näherungsbogens“ für einen Curvenpunkt a ein-

geführt. Ein Näherungsbogen $a b$ für a muss die Eigenschaft haben, dass wenn c ein beliebiger Punkt desselben ist, alle zwischen a und c liegenden Bogenpunkte näher an a liegen als c . Um über das Zwischenliegen entscheiden zu können, muss man natürlich durch ein anderes Mittel, als die Entfernung ist, bereits über die „Reihenfolge“ der Punkte eine Entscheidung getroffen, wie Kronecker sagt, „ein Fortgangsprincip“ aufgestellt haben. Ein solches hat sich für die Ovalrandpunkte oben mittels innerer Strahlbüschel auch bereits ergeben. Es wird gezeigt, dass der ganze Ovalrand sich in eine endliche Anzahl aneinander-schliessender Näherungsbögen zerlegen und somit seine Punkte mittels des Fortgangsprincips der Entfernung sich in Reihenfolge setzen lassen, eine Reihenfolge, welche mit der vorher gewonnenen übereinstimmt. Schwierigkeit für die bei diesem Satz zunächst sich darbietende Beweismethode bot das mögliche Vorkommen gewisser Stellen, die als „Ecken $\geq \frac{\pi}{2}$ “ bezeichnet werden, übrigens an einem Oval höchstens viermal auftreten können. Die Schwierigkeit wurde schliesslich mittels eines Satzes überwunden, welcher die Bedingung angibt, unter der ein Curvenbogen Näherungsbogen für seine beiden Endpunkte ist. Es werde gleich hier erwähnt, dass später mittels eines dritten Fortgangsprincipes — nämlich mittels einer parallel verschobenen Geraden — abermals die nämliche Reihenfolge der Ovalrandpunkte, zunächst auf einem Theilbogen erzielt wird.

Die Haupteigenschaft der nun als stetige, geschlossene Curven erkannten Ovalränder besteht darin, dass sie mit Geraden ihrer Ebene höchstens zwei getrennte Punkte oder höchstens eine zusammenhängende Strecke gemein haben.

Die Begriffe der angelehnten Geraden des Ovals und der Tangenten ihres Randes decken sich ihrem Umfange nach, was bei andern Arten von Figuren nicht der Fall ist. Dabei

ist unter einer angelehnten Geraden eine solche zu verstehen, welche Randpunkte des Ovals enthält und alle übrigen Ovalpunkte auf einer Seite liegen hat, und die Tangente ist als Grenzlage einer Secante zu definiren, auf der beide Schnittpunkte als beweglich und gegen einen festen Punkt der Curve hinrückend angenommen werden dürfen, während man gewöhnlich nur den einen beweglich, den andern fest denkt. Wollte man dem Begriff der Tangente diese Weite nicht geben, so würden die angelehnten Geraden in den sogenannten „Ecken“ des Ovals nicht sämmtlich auch Tangenten sein, sondern diese Charakterisirung würde nur den beiden äussersten, auf welchen die Grenzstrahlen liegen, zukommen.

Ein besonderer Theil der Arbeit befasst sich mit einer Reihe von Sätzen bezüglich auf die Schnitte von Grenzstrahlen, Tangenten und Secanten untereinander, welche sich, abgesehen von ihrem selbständigen Interesse, für das Folgende als nothwendig erweisen. Es handelt sich nicht um die Thatsache, dass die Tangenten etc. sich schneiden, sondern darum, welche Hälften derselben sich schneiden, und ist daher in diesem Theile der Arbeit die ausgedehnteste Anwendung von der Seitenrechnung zu machen. Die beiden Hälften einer Tangente werden als erste und zweite unterschieden mittels eines von fester Anfangslage ausgehenden, um einen inneren Ovalpunkt in bestimmtem Sinne σ sich drehenden Strahles, welcher die „erste“ Hälfte einer Tangente auf seinem Wege vor Erreichung des Berührungpunktes, die „zweite“ nach dem Passiren desselben überstreicht. Nur für die Tangente des Ausgangspunktes dreht sich die Beziehung um. Einer der hauptsächlichsten Hilfssätze sei zur Charakterisirung hier angeführt: Sind c und d zwei Punkte auf einer der beiden Hälften eines Ovalrandes, in welche derselbe zerlegt wird durch die Berührungspunkte zweier parallelen Tangenten, und geht im Sinne σ genommen der Punkt c dem Punkt d voraus, so schneidet der zweite Grenz-

strahl aus c den ersten aus d , während sich der erste Grenzstrahl aus c und der zweite aus d , oder auch gleichbenannte Grenzstrahlen aus c und d nicht schneiden.

