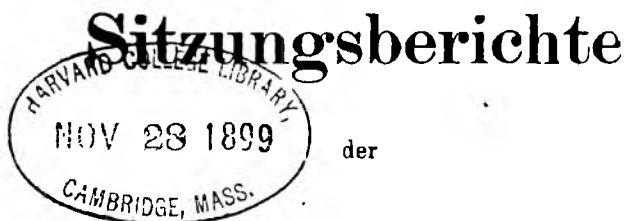


Y. Soc 1727.15



Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1899. Heft II.

München.

Verlag der k. Akademie.

1899.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Grundlagen einer mechanischen Theorie des elastischen Stosses und der inneren Reibung in kontinuierlichen Medien.

Von **Arthur Korn.**

(Eingelaufen 8. Juli.)

Man darf wohl sagen, dass sich in der Mechanik zwei Principien über jeden Zweifel bewährt haben:

- 1) das Princip von D'Alembert,
- 2) das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft;

das erste ist insofern allgemeiner, als es uns jeden mechanischen Vorgang in allen seinen Einzelheiten ergiebt, während wir aus dem zweiten immer nur eine specielle Seite dieses Vorganges gewinnen können.

Zur Versöhnung der gegenwärtigen Theorieenbildungen in der Physik wäre es nun von Wichtigkeit, wenn man das Princip der lebendigen Kraft immer gradezu aus dem Princip von D'Alembert ableiten könnte; das ist nun bei allen reinmechanischen Problemen stets möglich gewesen mit einigen speciellen Ausnahmen, bei denen wohl die Schuld in der Stellung der betreffenden Aufgabe zu suchen ist. Ein Beispiel hierfür liefert das Problem des Stosses zwischen zwei materiellen Teilchen:

Wenn zwei materielle Teilchen m_1, m_2 in der Richtung der x Axe mit den Geschwindigkeiten V_1, V_2 fortfliegen, so werden sie, falls V_1 grösser als V_2 (und zu irgend einer Anfangszeit die x Koordinate von m_2 grösser ist, als die von m_1), in einem

bestimmten Momente zusammenstossen; es ergibt sich aus dem D'Alembert'schen Princip — es ist dies eine von D'Alembert selbst gegebene Anwendung seines Princip's — dass die beiden Teilchen nach dem Stoss mit der gemeinsamen Geschwindigkeit:

$$V_1' = V_2' = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}$$

weiterfliegen, und das Princip der lebendigen Kraft

$$\frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2'^2$$

wird im allgemeinen nicht erfüllt sein.

Der Grund dieser Nichtübereinstimmung ist — das hebt bereits D'Alembert in seiner Dynamik selbst hervor — in den Unstetigkeiten im Augenblicke des Stosses zu suchen, und man darf diese Aussage ganz allgemein machen:

Ueberall, wo bei mechanischen Problemen das D'Alembert'sche Princip zu Verstössen gegen das Princip der lebendigen Kraft führt, sind Verstösse gegen das Princip der Stetigkeit in den Voraussetzungen des betreffenden Problems die Ursache.

Wenn wir den sogenannten elastischen Stoss, der mit dem Princip der lebendigen Kraft in Einklang ist, aus dem D'Alembert'schen Princip herleiten wollen, müssen wir uns von allen Unstetigkeiten frei machen, und wir stellen uns das Problem in folgender Weise:

Der ganze Raum ist erfüllt durch ein inkompressibles Kontinuum, wir betrachten in demselben zwei materielle Teilchen m_1 und m_2 , d. h. zwei die kleinen Volumina τ_1 und τ_2 erfüllende kontinuierliche Medien, die — allerdings nur sehr grossen Drucken gegenüber — einer geringen Kompression resp. Dilatation fähig sind; die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w sind im ganzen Raum, also auch an den Oberflächen von τ_1 und τ_2 stetig.

Aussen wie innen bestehen Gleichungen von der Form:

$$1) \quad \begin{cases} \mu \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \mu \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \mu \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \end{cases}$$

wo p eine stetige Funktion der Zeit und der Stelle, den Druck des Kontinuums vorstellt. Ferner ist aussen:

$$2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

infolge der Inkompressibilität des Aussenmediums, innen besteht ausser der Kontinuitätsgleichung

$$3^a) \quad \frac{du}{dt} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

noch eine Relation:

$$3^b) \quad F(\mu, p) = 0,$$

die wir hier nicht als bekannt voraussetzen brauchen, abgesehen von der Kenntnis, dass die Dichtigkeit μ nur durch ausserordentlich grosse Druckschwankungen geringe Veränderungen erleiden kann.

