Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXV. Jahrgang 1895.

München.

Verlag der K. Akademie.

1896.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber gewisse Systeme Pfaff'scher Gleichungen.

Von E. v. Weber.

(Eingelaufen 7. Dezember.)

Die Theorie der besonderen Systeme Pfaff'scher Gleichungen, welche in der vorliegenden Mitteilung untersucht werden, umfasst diejenige der partiellen Differentialgleichungen in drei Veränderlichen als einen speciellen Fall, und bildet gleichzeitig die Grundlage einer allgemeinen Integrationstheorie der letzteren; es gelingt nämlich auf Grund der nachfolgenden Entwicklungen, die Darboux'sche Integrationstheorie der Gleichungen 2. O.[1]) nicht nur zu vervollständigen und nach Lie'schen Principien geometrisch zu interpretieren, sondern auch auf Gleichungen und Gleichungssysteme beliebiger Ordnung zu übertragen.[2])

Im ersten Abschnitt entwickeln wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die genannten Pfaff'schen Systeme Integralflächen der grösstmöglichen Mannigfaltigkeit besitzen und charakterisieren hierdurch eine Klasse von Inte-

1) Ann. de l'Ec. Norm. VII, 1870; vgl. auch König, Math. Ann. 24.

2) Ansätze in dieser Richtung finden sich bereits in den Bäcklund'schen Abhandlungen Math. Ann. 11 und 13; der zuletzt genannte Aufsatz enthält auch schon z. T. die Resultate, welche ich in einer früheren Mitteilung (Sitzungsber. der k. bayer. Ak., 1895, Bd. XXV, Heft I) unter III gegeben habe.

grationsproblemen, welche die partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung in 3 Variabeln und die Systeme solcher Gleichungen umfasst; im zweiten Abschnitt werden hinreichende (aber im allgemeinen nicht notwendige) Bedingungen dafür angegeben, dass sich die im I. Teil studierten Integrationsprobleme auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführen lassen.

I. Abschnitt.

1. Sind x, y unabhängige, z eine abhängige Variable, so sei:

$$\alpha_i^{(k)} = \frac{\partial^k z}{\partial x^{k-i}\,\partial y^i} \quad (\alpha_0^{(0)} = z).$$

Verstehen wir unter f eine Funktion von x, y, z, $\alpha_0^{(1)}, \ldots \alpha_n^{(n)}$, unter δx, dx, .. $d\alpha_n^{(n)}$ beliebige Incremente, so setzen wir:

$$D_x^{(\nu)}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{s=0}^{\nu} \sum_{r=0}^{s} \alpha_r^{(s+1)} \frac{\partial f}{\partial \alpha_r^{(s)}}$$

$$D_y^{(\nu)}(f) = \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{s=0}^{\nu} \sum_{r=0}^{s} \alpha_{r+1}^{(s+1)} \frac{\partial f}{\partial \alpha_r^{(s)}}$$

$$\delta f = D_x^{(n-1)}(f)\,\delta x + D_y^{(n-1)}(f)\,\delta y + \sum_{s=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial \alpha_s^{(n)}}\,\delta \alpha_s^{(n)},$$

$$d f = D_x^{(n-1)}(f)\,d x + D_y^{(n-1)}(f)\,d y + \sum_{s=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial \alpha_s^{(n)}}\,d \alpha_s^{(n)}.$$

also z. B.:

$$\delta \alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k+1)}\,\delta x + \alpha_{i+1}^{(k+1)}\,\delta y; \quad d\alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k+1)}\,dx + \alpha_{i+1}^{(k+1)}\,dy$$

