Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XVII. Jahrgang 1887.

München.
Verlag der K. Akademie.
1888.

Commission bei G. Franz.

Sitzung vom 7. Mai 1887.

1. Herr E. Lommel hielt einen Vortrag über „die Photometrie der diffusen Zurückwerfung".

2. Herr Karl Haushofer theilte Beobachtungen „über die mikroscopischen Formen des Germaniumsulfides und des Germaniumoxydes" mit.

3. Herr Franz Hessler liest eine Studie: „allgemeine Uebersicht der Heilkunde der alten Inder".

4. Herr K. A. v. Zittel legt eine Abhandlung des Herrn Otto Reis „über Belonostomus, Aspidorhynchus und ihre Beziehungen zum lebenden Lepidosteus" vor.

Die Photometrie der diffusen Zurückwerfung.

Von E. Lommel.

(Eingelaufen 7. Mai.)

In einer früheren Abhandlung „über Fluorescenz"[1]) habe ich in einem „über die Grundsätze der Photometrie" überschriebenen Abschnitt gezeigt, dass in der theoretischen Photometrie nicht, wie bis dahin üblich war, die Flächenelemente einer leuchtenden Oberfläche, sondern die Volumenelemente des leuchtenden Körpers als lichtstrahlend zu betrachten seien. Demgemäss wurden der theoretischen Behandlung photometrischer Probleme die folgenden drei Sätze zu Grunde gelegt:

1) Lommel, Wied. Ann. X. 449—472; 631—654. 1880.

I. Die von einem Volumenelement nach einem andern strahlende Lichtmenge ist dem Quadrate ihrer Entfernung umgekehrt proportional.

II. Die von einem Volumenelement ausstrahlende und auf ein Flächenelement fallende Lichtmenge ist dem Cosinus des Incidenzwinkels proportional.

III. Das von einem Volumenelement ausstrahlende Licht wird auf seinem Wege innerhalb des strahlenden Körpers nach Massgabe des Absorptionsgesetzes geschwächt.

Der Lambert'sche Satz vom Cosinus des Emanationswinkels war hiedurch aus der Reihe der photometrischen Grundsätze ausgeschieden, und an seine Stelle der vorstehende Satz III gesetzt worden. Das Cosinusgesetz ergab sich vielmehr jetzt als Folgerung aus den obigen Grundsätzen, jedoch nur für undurchsichtige glühende Körper; für Selbstleuchter, die für Licht durchlässig sind, wie z. B. Flammen, gilt das Cosinusgesetz nicht.

In der citirten Arbeit wurde auf der Grundlage obiger Sätze nur das Verhalten selbstleuchtender (glühender und fluorescirender) Körper in Betracht gezogen, dagegen das ungleich schwierigere Problem der mit erborgtem Lichte durch diffuse Reflexion leuchtenden Körper, als mit dem Thema jener Abhandlung nicht in unmittelbarem Zusammenhang stehend, unberührt gelassen.

Auch bei den zerstreut reflectirenden Substanzen war seit Lambert für das von ihnen zurückgestrahlte Licht das Cosinusgesetz angenommen worden. Dasselbe liess sich jedoch weder theoretisch begründen, noch zeigte es sich mit den Beobachtungen in befriedigendem Einklang. Auf diese namentlich auch für die Photometrie der Planeten bedeutungsvolle Sachlage hat neuerdings Seeliger[1]) mit Nach-

1) Seeliger, Vierteljahrsschr. der astronom. Gesellsch. Bd. 20, p. 267; Bd. 21, p. 216.

druck hingewiesen, und insbesondere an einer Reihe Beobachtungen gezeigt, dass von einer experimentellen Bestätigung des Lambert'schen Cosinusgesetzes für zerstreut reflectirende Körper nicht die Rede sein kann. Durch diese Arbeiten Seeliger's angeregt, habe ich die vorliegende bereits 1880 begonnene Arbeit wieder aufgenommen, welche sich die Aufgabe stellt, das Verhalten diffus reflectirender Körper aus den obigen Grundsätzen der Photometrie zu entwickeln.

1. Wenn durch die Fläche $d\omega$ des Volumenelementes $d\omega\, d\varrho = dv$ eines beleuchteten das Licht diffus zurückwerfenden Körpers die Lichtmenge $d\omega$ (d. i. auf die Flächeneinheit die Einheit der Lichtmenge) senkrecht eindringt, so sei:

$$l\, d\omega\, d\varrho$$

die Lichtmenge, welche von dem Volumenelement nach allen Richtungen hin zerstreut wird. Die Grösse l nennen wir das Diffusionsvermögen des Körpers. Dasselbe ist unabhängig von der Farbe des einfallenden Lichts, und wird nur bedingt von dem Grade der Trübung, Pulverisirung, Zerstäubung, Schaumbläschenbildung, Rissigkeit u. s. w. des zerstreuenden Körpers; für einen vollkommen klaren (limpiden) Körper ist das Diffusionsvermögen $l = o$.

2. Da das Lichtbündel von der Intensität $d\omega$, indem es die Strecke $d\varrho$ durchläuft, die nach allen Seiten hin zerstreute Lichtmenge $l\, d\omega\, d\varrho$ einbüsst, so erleidet es durch die Diffusion eine Schwächung, die nach demselben Gesetze erfolgt, wie diejenige durch Absorption.

3. Gleichzeitig wird es aber noch geschwächt durch eigentliche Absorption, sowohl beim Durchgang durch die diffundirenden Körpertheilchen selbst, als auch beim Durchgang durch das klar durchsichtige Zwischenmittel, welches die Zwischenräume zwischen jenen Theilchen erfüllt. Durch diese Absorption verliert es noch die Lichtmenge:

$$k\, d\omega\, d\varrho,$$

wo das Absorptionsvermögen k eine Function der Wellenlänge ist, da ja Körpertheilchen und Zwischenmittel „gefärbt" sein können.

4. Die bisher gemachte Annahme, dass das Volumenelement ein gerades Prisma mit zur Richtung des einfallenden Lichtbündels parallelen Seitenkanten sei, ist durchaus nicht nothwendig. Das Volumenelement kann nämlich, welche Gestalt es auch haben mag, parallel zu den einfallenden Lichtstrahlen in schmale gerade Prismen zerlegt gedacht werden, deren jedes in der angegebenen Weise auf das durchgehende Licht einwirkt. Durch ein beliebig gestaltetes Volumenelement werden daher einem Lichtbündel, das für die Einheit des Querschnitts die Einheit der Lichtmenge mit sich führt, durch Absorption und Diffusion die Lichtmengen:

$$k\,dv \quad \text{und} \quad l\,dv$$

entzogen.

5. Die Lichtmenge $l\,dv$ wird von dem Volumenelement nach allen Richtungen ringsum ausgestrahlt. Nehmen wir an, dass die Strahlung nach allen Richtungen hin gleichmässig erfolge, so wird die Oberfläche 4π einer Kugel, welche mit dem Radius 1 um das Volumenelement beschrieben gedacht wird, von der Lichtmenge $l\,dv$ gleichmässig erleuchtet. Die Lichtmenge, welche das Element dv nach einer beliebigen Richtung pro Flächeneinheit dieser Kugel aussendet, beträgt daher:

$$\frac{l}{4\pi}\,dv.$$

6. Wir bestimmen nun die Lichtmenge, welche eine unendlich dünne lichtstrahlende planparallele Schicht, deren Leuchtkraft für die Einheit des Volumens F beträgt, nach einem Volumenelement dv sendet, welches ebenso wie jene Schicht selbst in ein Mittel, dessen Absorptionsvermögen k und dessen Diffusionsvermögen l ist, eingebettet liegt. Ist

ϱ der Abstand der Schicht von dem Elemente dv, $d\varrho$ ihre Dicke, und theilen wir sie durch eine Schaar gerader Kreiskegel, die dv als gemeinschaftliche Spitze und ϱ als gemeinschaftliche Axe haben, in schmale Elementarringe, so ist, wenn α den halben Oeffnungswinkel eines beliebigen dieser Kegel bezeichnet, der Rauminhalt eines solchen Ringes:

$$2\pi\varrho^2 \operatorname{tang}\alpha \sec^2\alpha \, d\alpha \, d\varrho.$$

Dieser Ring sendet nach dem Volumenelemente dv, welches von allen seinen Punkten die Entfernung $\varrho \sec\alpha$ besitzt, die Lichtmenge:

$$dv \cdot \frac{F}{4\pi} \cdot \frac{2\pi\varrho^2 \operatorname{tang}\alpha \sec^2\alpha \, d\alpha \, d\varrho}{\varrho^2 \sec^2\alpha} e^{-(k+l)\varrho \sec\alpha}$$

oder, wenn wir noch der Kürze wegen

$$k + l = m$$

setzen, die Lichtmenge:

$$\tfrac{1}{2} F \, dv \, d\varrho \, d\alpha \operatorname{tang}\alpha \, e^{-m\varrho\sec\alpha},$$

weil ja das Licht auf seinem Wege $\varrho \sec\alpha$ einerseits nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung und andererseits durch Absorption und Diffusion geschwächt wird.