Man gelangt zu dem Satze, dass es für die Feststellung der Reihenfolge der Tangenten gleichgültig ist, ob man die Reihenfolge ihrer Berührungspunkte auf sie überträgt oder die Reihenfolge der Strahlen eines Büschels (mittels Parallelität) auf die „ersten“ oder „zweiten“ Hälften der Tangenten. Nur lässt das eine Fortgangsprincip unter Umständen die Reihenfolge eines Theiles der Tangenten unbestimmt und willkürlich, während das andere dieselbe eindeutig bestimmt. Die Totalkrümmung eines Ovalrandbogens ergibt sich demnach stets grösser als die eines Theiles von ihm, die Gesamtkrümmung des Randes natürlich zu 2π .

Es werden dann weiter die an einem Ovalrand möglicherweise vorkommenden Singularitäten: Ecken und gerade Stellen besprochen. Ecken sind solche Randpunkte, deren Grenzstrahlen einen Winkel $< \pi$ miteinander einschliessen. Die Grösse einer Ecke soll jedoch durch den Ergänzungswinkel dieses Winkels gemessen werden. Ecken, deren Grösse über einer endlichen Grenze bleibt, gibt es an einem Ovalrand nur in endlicher Anzahl. Dies schliesst nicht aus, dass die Anzahl der endlich grossen Ecken an einem Ovalrand über jede Zahl hinaus wächst, was nur eine geometrische Einkleidung der Thatsache ist, dass die Summe endlicher Grössen, deren Anzahl über jede Zahl hinauswächst, eine gewisse endliche Zahl nicht zu übersteigen braucht. Es gibt Ovale mit Rändern, von denen man kein noch so kleines Stück angeben kann, auf dem nicht Ecken endlicher Grösse enthalten wären. Es wird ein Beispiel eines solchen Ovals construirt, es werden die dualen Betrachtungen angedeutet, bei denen statt der Ecken gerade Strecken des Ovalrandes eintreten, und die genauere Discussion dieser nicht uninteressanten Curven einem anderen Orte vorbehalten. Das Gesagte

lässt ermassen, welche Hindernisse der allgemeinen Formulirung des Krümmungsmasses für Ovalränder in den Weg treten. Man hat bei einem allgemein definirten Oval keine Garantie dafür, dass das Krümmungsmass in einem Randpunkt nicht eine vollkommen unstetige Function der Lage des Randpunktes ist.

Wesentlich andere Singularitäten ergeben sich auf Ovalrändern als ausgeschlossen, insbesondere eigentliche Doppelpunkte, Wendepunkte, Rückkehrpunkte, Doppeltangenten. Nur jene Ausartungen eines Ovals, für welche auch sonst die gegebenen Sätze nur *cum grano salis* zu verstehen sind: der einzelne Punkt und die einzelne gerade Strecke, nehmen auch hier eine gewisse Ausnahmestellung ein.

Bisher ist die Ovallinie nur als Rand eines sogenannten „vollen“ Ovals, d. h. eines Flächenstückes von gewissen Eigenschaften definirt. Es ist erwünscht durch Umkehr früherer Sätze unabhängige Definitionen für die Ovalcurven zu erhalten. Bei dem hierauf gerichteten Bestreben ergeben sich Sätze wie die folgenden:

Eine im Endlichen liegende, stetige, geschlossene Curve aus einem Zug, die mit einer Geraden höchstens 2 Punkte oder höchstens eine gerade Strecke gemein hat, ist stets Berandung eines vollen Ovals.

Oder:

Eine im Endlichen liegende etc. etc. Curve, welche in jedem Punkt angelehnte Gerade aufweist, ist ein Ovalrand.

Nur für den Fall, dass man unter die obigen geschlossenen Curvenzüge auch gewisse Doppelcurven (uneigentlich geschlossene) einschliesst, muss den Sätzen eine Clausel angehängt werden.