(1) $\qquad (i = 0, 1, \ldots k;\; k = 0, 1, \ldots n-1).$

Ist ferner stets:

$$d\,\delta x = \delta\,dx, \quad d\,\delta y = \delta\,dy, \quad d\,\delta\alpha_i^{(n)} = \delta\,d\alpha_i^{(n)},$$

so folgt aus (1)

$$d\,\delta\alpha_i^{(k)} = \delta\,d\alpha_i^{(k)} \quad (k = 0, 1, \ldots n-2),$$

während wir die Ausdrücke

$$d\,\delta\alpha_{i-1}^{(n-1)} - \delta\,d\alpha_{i-1}^{(n-1)} = d\alpha_{i-1}^{(n)}\,\delta x - \delta\alpha_{i-1}^{(n)}\,dx + d\alpha_i^{(n)}\,\delta y - \delta\alpha_i^{(n)}\,dy$$
$$= (d\,\delta)_i^{(n)} \quad (i = 1, 2, \ldots n)\,[1]$$

setzen wollen. Notieren wir noch die Identität:

$$(2) \qquad d\,(\delta f) - \delta\,(df) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \alpha_{i-1}^{(n-1)}}\,(d\,\delta)_i^{(n)}$$

2. Betrachten wir nun die k Pfaff'schen Ausdrücke:

$$(3) \qquad (\delta)_i = M_i\,\delta x + N_i\,\delta y + \sum_{s=0}^{n} A_{s,i}\,\delta\alpha_s^{(n)}$$
$$(i = 1, 2, \ldots k;\ k \geqq 1 \text{ und } \leqq n)$$

worin die M_i, N_i, $A_{s,i}$ Funktionen von x, y, z, $\alpha_0^{(1)}, \ldots \alpha_n^{(n)}$ bedeuten. Wir nehmen an, dass aus dem Gleichungssystem:

$$(4) \qquad (\delta)_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots k)$$

keine Relation zwischen δx, δy allein folgt, so dass nicht alle k-gliedrigen Determinanten der Matrix

$$(5) \qquad \left\| \begin{array}{cccc} A_{0,1}, & A_{1,1}, & \ldots & A_{n,1} \\ A_{0,2}, & \ldots & & . \\ . & & & \\ A_{0,k} & . & & A_{n,k} \end{array} \right\|$$

identisch verschwinden, dass dagegen alle $k+2$-gliedrigen Determinanten der aus $2k$ Zeilen und $n+3$ Colonnen bestehenden Matrix

$$(6) \qquad \left\| \begin{array}{cccccc} . & . & . & . & . & \\ M_i, & A_{0,i}, & A_{1,i}, & . & A_{n,i}, & 0 \\ N_i, & 0, & A_{0,i}, & \ldots & \ldots & A_{n,i} \\ . & & . & & . & . \end{array} \right\|$$

[1] Vgl. den § 4 meiner Arbeit: „Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen", Math. Ann. 47.

identisch Null sind, ohne dass dies bei allen $k+1$-gliedrigen Determinanten der Fall ist.

Aus dem Verschwinden aller $k+2$-gliedrigen Determinanten der Matrix, die aus (6) durch Streichung der ersten Colonne hervorgeht, und aus dem Umstande, dass nicht alle k-gliedrigen Determinanten (5) Null sind, lässt sich beweisen, dass die k Gleichungen mit der Unbekannten μ:

$$\varphi_i(\mu) \equiv \sum_{s=0}^{n} A_{s,i}\,\mu^{n-s} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots k) \tag{7}$$

genau $n-k+1$ Wurzeln gemein haben. Seien dieselben durch die Gleichung

$$\chi(\mu) \equiv \sum_{r=0}^{n-k+1} \varrho_r\,\mu^{n-k+1-r} = 0$$

definiert, so kann man also setzen:

$$\varphi_i(\mu) \equiv \chi(\mu) \cdot \sum_{r=0}^{k-1} \lambda_{r\,i}\,\mu^{k-1-r}.$$

Die $\lambda_{r\,i}$, ϱ_i sind rational durch die $A_{s,j}$ ausdrückbar; umgekehrt hat man:

$$A_{s,j} \equiv \sum_{r=0}^{s} \varrho_r\,\lambda_{s-r,j}. \tag{8}$$

3. Aus unseren Voraussetzungen über die Ausdrücke (3) folgt ferner, dass sich die $2k$ Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} U_i &\equiv M_i + \sum_{s=0}^{n} A_{s,i}\,\alpha_s^{(n+1)} = 0 \\ V_i &\equiv N_i + \sum_{s=0}^{n} A_{s,i}\,\alpha_{s+1}^{(n+1)} = 0 \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, \ldots k) \tag{9}$$

auf genau $k+1$ in den $\alpha_i^{(n+1)}$ unabhängige Gleichungen reducieren. Diese können nun auf folgende Form gebracht werden:

