

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XVI. Jahrgang 1886.



München.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

1887.

In Commission bei G. Franz.

Herr Gustav Bauer macht eine Mittheilung:

„Ueber die Berechnung der Discriminante einer binären Form.“

Die Discriminante der binären Form

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \dots + a_n y^n \quad 1)$$

ist bekanntlich von der Form

$$a_1^2 V + a_n U, \dots$$

wo V die Discriminante der Form $(n-1)^{\text{ten}}$ Grads

$$a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} y + \dots \quad 2)$$

Nach Potenzen von a_0 entwickelt, ist mithin die Discriminante der Form 1), welche mit D bezeichnet sein mag,

$$D = a_1^2 V + a_0 \alpha + a_1^2 \beta + a_2^2 \gamma + \dots \quad 3)$$

wo $\alpha, \beta, \gamma \dots$ den Coefficienten a_0 nicht enthalten. Da nun D der Gleichung

$$\left(a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + 2 a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \dots \right) D = 0$$

genügt, oder

$$\begin{aligned} 0 = & a_1 \alpha + 4 a_1 a_2 V + a_1^2 \left(2 a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \dots \right) V \\ & + a_0 \left\{ 2 a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \dots \right\} \alpha + 2 a_0 a_1 \beta \\ & + a_0^2 \left\{ 2 a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \dots \right\} \beta + 3 a_0^2 a_1 \gamma \\ & + \dots \end{aligned} \quad 4)$$

und in derselben die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von a_0 für sich verschwinden müssen, so erhält man hiedurch eine Reihe von Relationen zur Bestimmung von α, β, γ u. s. f. Man kann also auf diese Weise die Discriminante D einer binären Form n^{ten} Grads aus der Discriminante V einer Form $n - 1^{\text{ten}}$ Grads berechnen.

Cayley, der zuerst diese Bemerkung gemacht hat,¹⁾ geht nicht weiter auf diese Methode der Berechnung der Discriminante ein und, da diess meines Wissens auch sonst nicht geschehen,²⁾ so schien es mir doch der Mühe werth dieselbe näher zu betrachten.

Nun ergibt sich aus 4) sofort für α der Werth

$$\alpha = -4a_1V - a_1 \left(2a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \dots \right) V$$

oder, da V der Gleichung

$$\left(a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_3 \frac{\partial}{\partial a_2} + \dots \right) V = 0$$

genügt,

$$\alpha = -4a_1V + a_1 \left(a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_3 \frac{\partial}{\partial a_2} + \dots \right) V$$

Dieser Ausdruck für α , obwohl der einfachere, würde jedoch das Gesetz der Entwicklung 3) nicht hervortreten lassen. Dieses ergibt sich jedoch sofort, wenn wir die Gleichung, welche α bestimmt, in der Form schreiben

$$a_1 \alpha = - \left(2a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \dots \right) (a_1^2 V).$$

1) Recherches sur les Covariants Crelle J. 46, S. 124.

2) In Salmon-Fiedler's „Algebra der linearen Transformationen“. 2. Aufl., S. 129, wo dieser Methode von Cayley Erwähnung geschieht, wird eben nur noch der Werth von α bestimmt.

Setzen wir die Operation

$$\left. \begin{aligned} 2a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + 3a_3 \frac{\partial}{\partial a_2} + \dots = \delta \\ \text{und} \\ \frac{1}{a_1} \delta = \mathcal{A}, \end{aligned} \right\} 5)$$

so folgt aus Gleichung 4)

$$\alpha = -\mathcal{A}(a_1^2 V), \quad \beta = -\frac{1}{2} \mathcal{A} \alpha, \quad \gamma = -\frac{1}{3} \mathcal{A} \beta, \text{ u. s. f.}$$

und man hat mithin die Entwicklung

$$D = a_1^2 V - a_2 \mathcal{A}(a_1^2 V) + \frac{a_2^2}{1 \cdot 2} \mathcal{A}^2(a_1^2 V) - \frac{a_2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \mathcal{A}^3(a_1^2 V) + \dots, \quad 6)$$