Um die gesammte Lichtmenge zu erhalten, welche von der Schicht, die wir uns von unbegrenzter Ausdehnung denken, dem Volumenelemente dv zugestrahlt wird, hat man diesen Ausdruck nach α von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ zu integriren. Setzen wir:

$$\varrho \sec\alpha = x, \text{ folglich } \operatorname{tang}\alpha \, d\alpha = \frac{dx}{x},$$

so wird:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-m\varrho\sec\alpha} \operatorname{tang}\alpha \, d\alpha = \int_\varrho^\infty \frac{e^{-mx}}{x} dx = -\operatorname{li} e^{-m\varrho},$$

wo:

$$\mathrm{li}\,e^{-m\varrho} = C + \log m\varrho - m\varrho + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(m\varrho)^2}{2!} - \tfrac{1}{3}\frac{(m\varrho)^3}{3!} + - \ldots$$

der sogenannte Integrallogarithmus, und

$$C = 0{,}5772157$$

die Constante des Integrallogarithmus ist.

Die dem Volumenelemente dv von der Schicht $d\varrho$ zustrahlte Lichtmenge beträgt demnach:

$$-\tfrac{1}{2}\,F\,dv\,d\varrho\,\mathrm{li}\,e^{-m\varrho}.$$

7. Gehört die Schicht $d\varrho$ einem durch Diffusion leuchtenden Körper an, und liegt sie in der Tiefe r' parallel unter der gleichmässig beleuchteten ebenen Oberfläche des Körpers, so ist F offenbar eine Function von r' $(= F(r'))$. Befindet sich das Volumenelement dv in der Tiefe r unter der Oberfläche, so ist:

$$\varrho = r - r',\ d\varrho = -dr',$$

und man hat, um die Lichtmenge zu finden, welche das Volumenelement dv von den darüber liegenden Schichten empfängt, das Integral:

$$-\tfrac{1}{2}\,dv\int_0^r F(r')\cdot\mathrm{li}\,e^{-m(r-r')}\,dr'$$

zu bilden. Für die Schichten unterhalb dv ist:

$$\varrho = r' - r,\ d\varrho = dr',$$

und das Integral:

$$-\tfrac{1}{2}\,dv\int_r^R F(r')\cdot\mathrm{li}\,e^{-m(r'-r)}\,dr'$$

gibt die Lichtmenge an, welche das Volumenelement dv von rückwärts erhält, wenn R die Gesammtdicke des als planparallele Platte gedachten beleuchteten Körpers bedeutet.

Die Lichtmenge, welche die ganze Platte dem in der Tiefe r unter ihrer beleuchteten Oberfläche gelegenen Volumenelemente dv zustrahlt, ist demnach:

$$-\tfrac{1}{2}\,dv\left(\int_0^r F(r')\cdot li\,e^{-m(r-r')}\,dr' + \int_r^R F(r')\cdot li\,e^{-m(r'-r)}\,dr'\right).$$

8. Bezeichnen wir mit f(r) die Lichtmenge, welche auf diese Weise, nämlich indirect durch die diffuse Strahlung sämmtlicher Theilchen des zerstreuenden Körpers, der Volumeneinheit in der Tiefe r unter der beleuchteten Oberfläche zugeführt wird, so ist:

$$f(r) = -\tfrac{1}{2}\left(\int_0^r F(r')\cdot li\,e^{-m(r-r')}\,dr' + \int_r^R F(r')\cdot li\,e^{-m(r'-r)}\,dr'\right).$$

Die Lichtmenge $F(r')$, welche die Volumeneinheit in der Tiefe r' nach allen Seiten ausstrahlt, besteht aber aus zwei Antheilen, nämlich aus dem Antheil, welcher von der unmittelbaren Beleuchtung durch die direct einfallenden Strahlen, und dem soeben besprochenen Antheil, welcher von der allseitigen diffusen Beleuchtung durch die umgebenden Schichten herrührt.

Bezeichnet man daher die der Volumeneinheit an der Oberfläche durch ein paralleles Strahlenbündel aus irgend einer Richtung zugeführte und in den Körper eindringende Lichtmenge mit a, und den i n n e r e n Einfallswinkel mit i, so ist, wenn l das Diffusionsvermögen bezeichnet:

$$F(r') = l\left(a e^{-\frac{mr'}{\cos i}} + f(r')\right).$$

Es ergibt sich demnach die Gleichung:

$$f(r) = -\tfrac{1}{2}l\left(\int\limits_0^r \left(ae^{-\frac{mr'}{\cos i}} + f(r')\right) li\, e^{-m(r-r')} dr'\right.$$

$$\left. + \int\limits_r^R \left(ae^{-\frac{mr'}{\cos i}} + f(r')\right) li\, e^{-m(r'-r)} dr'\right),$$

aus welcher die unbekannte Function f(r) zu bestimmen ist.

9. Man kann sich die Function f(r) zerlegt denken in eine Summe von unendlich vielen Gliedern:

$$f(r) = f_1(r) + f_2(r) + f_3(r) + \cdots,$$

wo der erste Antheil $f_1(r)$ von der erstmaligen indirecten diffusen Reflexion, die folgenden Antheile $f_2(r)$, $f_3(r), \cdots$ dagegen von den indirecten Reflexionen immer höherer Ordnung herrühren. Man hat alsdann:

$$f_1(r) =$$

$$-\tfrac{1}{2}al\left(\int\limits_0^r e^{-\frac{mr'}{\cos i}} li\, e^{-m(r-r')} dr' + \int\limits_r^R e^{-\frac{mr'}{\cos i}} li\, e^{-m(r'-r)} dr'\right),$$

und weiter:

$$f_2(r) = -\tfrac{1}{2}l\left(\int\limits_0^r f_1(r') li\, e^{-m(r-r')} dr' + \int\limits_r^R f_1(r') li\, e^{-m(r'-r)} dr'\right),$$

$$f_3(r) = -\tfrac{1}{2}l\left(\int\limits_0^r f_2(r') li\, e^{-m(r-r')} dr' + \int\limits_r^R f_2(r') li\, e^{-m(r'-r)} dr'\right),$$

u. s. f., und sieht, dass die Glieder der obigen unendlichen Reihe durch successive Quadraturen gefunden werden können.

10. Die Function $f_1(r)$ ist leicht zu ermitteln. Setzen wir nämlich in dem ersten der beiden Integrale $r - r' = x$, so erhalten wir:

$$-\int e^{-\frac{mr'}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-m(r-r')} dr' = e^{-\frac{mr}{\cos i}} \int e^{\frac{mx}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-mx} dx$$

$$= \frac{\cos i}{m} e^{-\frac{mr}{\cos i}} \left(e^{\frac{mx}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-mx} - \int \frac{e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} mx}}{x} dx \right)$$

$$= \frac{\cos i}{m} e^{-\frac{mr}{\cos i}} \left(e^{\frac{mx}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-mx} - \operatorname{li} e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} mx} \right),$$

folglich:

$$-\int_0^r e^{-\frac{mr'}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-m(r-r')} dr'$$

$$= \frac{\cos i}{m} \left(e^{-\frac{mr}{\cos i}} \operatorname{li} e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} mr} - \operatorname{li} e^{-mr} \right)$$

$$+ \frac{\cos i}{m} e^{-\frac{mr}{\cos i}} \left(e^{\frac{mx}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-mx} - \operatorname{li} e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} mx} \right)_{x=0}.$$

Nun ist aber:

$$e^{\frac{mx}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-mx} = e^{\frac{mx}{\cos i}} \left(C + \log mx - mx + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(mx)^2}{2!} - + \cdots \right).$$

und, wenn wir zur Abkürzung:

$$\frac{1-\cos i}{\cos i} m = m'$$

setzen:

$$\operatorname{li} e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} mx} = C + \log mx + \log \frac{1-\cos i}{\cos i} + m'x + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(m'x)^2}{2!} + \cdots;$$

demnach:

$$e^{\frac{mx}{\cos i}}\,\mathrm{li}\,e^{-mx}-\mathrm{li}\,e^{\frac{1-\cos i}{\cos i}mx}$$

$$=C\left(e^{\frac{mx}{\cos i}}-1\right)+\left(e^{\frac{mx}{\cos i}}-1\right)\log mx-\log\frac{1-\cos i}{\cos i}$$

$$-e^{\frac{mx}{\cos i}}\left(mx-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(mx)^2}{2!}+-\cdots\right)-m'x-\tfrac{1}{2}\frac{(m'x)^2}{2!}-\cdots,$$

woraus für $x=o$ hervorgeht:

$$\left(e^{\frac{mx}{\cos i}}\,\mathrm{li}\,e^{-mx}-\mathrm{li}\,e^{\frac{1-\cos i}{\cos i}mx}\right)_{x=o}=-\log\frac{1-\cos i}{\cos i}.$$

Wir erhalten demnach:

$$-\int_o^r e^{-\frac{mr'}{\cos i}}\,\mathrm{li}\,e^{-m(r-r')}\,dr'$$

$$=\frac{\cos i}{m}\left(e^{-\frac{mr}{\cos i}}\,\mathrm{li}\,e^{\frac{1-\cos i}{\cos i}mr}-\mathrm{li}\,e^{-mr}-e^{-\frac{mr}{\cos i}}\log\frac{1-\cos i}{\cos i}\right).$$