(10) $$K_i = \sum_{s=0}^{n-k+1} \varrho_s \, \alpha_{s+i}^{(n+1)} + \varkappa_i = 0 \quad (i = 0, 1, .. k).$$

In der That kann man die Funktionen $\varkappa_i$ eindeutig so bestimmen, dass für jeden Wert der $\alpha_i^{(n+1)}$ die Beziehungen gelten:

(11) $$U_i = \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_{si} K_s, \quad V_i = \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_{si} K_{s+1};$$

denn die Coefficienten der $\alpha_i^{(n+1)}$ sind wegen (8) auf beiden Seiten gleich, und die Vergleichung der von $\alpha_i^{(n+1)}$ freien Glieder liefert für die Unbekannten $\varkappa_i$ die $2k$ Bedingungen:

$$M_i = \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_{si} \varkappa_s; \quad N_i = \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_{si} \varkappa_{s+1};$$

dass aber alle $k+2$-gliedrigen Determinanten der zu diesen Gleichungen gehörigen Matrix verschwinden, ohne dass dies alle $k+1$-gliedrigen thun, folgt aus den Voraussetzungen der N. 2, wenn man für die A_{sj} ihre Werte (8) in (6) substituirt und beachtet, dass ϱ_0 als nicht identisch verschwindend angenommen werden kann.

Da man aus denselben Gründen die K_s vermöge (11) als lineare homogene Funktionen der U_i, V_i ausdrücken kann, so sind die Systeme (9) und (10) völlig äquivalent.

4. Als „Charakteristik n. O." des Pfaff'schen Systems (4) bezeichnen wir jeden Streifen n. O., der einem der $n-k+1$ folgenden Gleichungssysteme genügt:

(12) $dy = \varLambda_\nu \, dx$

(13) $d\alpha_i^{(r)} = \left(\alpha_i^{(r+1)} + \varLambda_\nu \, \alpha_{i+1}^{(r+1)}\right) dx \, (i = 0, .. r; \; r = 0, .. n-1)$

(14) $d\alpha_i^{(n)} = \left(\alpha_i^{(n+1)} + \varLambda_\nu \, \alpha_{i+1}^{(n+1)}\right) dx \, (i = 0, 1, .. n)$,

unter $\varLambda_1, \varLambda_2, .. \varLambda_{n-k+1}$ die Wurzeln der Gleichung

(15) $$\chi(-\varLambda) = 0,$$

unter den $\alpha_i^{(n+1)}$ Funktionen von $x \ldots \alpha_n^{(n)}$ verstanden, die (10) befriedigen. Die Elimination der $\alpha_i^{(n+1)}$ aus (10) (14) führt wegen (15) auf die folgenden Gleichungen, die (14) ersetzen können:

$$(16) \qquad \sum_{s=0}^{n-k} B_{s,\nu}\, d\alpha_{i+s}^{(n)} + \varkappa_i\, dx = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots k),$$

$$\left(B_{s,\nu} = \sum_{r=0}^{s} \varrho_r \,(-\Delta_\nu)^{s-r}\right).$$

Aus unserer Definition folgt, dass alle ∞^2 Flächenelemente $n+1$. O., die sich an eine Charakteristik anschliessen, den Gleichungen (10) genügen.

5. Ein mit dem Pfaff'schen System (12) (13) (16) äquivalentes System erhält man auch, wenn man in jeder der Identitäten

$$(17) \qquad (\delta)_i = \sum_{s=1}^{n} \varrho_{si}\, (d\,\delta)_s^{(n)} \quad (i = 1, 2, \ldots k)$$

die Coefficienten der δx, δy, $\delta \alpha_r^{(n)}$ auf beiden Seiten gleichsetzt, und hierauf die ϱ_{si} eliminiert. Zur Verification dieser Thatsache bemerken wir, dass aus der einzelnen Identität (17) durch die geschilderte Operation ausser den Relationen (12) (15) zwei Gleichungen für die $d\alpha_i^{(n)}$ hervorgehen, die andererseits auch erhalten werden, wenn man aus dem entsprechenden Gleichungspaar (9) und aus (14) die $\alpha_i^{(n+1)}$ eliminiert. Unsere Behauptung folgt dann aus der Aequivalenz von (9) und (10).