Schliesslich werden sorgfältig ausgeführte Beweise dafür erbracht, dass jede Ovallinie eine bestimmte Länge, jedes volle Oval einen bestimmten Inhalt hat. Um die Nothwendigkeit dieser Beweise einzusehen, muss nochmals darauf

hingewiesen werden, dass wir nichts uns als gegeben betrachten wollen, als die Axiome, die Oval-Definition und das, was wir daraus abgeleitet haben, dass wir dagegen, was die Anschauung uns darbietet, mag es noch so plausibel erscheinen, nicht ungeprüft annehmen dürfen. Wir müssen diese Strenge der Auffassung innehalten, wenn wir wünschen, dass unseren geometrischen Sätzen auch ein functiontheoretischer Werth zukomme. Machen wir uns aber diese Auffassung zu eigen, so erscheint es eher wunderbar, als selbstverständlich, dass aus jener einfachen Definition des Ovals die ziemlich verwickelten Bedingungen folgen, welche das Vorhandensein einer mathematisch wohldefinirten Länge und eines wohldefinirten Inhaltes gewährleisten. Es ist die angewandte Vorsicht auch in Anbetracht der Erfahrung nöthig, dass es z. B. wirklich Curven gibt von scheinbar einfachem Verlauf, welche doch keine bestimmte Länge besitzen. Wir müssen, um beruhigt mit Ovalen operiren zu können, die absolute Sicherheit gewinnen, dass keine bisher unbemerkten die Allgemeinheit der aus der Anschauung geschöpften Sätze störenden Einzelfälle möglich sind.

Auf das Detail der Beweise kann hier nicht eingegangen werden.

Ein Satz über Eiflächen.

Im Anschluss an das Vorstehende sei es gestattet, einen Hauptsatz aus des Verfassers Doctorarbeit gegen etwaige Einwendungen sicherzustellen. Derselbe lautet (Ov. u Eifl. S. 23):

1. „In einer Eifläche findet sich unter einer Schaar von parallelen ebenen Schnitten ein und nur ein Maximum an Inhalt, das entweder durch *eine* Schnittfigur oder durch *eine* stetige Folge congruenter Schnittfiguren gebildet ist, die einen Cylindertheil bilden.

Der Beweis des ersten Theiles des Satzes lässt sich, ohne dass er im wesentlichen irgendwie geändert würde, vermittels der im vorausgehenden Referate beschriebenen Untersuchungen schärfer präcisiren. Bezüglich der letzten Behauptung des Satzes, dass ein Cylindertheil entsteht, hat mich Herr Professor Minkowski aufmerksam gemacht, dass die in meiner Doctorarbeit (III, 9, 10) gegebenen Andeutungen des Beweises in Anbetracht einer auftretenden Schwierigkeit doch gar zu dürftig sind. Es möge dem Verfasser gestattet sein, diese Lücke hier auszufüllen.

2. Satz:

Wenn eine Eifläche $\mathfrak{E}$ drei ebene Parallelschnitte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ von gleichem Inhalt $\mathfrak{I}$ aufweist, so sind diese Schnitte von congruenter Form, ähnlich gelegen und die Begrenzung von $\mathfrak{E}$ zwischen den Ebenen der beiden äussern Schnitte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ ist ein Cylinder-manteltheil.

Beweis.

3. Voraus schicken wir als Hilfssatz: An einem von zwei Rechtecken gleichen Inhalts i als Deckflächen begrenzten „Obelischen“ ist der Inhalt m eines parallel zu den Deckflächen geführten ebenen Schnittes A grösser als i , gleich nur dann, wenn die Deckrechtecke congruent sind, s. Ov. u. Eifl. S. 23. Es folgt aus den dort gegebenen Formeln

$$m - i = \lambda\lambda' \frac{(b' - b)^2}{b'}. \quad a; \quad (\lambda + \lambda' = 1) \quad (0 < \lambda < 1)$$

a und a' sind die Längen der Seiten des einen Deck-Rechtecks, b und b' die Längen der resp. parallelen Seiten des andern.

4. Den Eiflächenschnitt $\mathfrak{A}$ zerlegen wir nun durch parallele Gerade $A_0, A_1, A_2 \dots A_n$ der Richtung q in Streifen, ebenso $\mathfrak{B}$ durch die Geraden $B_0, B_1 \dots B_n$, $\mathfrak{C}$ durch C_0 ,