wo unter $\mathcal{A}$ nicht allenfalls die symbolische i^{te} Potenz der Operationsformel $\mathcal{A}$ zu verstehen ist, sondern die i malige Wiederholung der Operation $\mathcal{A}$, wenn die Coefficienten der Operationsformel auch der Differentiation unterworfen werden. Da das Glied mit der höchsten Potenz von a_2 in D $a_2^{n-1} a_1^{n-1}$ ist, so ist die obige Reihe bis zur Potenz a_2^{n-1} fortzusetzen, wobei sich $\mathcal{A}^{n-1}(a_1^2 V)$ auf $C \cdot a_1^{n-1}$ reducirt. Dann bricht die Reihe von selbst ab. Die Glieder, welche a_1 im Nenner behalten, sind sofort wegzulassen, und müssen sich aufheben.

Die Formel 6) lässt sich umändern, indem man setzt

$$\mathcal{A}(a_1^2 V) = V \cdot \mathcal{A} a_1^2 + a_1^2 \cdot \mathcal{A} V$$

$$\mathcal{A}^2(a_1^2 V) = V \cdot \mathcal{A}^2 a_1^2 + 2 \mathcal{A} a_1^2 \cdot \mathcal{A} V + a_1^2 \mathcal{A}^2 V \text{ u. s. f.}$$

Dann wird dieselbe

$$D = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{a_2^r}{1 \cdot 2 \dots r}$$

$$\left\{ V \cdot \mathcal{A}^r a_1^2 + r \mathcal{A}^r V \cdot \mathcal{A}^{r-1} a_1^2 + (i) \mathcal{A}^i V \cdot \mathcal{A}^{r-i} a_1^2 + \dots + a_1^2 \mathcal{A}^r V \right\}$$

Fasst man in dieser Reihe die Glieder mit dem Faktor $\mathcal{A}^r V$ zusammen, so ergibt sich nach einfacher Reduktion für den Coefficienten desselben

$$(-1)^i \frac{a_2^i}{1 \cdot 2 \dots i}$$

$$\left\{ a_1^2 - a_2 \mathcal{A} a_1^2 + \frac{a_2^2}{1 \cdot 2} \mathcal{A}^2 a_1^2 + \dots + (-1)^{n-1-i} \frac{a_2^{n-1-i}}{1 \cdot 2 \dots (n-1-i)} \mathcal{A}^{n-1-i} a_1^2 \right\}$$

Man sieht, dass die Reihe, welche dieser Coefficient enthält, für alle i dasselbe Gesetz befolgt und nur die Gliederzahl derselben mit dem Wachsen von i abnimmt, so dass sie sich in dem Coefficient von $\mathcal{A}^{n-1}$ auf das 1. Glied a_1^i reducirt. Wenn wir daher für alle Werthe von i den Coefficienten von $\mathcal{A}^i V$, wie bei $i=0$, bis zu dem Gliede $\mathcal{A}^{n-1} a_1^i$ ausdehnen, so erhalten wir alle Glieder von D , aber ausserdem noch weitere Glieder, die jedoch sämmtlich Potenzen von a_1 im Nenner haben. Wir können daher setzen

$$D = \left\{ V - a_0 \mathcal{A} V + \frac{a_0^2}{1 \cdot 2} \mathcal{A}^2 V - \dots \right\} \\ \times \left\{ a_1^2 - a_0 \mathcal{A} a_1^2 + \frac{a_0^2}{1 \cdot 2} \mathcal{A}^2 a_1^2 - \dots \right\} \quad 7)$$

vorausgesetzt, dass wir in dem Produkt nur die ganze Funktion beibehalten, d. h. alle Glieder weglassen, bei welchen a_1 im Nenner bleibt. In beiden Faktoren sind die Glieder bis zu $\mathcal{A}^{n-1}$ zu berücksichtigen; bei der Berechnung des 1. Faktors können sogleich alle Glieder weggeworfen werden, welche a_1^2 oder eine höhere Potenz von a_1 im Nenner haben, während im zweiten Faktor noch die Glieder mit a_1^{n-2} zu berücksichtigen sind, da V diese Potenz von a_1 als höchste Potenz enthält.