6. Ist nun s ein „gemeinsamer Streifen n. O. der Pfaff'schen Gleichungen (4)“, d. h. genügt s den Gleichungen (4), so folgt aus (17), dass die n Gleichungen

$$(18) \qquad (d\,\delta)_i^{(n)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

sich auf genau $n-k$ unabhängige reducieren, wenn die dx, dy, $d\alpha_i^{(n)}$ den Relationen (12) (16) genügen; es können nämlich nicht alle k-gliedrigen Determinanten der Matrix

$$\| \varrho_{si} \|$$

identisch verschwinden, da sich sonst entgegen unserer Voraussetzung über die Ausdrücke (3) für dieselben eine lineare Identität ergäbe. Wenn nun keine der Relationen

(19) $$\delta y = \varDelta_\nu \delta x \; (\nu = 1, 2, .. n-k+1)$$

erfüllt ist, so kann man aus (12) (16) (18) die Grössen dx, dy, $d\alpha_\nu^{(n)}$ eindeutig bestimmen, wie aus der Form dieser Gleichungen leicht hervorgeht. Bezeichnen wir mit $d_\nu x, d_\nu y$, $d_\nu \alpha^{(n)}$ dieses Lösungssystem, mit e, e', e'' successive Elemente n. O. von s, so gibt es $n-k+1$ zu e benachbarte, mit ihm vereinigt liegende Elemente e_ν ($x + d_\nu x, \ldots \alpha_n^{(n)} + d_\nu \alpha_n^{(n)}$); aus der geometrischen Bedeutung der Gleichungen (18) folgt dann[1]), dass diese Elemente mit e, e' zusammen auf demselben Element $n+1$. O. E gelegen sind, das nach der Schlussbemerkung der vorigen N. die Relationen (10) befriedigt. Desgleichen gibt es $n-k+1$ zu e' benachbarte Elemente e'_ν ($x + d_\nu x + \delta x + d_\nu \delta x, \ldots.$), die mit e' e'' zusammen ein den Relationen (10) genügendes Element $n+1$. O. E' bestimmen; die Incremente $d_\nu dx .. d_\nu \delta \alpha_n^{(n)}$ berechnen sich aus (12) (16) (18), nachdem man darin unter Berücksichtigung der N. 1 die $x .. \alpha_n^{(n)}$ durch $x + \delta x$ etc. ersetzt hat. Durch s geht mithin ein und nur ein Streifen $n+1$. O. S, dessen Elemente $E, E'..$ den Gleichungen (10) genügen[2]), und die Elemente e_ν, $e'_\nu \ldots$ erfüllen für $\nu = 1, ..$

---

[1]) Vgl. meine pag. 425 citierte Arbeit § 4.

[2]) Dasselbe folgt kürzer daraus, dass die Elimination der $\alpha_i^{(n+1)}$ aus (10) und:

$$\ldots\ldots \; \delta \alpha_i^{(n)} = \alpha_i^{(n+1)} \delta x + \alpha_{i+1}^{(n+1)} \delta y \; (i = 0, 1, .. n)$$

$n-k+1$ einen und denselben, auf S gelegenen, zu s benachbarten und mit ihm vereinigt liegenden Streifen s_1.

7. Verlangen wir nun, dass s_1 wieder ein Streifen des Pfaff'schen Systems (4) sei, so müssen vermöge unserer Annahmen über s die Beziehungen gelten:

$$d_\nu(\delta)_i = 0, \quad (i = 1, \ldots k)$$

wie auch e auf s gewählt sein mag. Da nun aus (17), indem man darin d und δ durch d_ν ersetzt, die Beziehungen

$$(d_\nu)_i = 0$$

folgen, so hat man auch $\delta(d_\nu)_i = 0$, da doch e' und e'_ν ebenso wie e und e_ν Elemente einer Charakteristik sind.