Für das zweite in dem Ausdruck für $f_1(r)$ vorkommende Integral erhalten wir, $r'-r=x$ setzend, ganz analog:

$$-\int_r^R e^{-\frac{mr'}{\cos i}}\,\mathrm{li}\,e^{-m(r'-r)}\,dr'=-e^{-\frac{mr}{\cos i}}\int_o^{R-r}e^{-\frac{mx}{\cos i}}\,\mathrm{li}\,e^{-mx}\,dx$$

$$=-\frac{\cos i}{m}e^{-\frac{mr}{\cos i}}\left(\mathrm{li}\,e^{-\frac{1+\cos i}{\cos i}mx}-e^{-\frac{mx}{\cos i}}\,\mathrm{li}\,e^{-mx}\right)_o^{R-r},$$

und da auf demselben Wege wie oben:

$$\left(\mathrm{li}\,e^{-\frac{1+\cos i}{\cos i}mx}-e^{-\frac{mx}{\cos i}}\,\mathrm{li}\,e^{-mx}\right)_{x=o}=\log\frac{1+\cos i}{\cos i}$$

gefunden wird, so ergibt sich:

$$-\int_r^R e^{-\frac{mr'}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-m(r'-r)} dr'$$

$$= \frac{\cos i}{m}\left(-e^{-\frac{mr}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-\frac{1+\cos i}{\cos i} m(R-r)} + e^{-\frac{mR}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-m(R-r)} \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{mr}{\cos i}} \log \frac{1+\cos i}{\cos i}\right).$$

Wir haben also schliesslich:

$$f_1(r) = a \cos i \frac{1}{2m}\left(e^{-\frac{mr}{\cos i}} \operatorname{li} e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} mr} - e^{-\frac{mr}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-\frac{1+\cos i}{\cos i} m(R-r)}\right.$$

$$\left. + e^{-\frac{mr}{\cos i}} \log \frac{1+\cos i}{1-\cos i} - \operatorname{li} e^{-mr} + e^{-\frac{mR}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-m(R-r)}\right).$$

Hieraus folgt für die von den einfallenden Strahlen getroffene Oberfläche ($r = o$):

$$f_1(o) = a \cos i \frac{1}{2m}\left(\log \frac{1+\cos i}{\cos i} + e^{-\frac{mR}{\cos i}} \operatorname{li} e^{-mR} - \operatorname{li} e^{-\frac{1+\cos i}{\cos i} mR}\right),$$

und für die Rückseite der Platte ($r = R$):

$$f_1(R) = a \cos i \frac{1}{2m}\left(e^{-\frac{mR}{\cos i}} \operatorname{li} e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} mR}\right.$$

$$\left. - e^{-\frac{mR}{\cos i}} \log \frac{1-\cos i}{\cos i} - \operatorname{li} e^{-mR}\right).$$

11. Ist mR so gross, dass e^{-mR} als verschwindend klein angesehen werden kann, d. h. dringt die einfallende Strahlung bis zur Rückseite der nunmehr undurchlässigen Platte nicht in merklichem Betrage vor, so ist selbstver-

ständlich auch $f_1(R)$ verschwindend klein, und für die Oberfläche ergibt sich:

$$f_1(o) = a \cos i \frac{1}{2m} \log \frac{1+\cos i}{\cos i}.$$

Da in diesem Falle alle jenseits der Tiefe R gelegenen Schichten merkliches Licht weder empfangen noch ausstrahlen, so kann geradezu $R = \infty$ setzen. Man hat demnach für eine undurchlässige Platte ($R = \infty$):

$$f_1(r) = a \cos i \frac{1}{2m} \left(e^{-\frac{mr}{\cos i}} \operatorname{li} e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} mr} \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{mr}{\cos i}} \log \frac{1+\cos i}{1-\cos i} - \operatorname{li} e^{-mr} \right).$$

12. Bei senkrechter Incidenz ($i = o$) erhält man für eine Platte von beliebiger Dicke R, da:

$$\operatorname{li} e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} mr} + \log \frac{1+\cos i}{1-\cos i}$$

$$= C + \log mr + \log \frac{1-\cos i}{\cos i} + \frac{1-\cos i}{\cos i} mr - + \cdots$$

$$+ \log \frac{1+\cos i}{\cos i} - \log \frac{1-\cos i}{\cos i}$$

sich für $i = o$ auf:

$$C + \log 2mr$$

zurückzieht:

$$[f_1(r)]_{i=o}$$

$$= a \frac{1}{2m} \left(e^{-mr} (C + \log 2mr) - \operatorname{li} e^{-mr} - e^{-mr} \operatorname{li} e^{-2m(R-r)} \right.$$

$$\left. + e^{-mR} \operatorname{li} e^{-m(R-r)} \right),$$

und, wenn die Platte undurchlässig ($R = \infty$) ist:

$$[f_1(r)]_{i=o} = a \frac{1}{2m} \left(e^{-mr} (C + \log 2mr) - \operatorname{li} e^{-mr} \right).$$

13. Wir betrachten jetzt, für den Fall einer undurchlässigen Platte (11), den Gang der Werthe von $f_1(r)$, indem wir zu den Abscissen r die Functionswerthe $f_1(r)$ als Ordinaten einer Curve aufgetragen denken.

Der Differentialquotient:

$$\frac{\partial f_1(r)}{\partial r} = -\frac{al}{2} e^{-\frac{mr}{\cos i}} \left(\operatorname{li} e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} mr} + \log \frac{1+\cos i}{1-\cos i} \right)$$

lässt erkennen, dass die Curve die Ordinatenaxe berührt (da $\operatorname{li} 1 = -\infty$ ist), sich sodann bis zu einem Maximum bei:

$$\operatorname{li} e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} mr} = -\log \frac{1+\cos i}{1-\cos i}$$

erhebt, um von da an gegen die Abscissenaxe asymptotisch herabzusinken.

Mit Hilfe von Soldner's Tabelle der Integrallogarithmen[1]) lassen sich die numerischen Werthe von $f_1(r)$ leicht berechnen. Für senkrechte Incidenz ($i = o$) sind in der folgenden kleinen Tabelle einige Werthe des Ausdrucks:

$$\frac{2m}{al} [f_1(r)]_{i=o} = e^{-mr} (C + \log 2mr) - \operatorname{li} e^{-mr} = y$$

für das Argument e^{-mr}, unter gleichzeitiger Angabe der zugehörigen Werthe von mr und $\operatorname{li} e^{-mr}$ zusammengestellt.

Da in diesem Falle:

$$\frac{\partial y}{\partial r} = -me^{-mr}(C + \log 2mr)$$

ist, so bestimmt sich der Werth von mr, für welchen y ein Maximum ist, aus der Gleichung:

$$\log 2mr = -C.$$

1) Soldner, Théorie et Tables d'une nouvelle fonction transcendante. München 1809.

Man findet hieraus:

$mr = 0{,}28073$, $e^{-mr} = 0{,}75523$, $y_{max.} = 0{,}95534$.

e^{-mr}	mr	$li\,e^{-mr}$	y
1,0	0	$-\infty$	0,69315
0,9	0,10536	$-$ 1,77580	0,89384
0,8	0,22314	1,13401	0,95034
0,7	0,35668	0,78095	0,94811
0,6	0,51083	0,54685	0,90603
0,5	0,69315	0,37867	0,83060
0,4	0,91629	0,25295	0,72613
0,3	1,20397	0,15741	0,59352
0,2	1,60944	0,08513	0,43438
0,1	2,30259	0,03239	0,24283
0,01	4,60517	$-$ 0,00183	0,02981
0	∞	0	0

14. Auf die Ermittelung der von den Reflexionen höherer Ordnung herrührenden Lichtantheile f_2, f_3, $\cdots$ mit Hilfe der oben (9) angedeuteten Quadraturen müssen wir verzichten, da dieselben zu Integralen führen, die sich auf bekannte Functionen nicht reduciren lassen.

Noch weniger erscheint es möglich, mit den bis jetzt zu Gebote stehenden mathematischen Hilfsmitteln die Function $f(r)$, welche für die theoretische Photometrie von fundamentaler Bedeutung ist, in geschlossener Form aus der obigen Bestimmungsgleichung (8) exact zu entwickeln.

Dagegen wollen wir versuchen, wenigstens einen angenäherten Ausdruck für diese Function durch folgende Betrachtungen zu gewinnen.