$C_1 \dots C_n$; alle diese Geraden seien ebenfalls von der Richtung ϱ . A_0, B_0, C_0 speciell seien die Tangenten (angelehnten Geraden) der Richtung ϱ der Schnittovale auf der linken, A_n, B_n, C_n die desgleichen auf der rechten Seite, und die Geraden sollen von links nach rechts nach Angabe ihrer Indices aufeinander folgen. Der Inhalt eines Ovalstreifens zwischen zwei aufeinander folgenden Parallelgeraden werde durch die in runde Klammer gesetzten Buchstaben der Geraden ausgedrückt und es sei die Eintheilung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ so getroffen, dass

$$(A_\nu A_{\nu+1}) = (C_\nu C_{\nu+1}) \quad \nu = 0, 1 \dots n-1$$

B_ν sei die durch die Verbindungsebene von A_ν und C_ν in der Ebene von $\mathfrak{B}$ ausgeschnittene Gerade. Wir nennen die Streifen $(A_\nu A_{\nu+1})$, $(B_\nu B_{\nu+1})$, $(C_\nu C_{\nu+1})$ entsprechende. Im folgenden werden an Stelle der Streifen Rechtecke treten zwischen den nämlichen Parallelgeraden, welche wir durch die in eckige Klammer gesetzten Buchstaben der Geraden ausdrücken. Die auf den Geraden A, B, C liegenden Seiten dieser Rechtecke nennen wir die „Langseiten“; die andern, die „Schmalseiten“ gehen von den Endpunkten der Ovalechnen auf A_ν, B_ν, C_ν aus nach rechts. Beim Beweis vom Inhalt der Ovale ist vom Verfasser gezeigt, dass bei genügend enger Annahme der Geraden A die Summe der Rechtecke einer festen Grösse, dem Inhalte $\mathfrak{A}$, beliebig nahe kommt. Es fragt sich nun, ob sich die Theilung von $\mathfrak{A}$ so annehmen lässt, dass auch die davon abhängigen Theilungen von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ unseren Wünschen entsprechend eng genug werden, d. h. dass zu gleicher Zeit

$$\mathfrak{A} - \varepsilon < \sum_0^{n-1} [A_\nu A_{\nu+1}] < \mathfrak{A} + \varepsilon; \quad \mathfrak{C} - \varepsilon < \sum_0^{n-1} [C_\nu C_{\nu+1}] < \mathfrak{C} + \varepsilon$$

$$\mathfrak{B} - \varepsilon < \sum_0^{n-1} [B_\nu B_{\nu+1}] < \mathfrak{B} + \varepsilon$$

wird. In der That ist dies möglich und lässt sich beweisen auf Grund folgender Thatsachen:

- a) Wenn $\mathfrak{A}$ kein entartetes Oval ist, so sind auch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ eigentliche Ovale und es hat in ihnen jede von einer Tangente wenn auch noch so wenig entfernte parallele Sehne endliche Länge.
- b) Bei genügender Annäherung einer parallelen Sehne an eine Tangente wird der zwischen beiden enthaltene Ovalstreifen beliebig klein seinem Inhalte nach.
- c) Es ist möglich, durch genügende Annäherung von A_1 und A_0 die Entfernungen von A_0 und A_1 , C_0 und C_1 zu gleicher Zeit unter eine beliebig kleine Grösse herabzudrücken, zugleich auch die Entfernung von B_0 und B_1 , weil sie linear von jenen abhängt. Analoges gilt von A_{n-1} A_n , C_{n-1} C_n , B_{n-1} B_n .
- d) Die Breite eines Rechtecks mit noch so kurzer, constanter Langseite, das einem gegebenen flächengleich ist, wird beliebig klein, wenn nur das gegebene Rechteck genügend klein an Inhalt ist. (In Anwendung zu bringen für die mittleren Seiten.)

5. Wir beweisen weiterhin: Die Sehnen auf A_ν und C_ν sind längengleich.

Denn nehmen wir ein Mal an:

$$A_\mu - C_\mu = d_\mu; \quad d_\mu > 0.^1)$$

a_μ , c_μ seien die obern, α_μ , γ_μ die untern Endpunkte der resp. Sehnen A_μ , C_μ , und sei $0 < \mu < n$. Irgend ein rechts (oder links) von A_μ in endlicher Entfernung innerhalb $\mathfrak{A}$ gelegener Punkt heisse p , die von c_μ und γ_μ nach rechts (oder links) ziehenden Grenzstrahlen seien C'_μ und Γ'_μ . Man lege Ebene $\mathfrak{C}$ auf Ebene $\mathfrak{A}$, Gerade C_μ auf Gerade A_μ und zwar so, dass die Strecke $c_\mu \gamma_\mu$ ganz innerhalb der Strecke $a_\mu \alpha_\mu$ liegt,

1) A_μ , C_μ bezeichnen jetzt kurz die Sehnenlängen.