Mithin setzt sich unsere Forderung in die andere um, dass die (von den zweiten Differentialen freien) Ausdrücke

$$d_\nu(\delta)_i - \delta(d_\nu)_i \tag{20}$$

identisch verschwinden, wenn die $d_\nu x$, $d_\nu y$, $d_\nu \alpha_i^{(n)}$ den Relationen (12) (16), die $\delta x \ldots$ den Gleichungen (18) genügen. Nun sind aber die $d_\nu x$ etc. auch durch (12) und (14) definiert, unter den $\alpha_i^{(n+1)}$ Grössen verstanden, die (10) befriedigen, und das allgemeinste Incrementensystem $\delta \alpha_i^{(n)}$, das (18) erfüllt, ist demzufolge durch

$$\alpha_i^{(n+1)} \delta x + \alpha_{i+1}^{(n+1)} \delta y \tag{21}$$

gegeben, worin die $\alpha_i^{(n+1)}$ dieselbe Bedeutung haben, wie in (14), während die δx, δy ganz willkürlich bleiben.[1])

Führt man jetzt die Differentiationen in (20) nach N. 1 aus und ersetzt hinterher die Incremente durch ihre Werte (14) (21), so erhält man nach kurzer Rechnung als not-

---

auf die Bedingungen (4) führt, und dass, wenn diese erfüllt sind, aus den genannten Gleichungen die $\alpha_i^{(n+1)}$ sich eindeutig berechnen lassen, wenn keine der Relationen (19) erfüllt ist.

1) Vgl. das Citat auf pag. 429.

wendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass s_1 wieder ein Streifen des Pfaff'schen Systems (4) sei, die folgenden: Man muss vermöge der Gleichungen (9) oder (10) identisch haben:

$$(22) \qquad D_x^{(n)}(V_i) = D_y^{(n)}(U_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots k),$$

oder, was wegen (11) dasselbe ist:

$$(23) \qquad D_x^{(n)}(K_{s+1}) = D_y^{(n)}(K_s) \qquad (s = 0, 1, \ldots k-1).$$

8. Da somit, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, auf s_1 als einen gemeinsamen Streifen der Pfaff'schen Gleichungen (4) wieder dieselben Schlüsse angewendet werden können, wie auf s, so kommt man durch unbegrenzte Wiederholung dieser Schlussweise zu dem Resultat, dass durch s eine und nur eine Fläche v hindurchgeht, die den Gleichungen (4) sowohl als auch den $k+1$ partiellen Differentialgleichungen $n+1$. O. (10) identisch genügt. Bemerken wir nämlich, dass die Fläche v, sofern sie überhaupt existiert, schon durch die Forderung, s (und S) zu enthalten und irgend einer der Gleichungen (10) zu genügen, völlig bestimmt sein muss, so folgt die Existenz dieser Fläche aus den bekannten Fundamentaltheoremen[1]), wenn wir gewisse Continuitätsbedingungen als erfüllt ansehen; also:

„Bestehen die Relationen (23), so geht durch jeden gemeinsamen Streifen n. O. von (4), der keine der Gleichungen (19) befriedigt, eine und nur eine „Integralfläche“ des Pfaff'schen Systems (4), welche aus je ∞^1 Charakteristiken eines jeden der $n-k+1$ verschiedenen Systeme aufgebaut ist.“

Das so erhaltene Integral (4) hängt offenbar ab von $n-k+1$ arbiträren Funktionen je eines Arguments.[1])

---

1) Genügt s ausser den Relationen (4) auch einer der Gleichungen (19), ohne indes eine Charakteristik zu sein, so geht durch ihn eine Integralfläche von (4), die ihm entlang eine Rückkehr-