Setzen wir um abzukürzen

$$V - a_0 \mathcal{A} V + \frac{a_0^2}{1 \cdot 2} \mathcal{A}^2 V - \dots = ((V))$$

so ist, wie wir sehen, $((a_1^2 V)) = ((V)) \cdot ((a_1^2))$, wenn wir nur die ganze Funktion berücksichtigen. Diess hängt jedoch keineswegs von der Natur der Funktionen a_1^2 und V ab, sondern es gilt ebenso, wenn p und q zwei beliebige ganze Funktionen der a sind, $((pq)) = ((p)) \cdot ((q))$. Man würde daher auch D erhalten, wenn man in $a_1^2 V$ die Operation $(())$ auf jeden einzelnen Buchstaben anwenden und sodann nur

die ganze Funktion beibehalten würde, ein Verfahren, das natürlich zur Berechnung von D unbrauchbar wäre. Doch lässt sich mittelst dieser Eigenschaft der Operation (()) eine Vereinfachung erzielen.

Fassen wir in V die Glieder nach den Potenzen von a_1 zusammen und setzen

$$V = W_0 + W_1 a_1 + W_2 a_1^2 + \dots + W_{n-1} a_1^{n-1} \quad 8)$$

so stellt sich D in der Form dar

$$D = ((W_0)) ((a_1^2)) + ((W_1)) ((a_1^3)) + ((W_2)) ((a_1^4)) + \dots$$

Da aber die W a_1 nicht enthalten, so haben wir in den Faktoren $((a_1^i))$, nur die ganze Funktion beizubehalten. Bezeichnen wir dieselbe durch $[a_1^i]$, so wird mithin

$$D = ((W_0)) [a_1^2] + ((W_1)) [a_1^3] + \dots + ((W_{n-1})) [a_1^n] \quad 9)$$

In den $((W))$ sind noch die Faktoren $\frac{1}{a_1}$ enthalten, welche nur die Faktoren $[a_1^i]$ afficiren. Um nun aus 9) die ganze Funktion für D zu erhalten, bemerke man, dass $\Delta W = \frac{1}{a_1} \delta W$ (5), also sind die $\Delta W, \Delta^2 W, \dots$ von der Form

$$\Delta W = \Delta \frac{1}{a_1} \cdot \delta W + \frac{1}{a_1^2} \delta^2 W = \alpha_1 \cdot \delta W + \frac{1}{a_1^2} \delta^2 W$$

$$\Delta^2 W = \beta_1 \delta W + \alpha_2 \delta^2 W + \frac{1}{a_1^3} \delta^3 W$$

$$\Delta^3 W = \gamma_1 \delta W + \beta_2 \delta^2 W + \alpha_3 \delta^3 W + \frac{1}{a_1^4} \delta^4 W$$

.

Hier sind die Coefficienten der δW

$$\alpha_1 = \Delta \frac{1}{a_1}, \quad \beta_1 = \Delta^2 \frac{1}{a_1}, \quad \gamma_1 = \Delta^3 \frac{1}{a_1}, \quad \dots \quad 10)$$

also

$$\alpha_1 = -2 \frac{a_2}{a_1^3}, \quad \beta_1 = 2 \cdot 3 \left(-\frac{a_2}{a_1^4} + \frac{2a_2^2}{a_1^5} \right), \quad \text{u. s. f.}$$

Man sieht, dass die Reihe, welche dieser Coefficient enthält, für alle i dasselbe Gesetz befolgt und nur die Gliederzahl derselben mit dem Wachsen von i abnimmt, so dass sie sich in dem Coefficient von $\mathcal{A}^{n-1}$ auf das 1. Glied a_1^2 reducirt. Wenn wir daher für alle Werthe von i den Coefficienten von $\mathcal{A}^i V$, wie bei $i=0$, bis zu dem Gliede $\mathcal{A}^{n-1} a_1^2$ ausdehnen, so erhalten wir alle Glieder von D , aber ausserdem noch weitere Glieder, die jedoch sämmtlich Potenzen von a_1 im Nenner haben. Wir können daher setzen