γ_μ zwischen c_μ und α_μ , so dass $\overline{a_\mu c_\mu}$, $\overline{\alpha_\mu \gamma_\mu}$ von Null verschieden sind. Dann müssen auch $\overline{c_\mu s}$ und $\overline{\gamma_\mu \sigma}$ endlich sein, wo s, σ die resp. zweiten Schnittpunkte von C_μ , Γ_μ mit dem Rande des Dreiecks $a_\mu p \alpha_\mu$ sind, welches sich innerhalb $\mathfrak{A}$ befindet. Es sei die Gerade $G \parallel C_\mu$ und

$$Ss = S\sigma = -SC_\mu; G,$$

dann liegen ersichtlich alle zwischen C_μ und G parallel zu C_μ gezogenen $\mathfrak{C}$ -Sehnen innerhalb $\mathfrak{A}$, sind also kleiner wie die entsprechenden $\mathfrak{A}$ -Sehnen und zwar wird der Unterschied entsprechender Sehnen in diesem Intervall über einer von den übrigen Daten der Figur abhängigen angebbaren endlichen Grenze $\mathcal{A}$ bleiben. Es ist erlaubt, die Theilung so eng anzunehmen, dass sowohl $A_{\mu+1}$, als $C_{\mu+1}$ in das Intervall $C_\mu G$ fallen.

Wir verdichten die Theilung der Streifen ($A_\mu A_{\mu+1}$) und ($C_\mu C_{\mu+1}$) durch Einschubung der Geraden

$$\begin{aligned} &A_{\mu,1}, A_{\mu,2} \dots A_{\mu,q} \\ &C_{\mu,1}, C_{\mu,2} \dots C_{\mu,q} \text{ u. der „entsprechenden“}^{1)} \\ &B_{\mu,1}, B_{\mu,2} \dots B_{\mu,q} \text{ in } \mathfrak{B} \text{ und setzen} \end{aligned}$$

$$A_{\mu,0} \equiv A_\mu; A_{\mu,q+1} \equiv A_{\mu+1}; C_{\mu,0} \equiv C_\mu \text{ etc.}$$

Die Entfernung von $A_{\mu,x}$ und $A_{\mu,x+1}$ kürzen wir durch $e_{\mu,x}$, welches somit die Länge einer Rechteckschmalseite ist. Nun ist

$$\begin{aligned} D_{\mu,x} &\equiv [B_{\mu,x}, B_{\mu,x+1}] - [A_{\mu,x}, A_{\mu,x+1}] \\ &= \lambda\lambda' \frac{(A_{\mu,x} - C_{\mu,x})^2}{C_{\mu,x}} \cdot e_{\mu,x} \end{aligned}$$

nach 3. Bedenkt man, dass $A_{\mu,x} - C_{\mu,x} > \mathcal{A}$, und setzt den grössten Werth unter den $C_{\mu,x}$ gleich C , so kommt:

$$D_{\mu,x} > \lambda\lambda' \frac{\mathcal{A}^2}{C} \cdot e_{\mu,x} \text{ und } \sum_{x=0}^{x=q} D_{\mu,x} > \lambda\lambda' \frac{\mathcal{A}^2}{C} \sum_{x=0}^{x=q} e_{\mu,x}$$

1) Die unter 4. festgesetzte Art der Abhängigkeit zwischen den Geraden, welche mittels der Buchstaben A, C, B bezeichnet werden, soll auch für die neuen Geraden gelten.

oder
$$\sum D_{\mu,x} > \lambda \lambda' \frac{A^2}{C}. e = K$$

wenn e die Entfernung von A_μ und $A_{\mu+1}$ bedeutet. Die rechts stehende Grösse K in der Ungleichung ist nun ganz unabhängig von dem Grad der Enge der Theilung zwischen A_μ und $A_{\mu+1}$.

Da weiter, nach dem Hilfsatz, die übrigen ausserhalb des bisher betrachteten Intervalls $(\mu, \mu + 1)$ gelegenen Rechtecke $[B_\nu B_{\nu+1}]$ niemals kleiner sind als die entsprechenden $[A_\nu A_{\nu+1}]$, so gilt für jede noch so weit getriebene Theilung, sobald die $A_{\mu x}$ schon vorliegen, und die Geraden wieder durchlaufend mit einem Index bezeichnet werden:

$$\Sigma [A_\nu A_{\nu+1}] + K < \Sigma [B_\nu B_{\nu+1}]$$

im Widerspruch zu der aus 4. folgenden Ungleichung:

$$\Sigma [B_\nu B_{\nu+1}] - \Sigma [A_\nu A_{\nu+1}] < 2\varepsilon$$

welche für beliebig klein gegebenes ε (also auch für $2\varepsilon < K$) gelten soll bei genügend enger Theilung.