15. Die Bestimmungsgleichung für die Function $f(r)$ lautet, wenn man die bereits ermittelte Function $f_1(r)$ in sie einführt, wie folgt:

$$f(r)-f_1(r)$$
$$=-\tfrac{1}{2}l\left(\int\limits_0^r f(r')\,\mathrm{li}\,e^{-m(r-r')}dr'+\int\limits_r^R f(r')\,\mathrm{li}\,e^{-m(r'-r)}dr'\right).$$

Durch Differentiation derselben nach r ergibt sich hieraus zunächst:

$$\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\partial f_1}{\partial r}=-\tfrac{1}{2}l\left(\int\limits_0^r f(r')\cdot\frac{e^{-m(r-r')}}{r-r'}dr'-\int\limits_r^R f(r')\,\frac{e^{-m(r'-r)}}{r'-r}dr'\right.$$
$$\left.+\left[f(r')\,\mathrm{li}\,e^{-m(r-r')}\right]_{r'=r}-\left[f(r')\,\mathrm{li}\,e^{-m(r'-r)}\right]_{r'=r}\right),$$

oder, weil die vom Integralzeichen befreiten Glieder sich wegheben:

$$\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\partial f_1}{\partial r}=-\tfrac{1}{2}l\left(\int\limits_0^r f(r')\cdot\frac{e^{-m(r-r')}}{r-r'}dr'-\int\limits_r^R f(r')\cdot\frac{e^{-m(r'-r)}}{r'-r}dr'\right).$$

Setzt man in diesen Gleichungen in dem ersten Integral $r-r'=x$, in dem zweiten $r'-r=x$, so lauten sie:

$$f(r)-f_1(r)=-\tfrac{1}{2}l\left(\int\limits_0^r f(r-x)\,\mathrm{li}\,e^{-mx}dx+\int\limits_0^{R-r} f(r+x)\,\mathrm{li}\,e^{-mx}dx\right)$$

und:

$$\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\partial f_1}{\partial r}=-\tfrac{1}{2}l\left(\int\limits_0^r f(r-x)\cdot\frac{e^{-mx}}{x}dx-\int\limits_0^{R-r} f(r+x)\cdot\frac{e^{-mx}}{x}dx\right).$$

Diese Gleichungen lassen erkennen, dass die ihrer Natur nach stets positive und endliche Function $f(r)$ einen ähnlichen Verlauf nimmt wie die Function $f_1(r)$; ihr Differentialquotient $\partial f/\partial r$ ist positiv unendlich für $r=0$, wird später negativ und verschwindet, wie auch die Function selbst, für $r=\infty$. Die Function $f(r)$ besitzt daher (wenn $R=\infty$ ist) ein Maximum, das jedoch erst bei einem grösseren Werthe von $m r$ eintritt als dasjenige der Function $f_1(r)$. Denn ist $f(r)$ ein Maximum und sonach $\partial f/\partial r = o$, so ist die rechte Seite der letzten Gleichung nothwendig positiv, woraus folgt, dass das Maximum eintritt bei einem Werthe von $m r$, für welchen $\partial f_1/\partial r$ bereits negativ ist.

16. Da $-\mathrm{li}\, e^{-mx}$ für $m x = 0$ unendlich gross ist, und von da mit wachsendem $m x$ rasch abnimmt, so fallen in dem Ausdruck:

$$f(r)-f_1(r) = -\tfrac{1}{2} l\left(\int_0^r f(r-x)\,\mathrm{li}\, e^{-mx} dx + \int_0^{R-r} f(r+x)\,\mathrm{li}\, e^{-mx} dx\right)$$

die Anfangselemente der Integrale in der Nähe von $x = o$ gegenüber den späteren bei grösseren Werthen von x besonders stark ins Gewicht, oder, mit anderen Worten, die in der Tiefe r unter der Oberfläche gelegene Schicht wird weitaus am stärksten von den ihr beiderseits unmittelbar angrenzenden Schichten beleuchtet.

Legen wir nun sämmtlichen Schichten die in der Tiefe r herrschende Leuchtkraft bei, indem wir $f(r)$ sowohl statt $f(r-x)$ als auch statt $f(r+x)$ setzen, so dürfen wir annehmen, dass der hiebei begangene Fehler verhältnissmässig nur gering ausfalle, weil der Factor $\mathrm{li}\, e^{-mx}$ die Wirkung der entfernten Schichten, welches auch ihre Leuchtkraft sein mag, nahezu hinwegtilgt, diejenige der nächstliegenden aber zu voller Geltung kommen lässt.

Erwägungen dieser Art geben Anlass zu der Vermuthung, dass eine Function $f'(r)$, welche der Gleichung

$$f'(r)-f_1(r) = -\tfrac{1}{2} l f'(r)\left(\int_0^r \mathrm{li}\, e^{-mx} dx + \int_0^{R\ r} \mathrm{li}\, e^{-mx} dx\right)$$

genügt, nicht allzuweit von der Function $f(r)$ abweiche, und daher annähernd statt ihrer gesetzt werden könne.

17. Man findet nun leicht:

$$\int \mathrm{li}\, e^{-mx} dx = \frac{1}{m}\left(e^{-mx} + mx\,\mathrm{li}\, e^{-mx}\right)$$

und sonach:

$$-\tfrac{1}{2} l\left(\int_0^r \mathrm{li}\, e^{-mx} dx + \int_0^{R-r} \mathrm{li}\, e^{-mx} dx\right)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(2 - e^{-mr} - mr\,\mathrm{li}\, e^{-mr} - e^{-m(R-r)} - m(R-r)\,\mathrm{li}\, e^{-m(R-r)}\right)$$

$$= \frac{1}{2m}\varphi(r).$$

Die Function $\varphi(r)$ bleibt ungeändert, wenn r mit R—r vertauscht wird, d. h. sie ist symmetrisch in Bezug auf die Mittelschicht ($r = \frac{1}{2}R$) der Platte, und erreicht hier, da:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = m\left(\mathrm{li}\, e^{-m(R-r)} - \mathrm{li}\, e^{-mr}\right)$$

für $r = \frac{1}{2}R$ verschwindet, ihren Maximalwerth:

$$\varphi_{max} = 2\left(1 - e^{-\frac{1}{2}mR} - \tfrac{1}{2} mR\,\mathrm{li}\, e^{-\frac{1}{2}mR}\right),$$

welcher kleiner als 2 ist. Als Curve dargestellt, berührt sie die Ordinatenaxe und die im Abstand R mit ihr parallel gezogene Gerade, d. i. die Vorder- und die Rückseite der Platte, und hat an beiden Stellen den Werth:

$$\varphi(o) = \varphi(R) = 1 - e^{-mR} - mR\,\mathrm{li}\, e^{-mR}.$$

Setzen wir $R = \infty$, was geschehen kann, wenn bis zur Rückseite der Platte merkliches Licht nicht vordringt, so wird:

$$\varphi(r) = 2 - e^{-mr} - mr\,\mathrm{li}\, e^{-mr} = z.$$

Das folgende Täfelchen gewährt einen Ueberblick über den Gang der Werthe dieser Function.

e^{-mr}	z
1,0	1,00000
0,9	1,28710
0,8	1,45305
0,7	1,57854
0,6	1,67935
0,5	1,76247
0,4	1,83178
0,3	1,88952
0,2	1,93701
0,1	1,97458
0,01	1,99843
0	2,00000

Da in diesem Falle:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -m \operatorname{li} e^{-mr}$$

immer positiv ist, so erkennt man, dass die Curve, welche den Verlauf der Functionswerthe versinnlicht, sich von dem Punkte $z = 1$, wo sie die Ordinatenaxe berührt, mit immer langsamerer Steigung erhebt, indem sie der Geraden, welche in der Höhe 2 parallel zur Abscissenaxe läuft, asymptotisch zustrebt.

18. Als Ausdruck der Function $f'(r)$ ergibt sich nunmehr:

$$f'(r) = \frac{f_1(r)}{1 - \frac{1}{2m}\varphi(r)}$$

Dieselbe besitzt in der That im Allgemeinen die Eigenschaften, welche der echten Function $f(r)$ zukommen müssen. Da

$$\frac{1}{2m} = \frac{1}{2(k+l)}$$

stets $< \frac{1}{2}$, und demnach

$$\frac{1}{2m}\varphi(r) < 1$$

ist, so ist $f'(r)$ stets positiv, endlich und $> f_1(r)$, und verschwindet für $r = \infty$; der Differentialquotient:

$$\frac{\partial f'}{\partial r} = \frac{\left(1 - \frac{1}{2m}\varphi\right)\frac{\partial f_1}{\partial r} + \frac{1}{2m} f_1 \frac{\partial \varphi}{\partial r}}{\left(1 - \frac{1}{2m}\varphi\right)^2}$$

zeigt, dass die Curve, welche den Verlauf der Functionswerthe veranschaulicht, die Ordinatenaxe in der Höhe

$$\frac{f_1(o)}{1 - \frac{1}{2m}\varphi(o)}$$

berührt, sich sodann zu einem Maximum erhebt, welches bei einem grösseren Werthe von mr eintritt als dasjenige der Function $f_1(r)$, um sich alsdann (falls $R = \infty$ gesetzt wird) asymptotisch gegen die Abscissenaxe herabzusenken.

Die aus den successiven indirecten Reflexionen entspringenden Lichtantheile werden, falls wir $f(r)$ durch $f'(r)$ ersetzen, durch folgende abnehmende geometrische Reihe dargestellt:

$$f'_1 = f_1, \quad f'_2 = \frac{1}{2m}\varphi f_1, \quad f'_3 = \left(\frac{1}{2m}\varphi\right)^2 f_1, \quad f'_4 = \left(\frac{1}{2m}\varphi\right)^3 f_1, \cdots$$

Dem Beitrag der ersten indirecten Reflexion bleibt demnach, auch wenn wir $f'(r)$ statt $f(r)$ setzen, die volle Genauigkeit gewahrt.