$$D = \left\{ V - a_0 \mathcal{A} V + \frac{a_0^2}{1 \cdot 2} \mathcal{A}^2 V - \dots \right\} \\ \times \left\{ a_1^2 - a_0 \mathcal{A} a_1^2 + \frac{a_0^2}{1 \cdot 2} \mathcal{A}^2 a_1^2 - \dots \right\} \quad 7)$$

vorausgesetzt, dass wir in dem Produkt nur die ganze Funktion beibehalten, d. h. alle Glieder weglassen, bei welchen a_1 im Nenner bleibt. In beiden Faktoren sind die Glieder bis zu $\mathcal{A}^{n-1}$ zu berücksichtigen; bei der Berechnung des 1. Faktors können sogleich alle Glieder weggeworfen werden, welche a_1^2 oder eine höhere Potenz von a_1 im Nenner haben, während im zweiten Faktor noch die Glieder mit a_1^{2-1} zu berücksichtigen sind, da V diese Potenz von a_1 als höchste Potenz enthält.

Setzen wir um abzukürzen

$$V - a_0 \mathcal{A} V + \frac{a_0^2}{1 \cdot 2} \mathcal{A}^2 V - \dots = ((V))$$

so ist, wie wir sehen, $((a_1^2 V)) = ((V)) \cdot ((a_1^2))$, wenn wir nur die ganze Funktion berücksichtigen. Diess hängt jedoch keineswegs von der Natur der Funktionen a_1^2 und V ab, sondern es gilt ebenso, wenn p und q zwei beliebige ganze Funktionen der a sind, $((pq)) = ((p)) \cdot ((q))$. Man würde daher auch D erhalten, wenn man in $a_1^2 V$ die Operation $(())$ auf jeden einzelnen Buchstaben anwenden und sodann nur

die ganze Funktion beibehalten würde, ein Verfahren, das natürlich zur Berechnung von D unbrauchbar wäre. Doch lässt sich mittelst dieser Eigenschaft der Operation $(())$ eine Vereinfachung erzielen.

Fassen wir in V die Glieder nach den Potenzen von a_1 zusammen und setzen

$$V = W_0 + W_1 a_1 + W_2 a_1^2 + \dots + W_{n-1} a_1^{n-1} \quad 8)$$

so stellt sich D in der Form dar

$$D = ((W_0)) ((a_1^2)) + ((W_1)) ((a_1^3)) + ((W_2)) ((a_1^4)) + \dots$$

Da aber die W a_1 nicht enthalten, so haben wir in den Faktoren $((a_1^i))$, nur die ganze Funktion beizubehalten. Bezeichnen wir dieselbe durch $[a_1^i]$, so wird mithin

$$D = ((W_0)) [a_1^2] + ((W_1)) [a_1^3] + \dots + ((W_{n-1})) [a_1^n] \quad 9)$$

In den $((W))$ sind noch die Faktoren $\frac{1}{a_1}$ enthalten, welche nur die Faktoren $[a_1^i]$ afficiren. Um nun aus 9) die ganze Funktion für D zu erhalten, bemerke man, dass $\mathcal{A}W = \frac{1}{a_1} \delta W$ (5), also sind die $\mathcal{A}^2 W, \mathcal{A}^3 W, \dots$ von der Form

$$\mathcal{A}^2 W = \mathcal{A} \frac{1}{a_1} \cdot \delta W + \frac{1}{a_1^2} \delta^2 W = \alpha_1 \cdot \delta W + \frac{1}{a_1^2} \delta^2 W$$

$$\mathcal{A}^3 W = \beta_1 \delta W + \alpha_1 \delta^2 W + \frac{1}{a_1^3} \delta^3 W$$

$$\mathcal{A}^4 W = \gamma_1 \delta W + \beta_1 \delta^2 W + \alpha_1 \delta^3 W + \frac{1}{a_1^4} \delta^4 W$$

.