Auf solchen Widerspruch führt uns die Annahme, A_μ und C_μ seien verschieden, also muss

$$A_\mu = C_\mu$$

sein. q. e. d.

Eine Ergänzung bedarf der Beweis für den Fall, dass μ gleich 0 oder n gesetzt wird. Dann und nur dann können C'_μ und Γ'_μ in die Richtung von C_μ selbst fallen. In diesem Falle bestimme man auf dem Ovalrande, doch nicht auf $\overline{c_\mu \gamma_\mu}$, zwei Punkte c' , γ' innerhalb von Kreisen, die mit Radius $\frac{\varepsilon}{2}$ um c_μ , γ_μ resp. geschlagen sind. ε sei jedenfalls kleiner als die endlichen Sehnen der von c_μ , γ_μ ausgehenden Näherungsbögen. Dann lege man $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ wie oben aufeinander und mache ε auch noch kleiner als die endlichen Entfernungen der Punkte c_μ , γ_μ von den Geraden $a_\mu p$, $\alpha_\mu p$ resp, wobei p wieder einen inneren Punkt von $\mathfrak{A}$ bedeutet.

$C_1 \parallel C_0$ werde so nahe an C_0 gerückt, dass beide kleinen Kreise um c_0, γ_0 geschnitten werden (resp. C_{n-1} so nahe an C_n etc.). Dann enden die Sehnen C_0 und C_1 , sowie alle dazwischen liegenden parallelen Sehnen von $\mathfrak{C}$ innerhalb der Kreise und sind kleiner als die entsprechenden Sehnen von $\mathfrak{A}$ (Analoges gilt bei C_n, C_{n-1}) um eine Differenz, welche über einer angebbaren endlichen Grösse bleibt. Von hier aus vollzieht sich der Beweis genau wie vorher.

Unser bisheriges Resultat können wir so formen:

Schneiden die parallelen Sehnen A_μ, C_μ von $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}$ resp. Stücke gleichen Inhalts ab, welche auf *einer* Seite der Ebene $A_\mu C_\mu$ liegen, so ist ihre Länge gleich.

Hieraus folgt weiter:

6. Die Entfernung von A_0 und A_μ ist gleich der von C_0 und C_μ .

Man findet nämlich, dass bei genügend enger Theilung die Inhalte und damit die Schmalseiten zweier entsprechenden Rechtecke sich nur noch um einen beliebig kleinen Bruchtheil ihrer Grösse unterscheiden. Daher wird sich auch die Summe der Schmalseiten der Rechtecke zwischen A_0 und A_μ von der entsprechenden Summe zwischen C_0 und C_μ bei genügend enger Theilung beliebig wenig unterscheiden, d. h. die beiden Summen müssen dann, weil constante Grössen, gleich sein.

7. Aus dem bisher Bewiesenen ergibt sich zwar noch nicht die Congruenz von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, aber doch so viel, dass $\mathfrak{C}$ aus $\mathfrak{A}$ durch eine Transformation hervorgeht, bei welcher die Sehnen der Richtung ϱ von $\mathfrak{C}$ in ihren Geraden ohne Aenderung der Länge verschoben werden. Die völlige Willkürlichkeit der Richtung ϱ zieht die Congruenz von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ indess nothwendig nach sich, wie wir sehen werden.

8. Die Entsprechung zwischen den Sehnen A_μ, C_μ zieht eine Entsprechung der Endpunkte a_μ, c_μ einer-, α_μ, γ_μ andrer-

seits nach sich. Bedenkt man noch, dass $\overline{a_0 a_0}$ und $\overline{c_0 \gamma_0}$, $\overline{a_n a_n}$ und $\overline{c_n \gamma_n}$ congruent sind, so erkennt man, wie die Ränder von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ für jede Richtung ϱ der $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ Punkt für Punkt aufeinander in bestimmter Weise beziehbar sind. Die geraden Strecken zwischen entsprechenden Randpunkten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ bilden ein Stück $\mathfrak{M}$ einer Regelfläche, welches ganz innerhalb oder höchstens auf der Fläche $\mathfrak{C}$ selbst liegt; es liegt also auch die Schnittfigur $\mathfrak{S}$ der Ebene von $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{M}$ völlig innerhalb $\mathfrak{B}$ oder reicht wenigstens nicht über dessen Rand hinaus.