Wir suchen die Bedingungen auf, unter welchen die Geschwindigkeitskomponenten im ganzen Raume von der Form sein können:

$$4) \quad \begin{cases} u = u_0 + L \sin \frac{t}{T} 2\pi, \\ v = v_0 + M \sin \frac{t}{T} 2\pi, \\ w = w_0 + N \sin \frac{t}{T} 2\pi, \end{cases}$$

wo T eine gegen die Zeiteinheit sehr kleine Schwingungsdauer vorstellt und, wie immer, über u_0, v_0, w_0, L, M, N die Voraussetzung gemacht wird, dass:

$$5^a) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} u_0 & v_0 & w_0 \\ L & M & N \end{array} \right\} \text{ nicht gegen die Geschwindigkeitseinheit,}$$

$$5^b) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{du_0}{dt} & \frac{dv_0}{dt} & \frac{dw_0}{dt} \\ \frac{dL}{dt} & \frac{dM}{dt} & \frac{dN}{dt} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{nicht gegen die Grösse} \\ \text{Geschwindigkeitseinheit} \\ \text{Zeiteinheit} \end{array}$$

von der Ordnung $\frac{\text{Zeiteinheit}}{T}$ gross sein sollen.

Die aus 1) bis 5) folgenden Bedingungen sind: Es besteht eine Funktion φ von der Beschaffenheit, dass bis auf kleine Grössen:

$$6) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ M = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ N = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{array} \right\} \text{ im ganzen Raume,}$$

$$7) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \text{ im Aussenraume}$$

und:

$$8) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = k \cdot \varphi, \text{ innerhalb } r_1 \text{ und } r_2,$$

wo k eine Konstante ist, die von der Kompressibilität der Teilchen m_1 und m_2 abhängt und hier zur Vereinfachung für beide Teilchen von derselben Grösse vorausgesetzt werden möge. Zur Ableitung von 8) aus 3^a) und 3^b) brauchen wir, wie leicht zu übersehen ist, die Relation 3^b) selbst nicht zu kennen, abgesehen von der Kenntnis, dass die Dichtigkeit μ nur durch ausserordentlich grosse Druckschwankungen geringe Veränderungen erleiden kann.

Schliesslich müssen die Ableitungen von φ im ganzen Raume, also auch bei dem Durchgange durch die Oberflächen

ω_1 und ω_2 von τ_1 und τ_2 stetig sein und im Unendlichen¹⁾ die Bedingungen der Ableitungen von Potentialfunktionen erfüllen.

Die Gleichungen 6) bis 8) stellen ein ganz bestimmtes Problem der Potentialtheorie dar, wenn an der grossen Kugel-
fläche (P) ein gegebener periodischer Druck vorausgesetzt wird,
durch den die Konstante:

$$9) \quad c = - \frac{\int \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\omega^3}{\tau}, \quad (\tau_1 = \tau_2 = \tau \text{ vorausgesetzt}),$$

die „mittlere Kompression“ der Teilchen m_1, m_2 gegeben ist.

Das Problem ist durch folgende kombinatorische Methode lösbar:

Man bilde successive die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 10_0) \quad \varphi_0 &= c, \\ 10_1) \quad \varphi_1 &= - \frac{k}{4\pi} \int_{\tau_1} \frac{c}{r} d\tau - \frac{k}{4\pi} \int_{\tau_2} \frac{c}{r} d\tau, \\ 10_2) \quad \varphi_2 &= - \frac{k}{4\pi} \int_{\tau_1} \frac{\varphi_1}{r} d\tau - \frac{k}{4\pi} \int_{\tau_2} \frac{\varphi_1}{r} d\tau, \\ 10_3) \quad \varphi_3 &= - \frac{k}{4\pi} \int_{\tau_1} \frac{\varphi_2}{r} d\tau - \frac{k}{4\pi} \int_{\tau_2} \frac{\varphi_2}{r} d\tau, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

dann folgt:

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots) &= 0, \text{ im Aussenraume,} \\ \Delta(\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots) &= k(\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots), \\ &\text{innerhalb } \tau_1 \text{ und } \tau_2, \end{aligned}$$

es ist also:

$$11) \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots$$

¹⁾ An einer grossen Kugel- ω fläche (P).