19. Bezeichnen wir wie früher mit $F(r)$ die gesammte Leuchtkraft pro Volumeneinheit in der Tiefe r unter der Oberfläche, so sendet ein daselbst befindliches Volumenelement $d\omega dr$ unter dem (inneren) Emanationswinkel ε nach dem Element $d\omega$ der Oberfläche die Lichtmenge:

$$\frac{1}{4\pi} F(r)\, e^{-\frac{mr}{\cos\varepsilon}} d\omega\, dr\,.$$

Die gesammte aus der ganzen Tiefe der Platte, deren Dicke = R, nach dem Oberflächenelemente $d\omega$ unter diesem Winkel gelangende und durch dasselbe (wenn keine Reflexion nach innen stattfindet) ausgestrahlte Lichtmenge beträgt:

$$L = \frac{d\omega}{4\pi} \int_0^R F(r)\, e^{-\frac{mr}{\cos\varepsilon}} dr,$$

oder, da:

$$F(r) = l\left(a\, e^{-\frac{mr}{\cos i}} + f(r)\right)$$

ist:

$$L = \frac{d\omega}{4\pi}\, l \int_0^R \left(ae^{-\frac{mr}{\cos i}} + f(r)\right) e^{-\frac{mr}{\cos\varepsilon}} dr\,.$$

20. Setzt man an die Stelle der Function f(r) die Function f′(r), so hat man annähernd:

$$L = \frac{d\omega}{4\pi} l \left(a \int_0^R e^{-\frac{\cos i + \cos\varepsilon}{\cos i \cos\varepsilon} mr} dr + \int_0^R \frac{f_1(r)}{1 - \frac{1}{2m}\varphi(r)} \cdot e^{-\frac{mr}{\cos\varepsilon}} dr \right).$$

Ist ϑ ein zwischen o und $\frac{1}{2}$ liegender Bruch, so kann man schreiben:

$$\int_0^R \frac{f_1(r)}{1 - \frac{1}{2m}\varphi(r)}\, e^{-\frac{mr}{\cos\varepsilon}} dr = \frac{1}{1 - \frac{1}{2m}\varphi(\vartheta R)} \int_0^R f_1(r)\, e^{-\frac{mr}{\cos\varepsilon}} dr\,.$$

Nun sind in dem Ausdruck:

$$L = \frac{d\omega}{4\pi} l \left(a \int_0^R e^{-\frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon} mr} dr \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1 - \frac{1}{2m} \varphi(\vartheta R)} \int_0^R f_1(r)\, e^{-\frac{mr}{\cos \varepsilon}} dr \right)$$

beide Integrale leicht zu berechnen. Indem man bei Berechnung des zweiten von der Formel:

$$\int e^{-ax} \operatorname{li} e^{-bx} dx = -\frac{1}{a} e^{-ax} \operatorname{li} e^{-bx} + \frac{1}{a} \operatorname{li} e^{-(a+b)x}$$

wiederholt Gebrauch macht, erhält man:

$$L = \frac{d\omega}{4\pi} a \frac{1}{2m} \frac{2 \cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon} mR} \right)$$

$$+ \frac{d\omega}{4\pi} a \cdot \frac{\left(\frac{1}{2m}\right)^2}{1 - \frac{1}{2m} \varphi(\vartheta R)} \cdot \frac{2 \cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon} \left\{ (\cos i + \cos \varepsilon) \left(e^{-\frac{mR}{\cos i}} \right. \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{mR}{\cos i}} \right) \operatorname{li} e^{-mR} + e^{-\frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon} mR} \left[\cos i \left(\log \frac{1 - \cos i}{\cos i} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \operatorname{li} e^{\frac{1 - \cos i}{\cos i} mR} \right) + \cos \varepsilon \left(\log \frac{1 - \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon} - \operatorname{li} e^{\frac{1 - \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon} mR} \right) \right]$$

$$+ \cos i \left(\log \frac{1 + \cos i}{\cos i} - \operatorname{li} e^{-\frac{1 + \cos i}{\cos i} mR} \right)$$

$$\left. + \cos \varepsilon \left(\log \frac{1 + \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon} - \operatorname{li} e^{-\frac{1 + \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon} mR} \right) \right\}.$$

21. Unter den zugelassenen Voraussetzungen stellt dieser Ausdruck das Incidenz- und Emanationsgesetz für eine beliebig dicke Schicht eines durch diffuse Reflexion lichtstrahlenden Körpers dar.

Man sieht, dass der Ausdruck ungeändert bleibt, wenn Incidenz- und Emanationswinkel mit einander vertauscht werden.

Ist mR sehr klein, d. h. entweder die Summe aus Absorptions- und Diffusionsvermögen m, oder die Dicke R der Schicht sehr gering, so wird die ausgestrahlte Lichtmenge der Dicke der Schicht proportional, und unabhängig von Einfalls- und Ausstrahlungswinkel.

Wenn $l/2m$ so klein ist, dass im Nenner des zweiten Gliedes $\frac{l}{2m}\varphi(\vartheta R)$ gegen 1 vernachlässigt werden kann, so erscheint der Ausdruck von der unbekannten Grösse ϑ befreit, und reducirt sich auf sein erstes Glied, wenn auch die zweite Potenz von $l/2m$ ausser Acht gelassen werden darf. Es trifft dies zu, wenn k sehr gross gegen l ist, also bei nahezu schwarzen Körpern, oder bei farbigen Körpern für diejenigen Strahlen, welche sehr stark absorbirt werden.

22. Dringt bis zur Rückseite der Platte merkliches Licht nicht vor, d. h. kann e^{-mR} als verschwindend klein, oder, was dasselbe ist, mR als unendlich gross angesehen werden, so zieht sich der Ausdruck L auf den folgenden weit einfacheren zurück:

$$L = \frac{d\omega}{4\pi} a \frac{l}{2m} \cdot \frac{2\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon} \left(1 + \frac{\frac{l}{2m}}{1 - \frac{l}{2m}\varphi} \left[\cos i \log \frac{1+\cos i}{\cos i} + \cos \varepsilon \log \frac{1+\cos \varepsilon}{\cos \varepsilon}\right]\right),$$

wo φ eine noch zu bestimmende Constante bedeutet, deren Werth zwischen 1 und 2 liegt.

Diese Formel, welche ausser von i und ε nur noch von dem Verhältniss des Absorptions- zum Diffusionsvermögen abhängt, hätte nun für undurchsichtige diffus reflectirende Körper als neues Emanationsgesetz an die Stelle des bisher in der Photometrie angenommenen Lambert'schen Cosinusgesetzes zu treten. In ihr bedeuten i und ε den inneren Incidenz- und Emanationswinkel; findet beim Eintritt und Austritt keine Brechung statt, was z. B. der Fall ist, wenn der Zwischenraum der diffundirenden Theilchen mit Luft erfüllt ist, so sind diese Winkel innen und aussen die nämlichen.

Für senkrechte Incidenz (i = o) wird der obige Ausdruck:

$$L = a\frac{d\omega}{4\pi}\Bigg[\frac{1}{2m}\cdot\frac{2\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon}$$

$$+\frac{\left(\frac{1}{2m}\right)^2}{1-\frac{1}{2m}\varphi}\cdot\frac{2\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon}\left(\log 2+\cos\varepsilon\log\frac{1+\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon}\right)\Bigg].$$

23. Die Lichtmenge M, welche bei senkrechter Incidenz von dem Oberflächenelement $d\omega$ nach allen Seiten hin ausstrahlt und von einer Halbkugel aufgefangen wird, die mit dem Radius 1 von $d\omega$ aus beschrieben ist, ergibt sich, wenn der vorstehende Ausdruck L mit $2\pi\sin\varepsilon\,d\varepsilon$ multiplicirt und nach ε von o bis $\frac{1}{2}\pi$ integrirt wird. Nun ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon}\sin\varepsilon\,d\varepsilon = 1-\log 2,$$

ferner:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varepsilon}{1+\cos\varepsilon}\sin\varepsilon\log\frac{1+\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon}\,d\varepsilon = \int_0^1\frac{x^2}{1+x}\log\frac{1+x}{x}\,dx$$

$$=\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)(\log(1+x) \quad \log x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (x-1)(\log(1+x)-\log x)dx + \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{\log x}{1+x}dx,$$

also endlich, da die beiden ersten Integrale leicht zu berechnen sind, und bekanntlich:

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1+x} dx = -\frac{\pi^2}{12}$$

ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varepsilon}{1+\cos\varepsilon} \cdot \log \frac{1+\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon} \cdot \sin\varepsilon\, d\varepsilon = \tfrac{1}{2} - 2\log 2 + \tfrac{1}{2}(\log 2)^2 + \frac{\pi^2}{12}.$$

Setzt man diese Werthe in das Integral:

$$M = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} L \sin\varepsilon\, d\varepsilon$$

ein, so erhält man:

$$\frac{M}{a\,d\omega} = A_0 = \frac{1}{2m}(1-\log 2) + \frac{\left(\frac{1}{2m}\right)^2}{1-\frac{1}{2m}\varphi}\left[1 + \frac{\pi^2}{12} - \tfrac{1}{2}(1+\log 2)^2\right].$$

Dieser Ausdruck bedeutet die von der Einheit der Oberfläche eines undurchsichtigen Körpers, wenn sie von der Einheit der Lichtmenge beleuchtet wird, nach allen Seiten diffus zurückgestrahlte Lichtmenge; er entspricht also dem Lambert'schen Begriff „Albedo“.