Somit ist Inhalt von $\mathfrak{S}$ kleiner höchstens gleich $\mathfrak{B}$, letzteres nur, wenn $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{B}$ identisch sind. Zugleich ist aber nach 1. Inhalt von $\mathfrak{S}$ grösser höchstens gleich $\mathfrak{B}$.¹⁾ Inhalt $\mathfrak{S}$ kann daher nur gleich $\mathfrak{B}$, und $\mathfrak{S}$ muss mit $\mathfrak{B}$ identisch sein. Auf jeder erzeugenden Strecke von $\mathfrak{M}$ liegt daher ausser einem Punkte a_μ , resp. α_μ und einem Punkte c_μ , resp. γ_μ ein dritter Punkt b_μ , resp. β_μ der Fläche $\mathfrak{C}$, woraus folgt, dass diese Strecken vollständig auf $\mathfrak{C}$ liegen, $\mathfrak{M}$ ein Theil von $\mathfrak{C}$ ist.

9. Unser Beweis wird nun vollendet:

- a) Durch Verwendung der Maximalsehne bestimmter Richtung in den Ovalen;
- b) Durch Benutzung der Thatsache, dass gewisse Theile der Eifläche, resp. der Ovale, welche durch Abschneiden mittels Gerader und Ebenen entstehen, die nämlichen Eigenschaften haben müssen, wie die ganzen Ovalgebilde.

10. Hilfsatz. Die Sehnen $a_0 a_n$ und $c_0 c_n$ müssen parallel und gleichlang sein.

1) Denn die Annahme, dass zwischen zwei gleich grossen Parallelschnitten von $\mathfrak{C}$ ein kleinerer Parallelschnitt sich befinde, ist mit dem Vorhandensein nur eines Maximums unverträglich.

Aus 6. folgt:

Entfernung $(A_0 A_n) =$ Entfernung $(C_0 C_n)$

$$\overline{a_0 \alpha_0} = \overline{c_0 \gamma_0}$$

$$\overline{a_n \alpha_n} = \overline{c_n \gamma_n}$$

Maximalsehne d. Richt. $(a_0 \alpha_n)$ in $\mathfrak{A} =$ Max.-S. d. Richt. $(a_0 \alpha_n)$ in $\mathfrak{C}$

„ „ „ $(c_0 c_n)$ „ $\mathfrak{C} =$ „ „ „ $(c_0 c_n)$ „ $\mathfrak{A}$

Weiter:

Wenn eine Folge von Maximalsehnen der Richtung $a_0 \alpha_n$ in $\mathfrak{A}$ ein Parallelogramm bildet, so müssen die Maximalsehnen der nämlichen Richtung in $\mathfrak{C}$ ein congruentes Parallelogramm erfüllen, da hier wie dort Gerade von gleicher Länge zwischen parallelen angelehnten Geraden gleicher Entfernung eingespannt werden, also hier wie dort gleiche Neigung gegen letztere haben, und hier wie dort wegen 5. und 6. die erste von der letzten Maximalsehne den nämlichen Abstand hat. Analoges gilt bei Vertauschung der Rollen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$.

Wir dürfen ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit unserer Annahmen die Bezeichnungen so vertheilt voraussetzen, dass:

$$\overline{a_0 \alpha_0} \leq \overline{a_n \alpha_n} \quad \text{also auch} \quad \overline{c_0 \gamma_0} \leq \overline{c_n \gamma_n} \text{ ist.}$$

Man bringe nun durch Parallelverschiebung a_0 mit c_0 , α_0 mit γ_0 und dadurch A_n mit C_n zur Deckung. Würden hierauf a_n und c_n nicht aufeinanderfallen, sondern ein Punkt „unter“ den andern — z. B. c_n unter a_n — so würde entgegen erwiesener Thatsache ein Parallelogramm von Maximalsehnen des einen Ovals im andern kein congruentes Analogon finden können — z. B. das Parallelogramm mit den Ecken α_0, a_0, a_n kein Analogon in $\mathfrak{C}$ — folglich müssen nach der Parallelverschiebung auch a_n und c_n sich decken. Also ist $\overline{a_0 \alpha_n} = \overline{c_0 c_n}$. Der Beweis ist auch für den Fall gültig, dass in

den Ovalen nur eine einzige Maximalsehne der betrachteten Richtung existirt. Analoges wie für a_0, a_n, c_0, c_n gilt für $\alpha_0, \alpha_n, \gamma_0, \gamma_n$.