Hier sind die Coefficienten der δW

$$\alpha_1 = \mathcal{A} \frac{1}{a_1}, \quad \beta_1 = \mathcal{A}^2 \frac{1}{a_1}, \quad \gamma_1 = \mathcal{A}^3 \frac{1}{a_1}, \quad \dots \quad 10)$$

also

$$\alpha_1 = -2 \frac{a_2}{a_1^3}, \quad \beta_1 = 2 \cdot 3 \left(-\frac{a_2}{a_1^4} + \frac{2a_2^2}{a_1^5} \right), \text{ u. s. f.}$$

und die $\alpha, \beta, \dots$ mit höherem Index sind, wie sich sogleich ergibt, durch die Relationen bestimmt

$$\begin{aligned}\alpha_{i+1} &= \frac{1}{a_1} \alpha_i + \mathcal{A} \frac{1}{a_1^{i-1}} = -i(i-1) \frac{a_2}{a_1^{i+1}} \\ \beta_{i+1} &= \frac{1}{a_1} \beta_i + \mathcal{A} \alpha_i \\ \gamma_{i+1} &= \frac{1}{a_1} \gamma_i + \mathcal{A} \beta_i \\ &\dots\end{aligned}\tag{11}$$

Man ersieht, dass die $\alpha, \beta, \gamma \dots$ nur Glieder enthalten mit Potenzen von a_1 im Nenner, und dass der Index dieser Grössen die niedrigste Potenz anzeigt, in welcher a_1 im Nenner vorkommt.

Es wird dann

$$D = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ W_1[a_1^{i+2}] - a_0 \delta W_1[a_1^{i+2}]_1 + a_0^2 \frac{\delta^2 W_1}{1 \cdot 2} [a_1^{i+2}]_2 - \dots \right\}, \tag{12}$$

wo $[a_1^{i+2}]_r$ die ganze Funktion ist enthalten in

$$[a_1^{i+2}] \cdot \left(\frac{1}{a_1^i} - \frac{a_0 \alpha_{r+2}}{r+1} + \frac{a_0^2 \beta_{r+3}}{(r+1)(r+2)} - \dots \right)$$

Da $[a_1^i] = a_1^i - 2i a_0 a_1^{i-2} a_2 + \dots$ ist, so sind bei Berechnung von $[a_1^{i+2}]_r$ nur diejenigen Glieder zu berücksichtigen, in welchen der Index von $\alpha, \beta, \dots$ $i+2$ nicht übersteigt; insbesondere reducirt sich $[a_1^{i+2}]_{i+2}$ auf $[a_1^{i+2}] \frac{1}{a_1^{i+2}} = 1$ und $[a_1^{i+2}]_{i+1}$ auf $[a_1^{i+2}] \frac{1}{a_1^{i+1}} = a_1$.

Im Folgenden sind die Werthe von $[a_1^i]$ und die Formel für D ausgerechnet, so weit als nöthig um noch die Discriminante einer Form 8^{ten} Grads darstellen zu können.

Es ist

$$[a_1^2] = a_1^2 - 4 a_0 a_2$$

$$[a_1^3] = a_1^3 - 6 a_0 a_1 a_2 + 9 a_0^2 a_3$$

$$[a_1^4] = a_1^4 - 8 a_0 a_1^2 a_2 + a_0^2 (12 a_1 a_2 + 16 a_2^2) - 16 a_0^2 a_4$$

$$[a_1^5] = a_1^5 - 10 a_0 a_1^3 a_2 + a_0^2 (15 a_1^2 a_2 + 30 a_1 a_2^2) - a_0^3 (20 a_1 a_4 + 80 a_2 a_3) + 25 a_0^3 a_5$$

$$[a_1^6] = a_1^6 - 12 a_0 a_1^4 a_2 + a_0^2 (18 a_1^2 a_2 + 48 a_1^2 a_2^2) - a_0^3 (24 a_1^2 a_4 + 132 a_1 a_2 a_3 + 64 a_2^3) + a_0^4 (30 a_1 a_5 + 156 a_2 a_4 + 99 a_2^2) - 36 a_0^4 a_6$$

$$[a_1^7] = a_1^7 - 14 a_0 a_1^5 a_2 + a_0^2 (21 a_1^3 a_2 + 70 a_1^3 a_2^2) - a_0^3 (28 a_1^3 a_4 + 7 \cdot 28 a_1^2 a_2 a_3 + 140 a_1 a_2^2) + 7 a_0^4 (5 a_1^2 a_5 + 34 a_1 a_2 a_4 + 21 a_1 a_2^2 + 73 a_2^3 a_3) - 7 a_0^5 (6 a_1 a_5 + 38 a_2 a_4 + 54 a_2 a_3) + 49 a_0^5 a_7$$