²⁾ Wir setzen ω, τ , wenn man dafür sowohl ω_1, τ_1 , als auch ω_2, τ_2 schreiben kann; ν bezeichnet die innere Normale.

die gesuchte Funktion φ , falls diese Reihe konvergiert, was jedenfalls eintritt, wenn k einen gewissen endlichen Wert nicht überschreitet.

Betrachten wir nun die Funktionen $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \dots$ etwas genauer; die Funktion φ_1 ist dem Newton'schen Potential der Teilchen m_1 und m_2 proportional; diesem Gliede entspricht eine scheinbare Anziehungskraft der beiden Teilchen von der Grösse

$$12_1) \quad R_1 = \frac{k}{\varrho^2} (a_0 + D_1),$$

wo ϱ die Entfernung der beiden Teilchen, D_1 eine Grösse vorstellt, die gegen die Konstante a_0 von der Ordnung des Verhältnisses der Dimensionen von $\tau_1 \tau_2$ gegen die Entfernung der beiden Teilchen klein ist.¹⁾

Nimmt man nun zur Berechnung der scheinbaren Wechselwirkung noch das zweite Glied φ_2 der Reihe 11) hinzu, so ergibt die Rechnung, dass zu der Anziehungskraft 12₁) infolge des Gliedes φ_2 eine Abstossungskraft von der Grösse

$$12_2) \quad R_2 = \frac{k^2}{\varrho^3} (b_0 + D_2)$$

hinzukommt.

Man kann in dieser Weise fortgehend noch weitere Glieder für die Wechselwirkung der beiden Teilchen berechnen, und es wird das dritte Glied mit dem Faktor k^3 , das vierte mit dem Faktor k^4 u. s. w. behaftet sein.

Vernachlässigt man bereits k^3 , so erhält man nur zwischen m_1 und m_2 die Gravitationswirkung; vernachlässigt man aber erst k^2 , so wird bei genügender Annäherung von m_1 und m_2 (wobei jedoch ϱ immer noch gegen die Dimensionen der Teilchen gross bleiben möge) die Abstossungskraft R_2 über die Gravitationswirkung R_1 die Oberhand gewinnen, d. h. es werden sich dann die Teilchen m_1 und m_2 umgekehrt proportional der fünften Potenz von ϱ abstossen. Damit gelangen wir zu dem

¹⁾ Wir nehmen die Entfernung der beiden Teilchen gegen ihre Dimensionen ausserordentlich gross an.

von Maxwell untersuchten Fall der Wechselwirkung zweier Teilchen m_1 und m_2 .¹⁾

Die Teile m_1 und m_2 können in diesem Falle überhaupt nicht zusammenstossen, sie werden sich vielmehr nach einer bestimmten Annäherung wieder von einander entfernen, und zwar so, als ob sie einen elastischen Stoss auf einander ausgeübt hätten; das Princip der lebendigen Kraft bleibt gewahrt.

Wir gelangen so, ohne über die Art der Kompressibilität der Teilchen m_1 und m_2 mehr zu wissen, als dass ihre Dichtigkeiten nur durch ausserordentlich grosse Druckschwankungen geringe Veränderungen erleiden können, zu einer mechanischen Theorie des elastischen Stosses zwischen m_1 und m_2 .

Wir gelangen mit unserem Wechselwirkungsgesetze aber auch zu gleicher Zeit in bekannter Weise zu einer mechanischen Theorie der inneren Reibung in kontinuierlichen Medien, und es dürften die eben auseinandergesetzten Anschauungen auch ein neues Licht auf den Zusammenhang der beiden grossen kinetischen Reibungstheorien von Maxwell und O. E. Meyer werfen.

¹⁾ Maxwell, Phil. Mag. 35, 1868; Kirchhoff, Wärmetheorie, p. 156; Boltzmann, Gastheorie, 1. T., p. 153.