Die Albedo ist hienach, da φ eine absolute Constante bedeutet, nur von der Grösse $1/2m$, oder, da:

$$\frac{1}{2m} = \frac{1}{2(k+l)} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{k}{l}+1}$$

ist, nur von dem Verhältniss k/l des Absorptions- zum Diffusionsvermögen abhängig, und erscheint bei farbigen Körpern vermöge der Grösse k als Function der Wellenlänge.

24. Der denkbar höchste Grad der „Weisse" würde einem Körper zukommen, der auf sichtbare Strahlen gar keine Absorption ausübt. Da in diesem Falle $k = o$ zu setzen wäre, so müsste für einen „absolut weissen" Körper

$$\frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$$

sein. Ein solcher Körper aber gibt, wenn er undurchlässig ist, alles ihn treffende Licht zurück, oder seine Albedo ist der Einheit gleich. Setzen wir daher in der obigen Gleichung $1/2m = \frac{1}{2}$, so muss aus ihr die „absolute" Albedo $A_0 = 1$ hervorgehen. Durch diese Gleichung:

$$1 = \tfrac{1}{2}(1 - \log 2) + \frac{1}{4 - 2\varphi}\left[1 + \frac{\pi^2}{12} - \tfrac{1}{2}(1 + \log 2)^2\right]$$

wird die Constante φ bestimmt. Setzen wir der Kürze wegen:

$$1 - \log 2 = 0{,}30685 = p$$

und:

$$1 + \frac{\pi^2}{12} - \tfrac{1}{2}(1 + \log 2)^2 = 0{,}38909 = q\,,$$

so ergibt sich aus ihr:

$$\varphi = 2 - \frac{q}{2 - p}$$

oder:

$$\varphi = 1{,}77020\,.$$

Diese Zahl hat man sich von nun an in den Ausdrücken für L (22) und A_0 (23) an die Stelle von φ gesetzt zu denken.

25. Die Lichtmenge M, welche ein Oberflächenelement $d\omega$ einer beliebig dicken Platte bei beliebiger Incidenz nach allen Seiten hin ausstrahlt, kann übrigens auch ganz exact

ausgedrückt werden, freilich nur durch ein Integral, welches auf bekannte Functionen nicht zurückführbar ist. Man hat nämlich, von dem Ausdruck:

$$L = \frac{d\omega}{4\pi} l \int_0^R \left(ae^{-\frac{mr}{\cos i}} + f(r)\right) e^{-\frac{mr}{\cos\varepsilon}} dr$$

ausgehend, sofort:

$$M = d\omega \cdot \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(ae^{-\frac{mr}{\cos i}} + f(r)\right) e^{-\frac{mr}{\cos\varepsilon}} \sin\varepsilon\, d\varepsilon\, dr.$$

Nun wird, wenn man

$$\frac{r}{\cos\varepsilon} = x \quad \text{und demnach} \quad \sin\varepsilon\, d\varepsilon = r\frac{dx}{x^2}$$

setzt:

$$\int e^{-\frac{mr}{\cos\varepsilon}} \sin\varepsilon\, d\varepsilon = r\int \frac{e^{-mx}}{x^2} dx = -r\frac{e^{-mx}}{x} - mr \int \frac{e^{-mx}}{x} dx$$

$$= -\frac{r}{x} e^{-mx} - mr\, \mathrm{li}\, e^{-mx} = -\cos\varepsilon\, e^{-\frac{mr}{\cos\varepsilon}} - mr\, \mathrm{li}\, e^{-\frac{mr}{\cos\varepsilon}},$$

folglich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{mr}{\cos\varepsilon}} \sin\varepsilon\, d\varepsilon = e^{-mr} + mr\, \mathrm{li}\, e^{-mr}.$$

Man hat demnach für die gesammte allseitig ausgestrahlte Lichtmenge:

$$M = d\omega \frac{1}{2} \int_0^R \left(ae^{-\frac{mr}{\cos i}} + f(r)\right) \left(e^{-mr} + mr\, \mathrm{li}\, e^{-mr}\right) dr.$$

Derselbe Ausdruck muss auch hervorgehen, wenn man die Lichtmenge berechnet, welche von sämmtlichen Schichten der Platte nach einem Elemente $d\omega$ der Oberfläche gesendet wird und durch dasselbe ausstrahlt, falls keine Reflexion nach innen stattfindet. Denn ist $F(r)$ die Leuchtkraft der Volumeneinheit in der Tiefe r unter der Oberfläche, so ist die Lichtmenge, welche ein Elementarring (vergl. 6) der daselbst liegenden Schicht von der Dicke dr nach dem Oberflächenelement $d\omega$ sendet, da dieses von den Strahlen unter dem Einfallswinkel α getroffen wird:

$$d\omega \cdot \tfrac{1}{2} F(r)\, e^{-\frac{mr}{\cos\alpha}} \tang\alpha \cos\alpha\, d\alpha\, dr\,,$$

welcher Ausdruck, nach α von o bis $\frac{1}{2}\pi$, nach r von o bis R integrirt, da ja:

$$F(r) = l\left(ae^{-\frac{mr}{\cos i}} + f(r)\right)$$

ist, sofort den obigen Werth für M liefert.

26. Für eine Platte von solcher Dicke, dass sie kein Licht durchgehen lässt ($R = \infty$), haben wir, indem wir von dem bereits oben (17) eingeführten Functionszeichen φ Gebrauch machen:

$$e^{-mr} + mr\,\mathrm{li}\,e^{-mr} = 2 - \varphi(r)$$

und demnach:

$$M = d\omega \frac{1}{2}\left(a\int_0^\infty e^{-\frac{mr}{\cos i}}(2-\varphi(r))\,dr + \int_0^\infty f(r)(2-\varphi(r))\,dr\right).$$

Setzen wir nun in dem zweiten Integral näherungsweise:

$$f'(r) = \frac{f_1(r)}{1-\frac{1}{2m}\varphi(r)}$$

statt $f(r)$, so wird dasselbe:

$$\int_0^\infty f_1(r)\cdot\frac{2-\varphi(r)}{1-\frac{1}{2m}\varphi(r)}\cdot dr = \frac{2-\varphi}{1-\frac{1}{2m}\varphi}\int_0^\infty f_1(r)\cdot dr\,,$$

wenn wir unter φ eine zwischen 1 und 2 liegende Constante verstehen. Wir haben alsdann annähernd:

$$M = d\omega \frac{1}{2}\left(a \int_0^\infty e^{-\frac{mr}{\cos i}}(2 \quad \varphi(r))\, dr + \frac{2-\varphi}{1-\frac{1}{2m}\varphi}\int_0^\infty f_1(r)\, dr\right),$$

wo nun beide Integrale sich ohne Schwierigkeit berechnen lassen.

Man findet nämlich:

$$\tfrac{1}{2} al \int_0^\infty e^{-\frac{mr}{\cos i}}(2-\varphi(r))\, dr = \tfrac{1}{2} al \int_0^\infty e^{-\frac{mr}{\cos i}}\left(e^{-mr} + mr\, \mathrm{li}\, e^{-mr}\right) dr$$

$$= \tfrac{1}{2} al\left(\int_0^\infty e^{-\frac{1+\cos i}{\cos i} mr}\, dr + \int_0^\infty e^{-\frac{mr}{\cos i}} mr\, \mathrm{li}\, e^{-mr}\, dr\right)$$

$$= a\frac{1}{2m}\Bigg[-\frac{\cos i}{1+\cos i}\, e^{-\frac{1+\cos i}{\cos i} mr} - \frac{\cos^2 i}{1+\cos i}\, e^{-\frac{1+\cos i}{\cos i} mr}$$

$$- \cos i\, e^{-\frac{mr}{\cos i}} mr\, \mathrm{li}\, e^{-mr} - \cos^2 i\, e^{-\frac{mr}{\cos i}} \mathrm{li}\, e^{-mr}$$

$$+ \cos^2 i\, \mathrm{li}\, e^{-\frac{1+\cos i}{\cos i} mr}\Bigg]_0^\infty$$

$$= a\frac{1}{2m}\left[\frac{\cos i}{1+\cos i} + \frac{\cos^2 i}{1+\cos i} - \cos^2 i \log\frac{1+\cos i}{\cos i}\right]$$

$$= a\frac{1}{2m}\cos i\left(1 - \cos i \log\frac{1+\cos i}{\cos i}\right).$$

Ferner ergibt sich:

$$\tfrac{1}{2} l \int_0^\infty f_1(r)\, dr = a\frac{l^2}{4m}\cos i \int_0^\infty \Bigg(e^{-\frac{mr}{\cos i}} \log\frac{1+\cos i}{1-\cos i}$$

$$+ e^{-\frac{mr}{\cos i}}\, \mathrm{li}\, e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} mr} - \mathrm{li}\, e^{-mr}\Bigg) dr$$

$$= a\left(\frac{1}{2m}\right)^2 \cos i \left[-\cos i\, e^{-\frac{mr}{\cos i}} \log\frac{1+\cos i}{1-\cos i}\right.$$

$$\left. -\cos i\, e^{-\frac{mr}{\cos i}} \operatorname{li} e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} mr} + \cos i \operatorname{li} e^{-mr} - mr \operatorname{li} e^{-mr} - e^{-mr}\right]_0^\infty$$

$$= a\left(\frac{1}{2m}\right)^2 \cos i \left[\cos i \log\frac{1+\cos i}{1-\cos i} + 1\right.$$

$$\left. + \cos i \left(e^{-\frac{mr}{\cos i}} \operatorname{li} e^{\frac{1-\cos i}{\cos i} mr} - \operatorname{li} e^{-mr}\right)_{r=0}\right]$$

$$= a\left(\frac{1}{2m}\right)^2 \cos i \left(1 + \cos i \log\frac{1+\cos i}{1-\cos i} + \cos i \log\frac{1-\cos i}{\cos i}\right)$$

$$= a\left(\frac{1}{2m}\right)^2 \cos i \left(1 + \cos i \log\frac{1+\cos i}{\cos i}\right).$$