Zurück zum Beweise des Hauptsatzes! (s. Fig. 1 und 2)

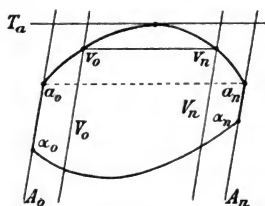


Fig. 1.

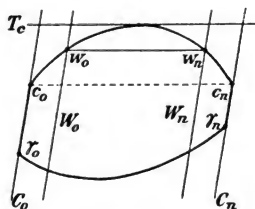


Fig. 2.

Die angelehnten Geraden von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, welche den Sehnen $a_0 a_n$ und $c_0 c_n$ parallel sind und deren Berührungspunkte zu den a und c , nicht zu den α und γ gehören, sollen resp. T_a und T_c heißen. Nach 6. ist die Entfernung von T_a und $\overline{a_0 a_n}$ gleich der von T_c und $\overline{c_0 c_n}$. Wir betrachten jetzt für die Ebene $\mathfrak{A}$ die Geraden A_0 und T_a , für $\mathfrak{C}$ die Geraden C_0 und T_c als Axen (X und Y resp.) cartesischer Coordinatensysteme und nennen Punkte und Figuren in beiden Ebenen entsprechend, wenn sie die nämlichen Grössen zu resp. Coordinaten haben.

Es werde nun in $\mathfrak{A}$ zu A_0 irgend eine parallele Sehne V_0 gezogen, in $\mathfrak{C}$ die entsprechende W_0 . Die zu den a gehörigen Endpunkte mögen resp. v_0, w_0 heißen. Von v_0 ziehe man dann eine Sehne parallel T_a , deren anderer Endpunkt v_n heisse und durch diesen wieder eine Sehne V_n parallel V_0 . In $\mathfrak{C}$ ziehe man zu V_n die entsprechende Sehne W_n , deren zu den c gehöriger Endpunkt w_n heisse.

Der zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ liegende Theil der „vollen“ Eifläche $\mathfrak{E}$ ist seitlich durch ein Regelflächenstück $\mathfrak{M}$ begrenzt und bildet selber eine volle Eifläche $\mathfrak{F}$. Die Ebenen ($V_0 W_0$)

und $(V_n W_n)$ schneiden von $\mathfrak{F}$ gewisse Theile ab, ebenso von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, aber das übrigbleibende ist wieder eine Eifläche $\mathfrak{G}$ mit Deckovalen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{U}$; der Mittelschnitt $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{F}$ wird zu einem Mittelschnitt $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{G}$ zugestutzt, der ebenfalls ein Oval ist und den nämlichen Inhalt erhält wie die gleichen Ovale $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{U}$. Folgt alles aus den vorhergehenden Sätzen. Wir können daher auf $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$ die nämlichen Schlüsse anwenden wie auf $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, erhalten also durch Anwendung unseres letzten Hilfsatzes: $\overline{v_0 v_n}$ ist gleich und parallel zu $\overline{w_0 w_n}$. Ausserdem ist nach 6.

$$\begin{aligned} \text{Entf. } (T_a, \overline{v_0 v_n}) &= \text{Entf. } (T_c, \overline{w_0 w_n}) \text{ und nach-} \\ \text{dem schon Entf. } (V_0 A_0) &= \text{Entf. } (W_0 C_0) \\ \text{Entf. } (V_n A_0) &= \text{Entf. } (W_n C_0) \end{aligned}$$

ist, so erkennt man leicht, dass v_0 und w_0 , v_n und w_n für beide Coordinatensysteme entsprechende Punkte sind. V_0 und v_0 waren aber ganz beliebig, und was auf Seite der α gilt, gilt analog auf Seite der α , daher stellen sich die Ovale $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ als entsprechende Figuren beider Coordinatensysteme und als congruent heraus. q. e. d.

Im Austausch gegen meinen Beweis hat mir Herr Professor Minkowski einen analytischen Beweis des nämlichen Satzes mitgetheilt, der sich auch auf Gebilde von mehr als drei Dimensionen erstreckt.