$$[a_1^8] = a_1^8 - 16 a_0 a_1^6 a_2 + a_0^2 (24 a_1^4 a_2 + 96 a_1^4 a_2^2) - a_0^3 (32 a_1^4 a_4 + 8 \cdot 34 a_1^3 a_2 a_3 + 8 \cdot 32 a_1^3 a_2^2) + a_0^4 (8 \cdot 5 a_1^2 a_5 + 8 \cdot 42 a_1^2 a_2 a_4 + 4 \cdot 51 a_1^2 a_2^2 + 8 \cdot 123 a_1 a_2^2 a_3 + 8 \cdot 32 a_2^3) - 8 a_0^5 (6 a_1^2 a_5 + 48 a_1 a_2 a_4 + 66 a_1 a_2 a_3 + 132 a_2^2 a_4 + 168 a_2 a_3^2) + 8 a_0^6 (7 a_1 a_7 + 52 a_2 a_5 + 79 a_2 a_4 + 44 a_2^2) - 64 a_0^6 a_8$$

u. s. f.

Das Gesetz, nach welchem diese Grössen gebildet sind, wird bei den höhern Potenzen sehr complicirt, was auch nach ihrer Erzeugungsweise kaum anders zu erwarten stand. Mittelst dieser Grössen und den aus den Gleichungen 10) und 11) sich ergebenden Werthen α, β, γ .. ergibt sich sodann folgender Ausdruck für D.

$$\begin{aligned} D = & W_0 [a_1^2] - a_0 a_1 \delta W_0 + a_0^2 \frac{\delta^2 W_0}{1 \cdot 2} \\ & + W_1 [a_1^3] - a_0 (a_1^3 - 5 a_0 a_2) \delta W_1 + a_0^2 a_1 \frac{\delta^2 W_1}{1 \cdot 2} - a_0^3 \frac{\delta^3 W_1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ & + W_2 [a_1^4] - a_0 (a_1^4 - 7 a_0 a_1 a_2 + 11 a_0^2 a_3) \delta W_2 + a_0^2 (a_1^4 - 6 a_0 a_2) \frac{\delta^2 W_2}{1 \cdot 2} \\ & - a_0^3 a_1 \frac{\delta^3 W_2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + a_0^4 \frac{\delta^4 W_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \end{aligned}$$

Da die W den Coefficienten a_1 nicht enthalten, so reducirt sich die Operation δW auf

$$\left(3a_3 \frac{\partial}{\partial a_2} + 4a_4 \frac{\partial}{\partial a_3} + \dots \right) W$$

und sind die wiederholten Operationen $\delta^2 W, \delta^3 W, \dots$ in dem Sinne aufzufassen, wie bei Formel 6) angegeben ist.

Ist dann V die Discriminante von $a_1 x^{n-1} + \dots$ und werden die entsprechenden Werthe von $W_0, W_1, \dots$ in den obigen Ausdruck für D eingesetzt, so gibt derselbe die Discriminante von $a_0 x^n + \dots$. Da das höchste Glied von V nach Potenzen von a_1 geordnet $(n-1)^{n-1} a_1^{n-1} a_2^{n-2}$ ist, so ist das letzte W $W_{n-1} = (n-1)^{n-1} a_2^{n-2}$ und mithin $\delta W_{n-1} = 0$. Es ist mithin $W_{n-1}[a_1^2]$ das letzte Glied des Ausdruckes für D und bricht derselbe dann von selbst ab. Die sämtlichen ausgerechneten Glieder kommen mithin erst bei der Berechnung der Discriminante einer binären Form 8. Grades vor und reichen dazu aus. Für Formen höhern Grads ändert sich nichts an diesen Gliedern (ausser den Werthen von W); es kommen nur neue Glieder hinzu; die Formel setzt sich fort, was durch die Punkte angedeutet ist.