Wird demnach ein undurchsichtiger zerstreuender Körper durch parallele Strahlen unter dem Einfallswinkel i beleuchtet, so beträgt die gesammte Lichtmenge, welche ein Element $d\omega$ seiner Oberfläche nach allen Seiten hin ausstrahlt:

$$M = a\,d\omega \cdot \frac{1}{2m} \cos i \left[1 - \cos i \log\frac{1+\cos i}{\cos i}\right.$$

$$\left. + \frac{(2-\varphi)\frac{1}{2m}}{1-\frac{1}{2m}\varphi}\left(1 + \cos i \log\frac{1+\cos i}{\cos i}\right)\right].$$

27. Der Quotient $M : a\,d\omega = A$, nämlich:

$$A = \frac{1}{2m} \cos i \left(1 - \cos i \log\frac{1+\cos i}{\cos i}\right)$$

$$+ \frac{(2-\varphi)\left(\frac{1}{2m}\right)^2}{1-\frac{1}{2m}\varphi} \cos i \left(1 + \cos i \log\frac{1+\cos i}{\cos i}\right)$$

stellt nun aber die Albedo in erweitertem Sinne, in ihrer Abhängigkeit von dem Einfallswinkel, dar.

Für senkrechte Incidenz ($i = o$) ergibt sich hieraus:

$$A_0 = \frac{1}{2m}(1 - \log 2) + \frac{\left(\frac{1}{2m}\right)^2}{1 - \frac{1}{2m}\varphi}(2 - \varphi)(1 + \log 2).$$

Dieser Ausdruck muss mit dem oben (23) bereits gefundenen identisch sein. Hiezu ist nothwendig, dass φ den oben (24) bereits bestimmten Werth:

$$\varphi = 1{,}77020$$

besitze, und dass ausserdem:

$$(2 - \varphi)(1 + \log 2) = 1 + \frac{\pi^2}{12} - \tfrac{1}{2}(1 + \log 2)^2 = q$$

sei. Es ist aber in der That ganz genau:

$$(2 - \varphi)(1 + \log 2) = 0{,}2298 \cdot 1{,}69315 = 0{,}38909 = q\,.$$

28. Die Lichtmenge M', welche ein Körper, dessen Oberfläche von allen Seiten her gleichmässig beleuchtet wird, nach irgend einer Richtung (ε) ausstrahlt, wird ausgedrückt durch das Integral:

$$M' = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} L \sin i \, di\,.$$

Da L in ganz gleicher Weise von i wie von ε abhängt, so kann sich dieses Integral von dem vorigen:

$$M = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} L \sin \varepsilon \, d\varepsilon$$

nur dadurch unterscheiden, dass i und ε mit einander vertauscht sind. Es ergibt sich daher:

$$M' = a\,d\omega\,\frac{1}{2m}\cos\varepsilon\left[1 - \cos\varepsilon\log\frac{1+\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon}\right.$$

$$\left.+\frac{(2-\varphi)\frac{1}{2m}}{1-\frac{1}{2m}\varphi}\left(1+\cos\varepsilon\log\frac{1+\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon}\right)\right],$$

wo die Constante φ denselben Werth hat wie vorher.

29. Für absolut weisse Körper ($1/2m = \frac{1}{2}$) ergibt sich aus den Formeln M (26) und M' (28):

$$M = a\,d\omega\cos i\,, \qquad M' = a\,d\omega\cos\varepsilon\,.$$

Wir gelangen demnach zu folgenden Sätzen:

Wird ein absolut weisser Körper von parallelen Strahlen aus irgend einer Richtung beleuchtet, so ist die von seiner Oberfläche nach allen Richtungen ausgestrahlte Lichtmenge (die Leuchtkraft seiner Oberfläche) dem Cosinus des Einfallswinkels proportional.

Wird die Oberfläche eines absolut weissen Körpers von allen Seiten her gleichmässig beleuchtet, so ist die von ihr nach irgend einer Richtung ausgestrahlte Lichtmenge dem Cosinus des Emanationswinkels proportional.

Diese für absolut weisse Körper ausgesprochenen Sätze gelten übrigens auch bei farbigen Körpern für diejenigen Farben, deren Absorption als verschwindend gering angesehen werden darf.

Die beiden Sätze zeigen aber, in welchem Sinne und mit welcher Beschränkung das Cosinusgesetz für den Incidenzwinkel einerseits und den Emanationswinkel andrerseits, nach unserer Theorie, als giltig anzusehen ist.

30. Die Lichtmenge N, welche der Körper bei allseitiger (diffuser) Beleuchtung nach allen Seiten von sich strahlt, wird erhalten, wenn man M mit $2\pi\sin i\,di$ oder M' mit $2\pi\sin\varepsilon\,d\varepsilon$ multiplicirt und sodann nach i resp. ε von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ integrirt. Es ergibt sich:

$$N = 2\pi a\, d\omega \frac{1}{2m} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin i \cos i\, di - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 i \sin i \log \frac{1+\cos i}{\cos i} di \right)$$

$$+ 2\pi a\, d\omega \frac{(2-\varphi)\left(\frac{1}{2m}\right)^2}{1 - \frac{1}{2m}\varphi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin i \cos i\, di \right.$$

$$\left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 i \sin i \log \frac{1+\cos i}{\cos i} di \right),$$

oder, da:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin i \cos i\, di = \tfrac{1}{2}$$

und:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 i \sin i \log \frac{1+\cos i}{\cos i} di = \tfrac{2}{3} \log 2 - \tfrac{1}{6}$$

ist:

$$\frac{N}{\pi a\, d\omega} = A_1 = \frac{1}{2m} \left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3} \log 2\right) + \frac{(2-\varphi)\left(\frac{1}{2m}\right)^2}{1 - \frac{1}{2m}\varphi} \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3} \log 2\right).$$

Dieser Ausdruck, welcher das Verhältniss angibt der allseitig durch das Flächenelement ausstrahlenden Lichtmenge zu der von allen Seiten durch dasselbe eindringenden Lichtmenge $\pi a\, d\omega$, entspricht der von Seeliger[1]) gegebenen Definition der Albedo, wonach diese eine Zahl sein muss, die nur von der Beschaffenheit des zerstreuenden Körpers, dagegen nicht von dem Einfallswinkel abhängig sein darf.

1) Seeliger, Vierteljahrsschrift d. astron. Gesellsch. 21. p. 223.

Setzen wir der Kürze wegen:

$$A_1 = s\frac{1}{2m} + \frac{(2-\varphi)(2-s)}{1-\frac{1}{2m}\varphi}\left(\frac{1}{2m}\right)^2$$

so ist in dieser Formel:

$$s = 0{,}40914$$

während φ den oben bereits gefundenen Werth:

$$\varphi = 1{,}77020$$

vorstellt.

Für einen absolut weissen Körper $\left(\frac{1}{2m} = \frac{1}{2}\right)$ ergibt sich hieraus selbstverständlich $A_1 = 1$.

31. Ist die (Lambert'sche) Albedo A_0 eines Körpers bekannt, so kann aus der Gleichung (23, 27):

$$A_0 = p\frac{1}{2m} + q \cdot \frac{\left(\frac{1}{2m}\right)^2}{1-\frac{1}{2m}\varphi}$$

die Grösse $1/2m$ und demnach auch das Verhältniss k/l des Absorptions- zum Diffusionsvermögen bestimmt werden. Man findet:

$$\frac{1}{2m} = \frac{A_0\varphi + p}{2(p\varphi - q)} - \sqrt{\frac{(A_0\varphi + p)^2}{4(p\varphi - q)^2} - \frac{A_0}{p\varphi - q}}\,.$$

Für Kremserweiss (cerussa albissima), das auf Königspapier (charta regia albissima) in solcher Dicke aufgetragen war, dass es vollkommen undurchsichtig erschien, fand Lambert[1]) als Mittel aus sieben Beobachtungen die Albedo $A_0 = 0{,}4230$, und für das dicke und fast ganz undurchsichtige Königspapier $A_0 = 0{,}4$. Hieraus berechnet sich für

$$\text{Kremserweiss: } \frac{1}{2m} = 0{,}42736\,, \quad \frac{k}{l} = 0{,}16997$$

$$\text{Königspapier: } \frac{1}{2m} = 0{,}42103\,, \quad \frac{k}{l} = 0{,}18756\,.$$

1) Lambert, Photometria, p. 341. 1760.

Mittels dieser Werthe berechnet sich die Albedo nach Seeliger's Definition für

Kremserweiss: $A_1 = 0{,}44907$,
Königspapier: $A_1 = 0{,}42670$.

32. Nachdem nun in der Formel (22):

$$L = a \frac{d\omega}{4\pi} \frac{1}{2m} \left(\frac{2 \cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon} \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{2m}}{1 - \frac{1}{2m}\varphi} \frac{2 \cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon} \left(\cos i \log \frac{1 + \cos i}{\cos i} + \cos \varepsilon \log \frac{1 + \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon} \right) \right),$$

welche das Incidenz- und Emanationsgesetz für undurchsichtige diffus reflectirende Körper darstellt, die Coefficienten numerisch gegeben sind, lässt sich aus ihr die Lichtmenge L für jeden Einfalls- und Ausstrahlungswinkel leicht berechnen.

Nehmen wir senkrechte Incidenz ($i = o$) an, so lautet die Formel:

$$\frac{4\pi}{a\, d\omega} L = \frac{1}{2m} \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{2 \cos \varepsilon} \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{2m}}{1 - \frac{1}{2m}\varphi} \cdot \frac{2 \cos \varepsilon}{1 + \cos \varepsilon} \left(\log 2 + \cos \varepsilon \log \frac{1 + \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon} \right) \right),$$

oder, wenn wir zur Abkürzung:

$$\frac{2 \cos \varepsilon}{1 + \cos \varepsilon} = \frac{\cos \varepsilon}{\cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon} = P,$$

$$P \left(\log 2 + \cos \varepsilon \log \frac{1 + \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon} \right) = Q,$$

$$\frac{\frac{1}{2m}}{1 - \frac{1}{2m}\varphi} = \mu$$

setzen:

$$\frac{4\pi}{a d\omega} L = \frac{1}{2m}(P + \mu Q).$$

In der folgenden Tabelle sind die Werthe von P und log brigg Q für die um je 10° steigenden Werthe des Emanationswinkels ε von $\varepsilon = o$ bis $\varepsilon = 90°$ angegeben. In der nächstfolgenden Tabelle ist für Kremserweiss und Königspapier das Verhältniss L/L_0 (unter L_0 die senkrecht ausstrahlende Lichtmenge bei $\varepsilon = o$ verstanden) berechnet; zur Vergleichung sind in der letzten Columne die Werthe von $\cos\varepsilon$ hinzugefügt.

ε	P	log Q
0°	1,00000	0,14186
10	0,99235	0,13759
20	0,96891	0,12432
30	0,92820	0,10053
40	0,86753	0,06311
50	0,78256	0,00622
60	0,66667	9,91819—10
70	0,50971	9,77205—10
80	0,29591	9,48187—10
90	0,00000	— ∞

I. Kremserweiss: $\log\mu = 0,24433$.
II. Königspapier: $\log\mu = 0,21829$.

ε	I. $\frac{L}{L_0}$	II. $\frac{L}{L_0}$	$\cos\varepsilon$
0°	1,00000	1,00000	1,00000
10	0,99087	0,99087	0,98481
20	0,96293	0,96301	0,93969
30	0,91478	0,91499	0,86603
40	0,84391	0,84430	0,76604
50	0,74657	0,74719	0,64279
60	0,61766	0,61851	0,50000
70	0,45094	0,45197	0,34202
80	0,24126	0,24221	0,17365
90	0,00000	0,00000	0,00000

Da in dem Ausdruck L die Winkel i und ε mit einander vertauschbar sind, so gelten die nämlichen Zahlen auch für die verschiedenen Werthe des Incidenzwinkels, wenn der Emanationswinkel constant = o ist.

33. Vergleichen wir nun diese Zahlen mit den von Seeliger[1]) publicirten Beobachtungsresultaten. Dieselben sind in den folgenden beiden Tabellen enthalten.

I. Emanationswinkel ε constant.

i	Marmor	Papier	Carton	Porzellan
0°	1000	1000	1000	1000
10	963	990	981	982
20	920	980	960	942
30	853	970	940	890
40	765	942	917	830
50	655	870	850	730
60	513	712	670	615
70	340	500	380	472
80	165	250	185	253

II. Incidenzwinkel i constant[2]).

ε	Marmor	Papier	Carton	Porzellan
0°	sehr nahe dem Cosinus proportional	1000	1000	1000
10		1054	1044	1004
20		1099	1057	977
30		1148	1048	918
40		1180	1026	831
50		1131	919	720
60		1020	760	590

1) Seeliger, Vierteljahrsschr. der astron. Gesellsch. Bd. 20, p. 267, 1885.

2) In der Originaltabelle sind, um die Abweichungen von dem Cosinusgesetz besser hervortreten zu lassen, die Verhältnisse der ge-

Von den beobachteten Substanzen entspricht nur der Marmor näherungsweise dem Cosinusgesetz; nach unserer Theorie würde dasselbe nur gelten bei allseitiger (diffuser) Beleuchtung für einen Körper, welcher der absoluten Weise nahekommt.

Die Zahlen für Papier und Carton stehen zwar denjenigen des neuen Gesetzes näher als denjenigen des Cosinusgesetzes; doch kann von einer auch nur annähernden Uebereinstimmung nicht die Rede sein. Da diese Materialien jedoch durchscheinend sind, so kann die für vollkommen undurchsichtige Platten abgeleitete Formel (22) auf sie überhaupt nicht angewendet werden, sondern es wäre die complicirtere Formel (20), welche für eine beliebige Dicke der Platte gilt, heranzuziehen. Diese aber würde für eine dünne Schicht die ausgestrahlte Lichtmenge unabhängig von Incidenz- und Emanationswinkel, also durchweg = 1000 ergeben. Ein Anwachsen dieser Lichtmenge mit zunehmendem Emanationswinkel bis zu einem Maximum, wie es aus den Beobachtungsreihen II hervortritt, kann durch das neue Emanationsgesetz ebensowenig wie durch das Cosinusgesetz dargestellt werden.

Auch mit der dem Lambert'schen sowie dem neuen Gesetz gemeinsamen Forderung, dass Einfalls- und Ausstrahlungswinkel mit einander vertauschbar sein müssen, stehen die Zahlen für Papier und Carton im Widerspruch, falls angenommen wird, dass der constante Emanationswinkel in I dem constanten Incidenzwinkel in II gleich gewählt worden ist.

Dagegen stimmen die für Porzellan gefundenen Werthe mit den aus dem neuen Emanationsgesetz berechneten ziemlich nahe überein, während sie von dem Cosinusgesetz be-

---

messenen Lichtmengen zu $\cos \varepsilon$ angegeben; hier sind der Gleichförmigkeit wegen durch Multiplication mit $\cos \varepsilon$ diese Lichtmengen selbst wieder hergestellt.

trächtlich abweichen. Der Rechnung wurde die Albedo 0,4 zu Grunde gelegt, welche **Lambert** als ungefähren Werth für weisse Körper überhaupt annimmt. Der constante Emanationswinkel bei I sowie der constante Incidenzwinkel bei II wurden beide = o angenommen. Da die beiden Beobachtungsreihen für Porzellan der Bedingung der Vertauschbarkeit von i und ε nicht unbedingt widersprechen, wurden aus ihnen noch die Mittelwerthe $\frac{1}{2}$ (I + II) gebildet, welche noch besser mit den aus der Theorie berechneten Werthen übereinstimmen. Neben jeder Beobachtungsreihe sind in der folgenden Tabelle in den Columnen a und b die Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Werthen für das neue Gesetz (a) und für das Cosinusgesetz (b) angegeben. Während die Abweichungen bei dem letzteren bis 31% des beobachteten Werthes ansteigen, erreichen sie bei dem ersteren nur 4%.

i oder ε	berechnet	Porzellan I	a	b	Porzellan II	a	b	Porzellan $\frac{1}{2}$(I+II)	a	b
0°	1000	1000	0	0	1000	0	0	1000	0	0
10	991	982	− 9	− 3	1004	+13	+19	993	+ 2	+ 8
20	963	942	−21	+ 2	977	+14	+37	960	− 3	+ 20
30	915	890	−25	+ 24	918	+ 3	+52	904	−11	+ 38
40	844	830	−14	+ 64	831	−13	+65	831	−13	+ 65
50	747	730	−17	+ 87	720	−27	+77	725	− 22	+ 82
60	619	615	− 4	+115	590	−29	+90	603	−16	+103
70	452	472	+20	+130	—	—	—	—	—	—
80	242	253	+11	+ 79	—	—	—	—	—	—

Im Vorhergehenden ist zugleich der Weg vorgezeichnet für die theoretische Behandlung des durch einen durchscheinenden trüben Körper hindurchgegangenen diffusen Lichtes; ein näheres Eingehen auf diese Frage möge jedoch einer späteren Mittheilung vorbehalten bleiben.