9. Sind die Voraussetzungen der NN. 2 und 8 in Betreff der Ausdrücke (3) erfüllt, so nennen wir die Gesamtheit der $n-k+1$ Charakteristikensysteme der Gleichungen (4) ein „unbeschränkt integrables Streifensystem" und bezeichen es mit dem Symbol $S^{(n)}_{n-k}$. Je nachdem nun die Ausdrücke (3) keine, oder 1, 2, . . k unabhängige lineare Combinationen der Form $\delta\Phi_i$ gestatten (unter den Φ_i Funktionen von x . . $a^{(n)}_n$ verstanden), ergiebt sich eine wichtige Einteilung der Systeme $S^{(n)}_{n-k}$ in $k+1$ Arten, die wir mit dem Symbol

24) $$S^{(n)}_{n-k,\,l}\,(l=0,\,1,\,..\,k)$$

bezeichnen wollen.[1] Besonderes Interesse bietet der Fall $l=k$; man kann dann die $(\delta)_i$ durch die $\delta\Phi_i$ ersetzen und demzufolge den Ausdrücken M_i, N_i, $A_{s,i}$ der N. 2 bez. die Bedeutungen

$$D^{(n-1)}_x(\Phi_i),\; D^{(n-1)}_y(\Phi_i),\; \frac{\partial\Phi_i}{\partial a^{(n)}_s}$$

beilegen. Die Bedingungen (23) sind jetzt eine Folge derjenigen der N. 2; man erkennt dies entweder nach N. 7 aus (2), indem man f durch die Φ_i ersetzt, oder direkt daraus, dass die Relationen (22) nunmehr identisch, nicht nur ver-

kante n. O. besitzt (vgl. meine pag. 425 citierte Arbeit, § 7); durch eine Charakteristik geht eine Schaar von Integralflächen, die noch von einer arbiträren Funktion eines Arguments abhängt. Die Integralflächen des Textes sind, als Schaaren von ∞^2 Flächenelementen aufgefasst, die allgemeinsten „Integraläquivalente" des Pfaff'schen Systems, das aus der ersten Gruppe der Gleichungen (1) und aus (4) gebildet wird.

1) Die in meiner früheren Note und in meiner Arbeit Math. Ann. 47 betrachteten Systeme sind demnach mit $S^{(n)}_{0,\,l}\,(l=0,1,..n)$, das Charakteristikensystem einer Gleichung n. O. mit $S^{(n)}_{n-1,\,1}$ zu bezeichnen; den Fall $S^{(1)}_{0,\,0}$ betrachtet gelegentlich Herr Bäcklund (Math. Ann. 13); Beispiele für die Fälle $S^{(2)}_{0,\,0}$ und $S^{(2)}_{0,\,1}$ finden sich in meiner oben citierten Arbeit.

möge (9), erfüllt sind. Die k in Bezug auf die $\alpha_r^{(n)}$ unabhängigen Gleichungen n. O.:

(25) $$\Phi_i = C_i \,(i = 1, 2, \ldots k),$$

in denen die C_i willkürliche Constante bedeuten und die wir als ein Involutionssystem bezeichnen, besitzen dann ein gemeinsames Integral mit $n-k+1$ arbiträren Funktionen, in dem Sinne, dass durch jeden ihrer gemeinsamen Streifen n. O. im allgemeinen eine und nur eine gemeinsame Integralfläche hindurchgeht.

10. Die vorstehenden Bemerkungen gelten auch, wenn einige der C_i, etwa die m ersten $(0 \leqq m \leqq k)$, durch Null ersetzt werden; die Bedingungen der N. 2 müssen jetzt vermöge der Gleichungen

$$\Phi_1 = 0, \ldots \Phi_m = 0$$

bestehen, und auf eben diese Relationen ist auch bei der Wahl des Ausgangsstreifens s (N. 6) Rücksicht zu nehmen.

11. Die Bedingungen (23) drücken aus, dass die Gleichungen $n+1$. O. (10) im Sinne der vorigen N. ein Involutionssystem bilden. Ist umgekehrt ein System von $k+1$ involutorischen, in Bezug auf die $\alpha_i^{(n+1)}$ linearen und unabhängigen Gleichungen $n+1$. O. vorgelegt, so kann man dasselbe, wie leicht zu sehen, auf die Form (10) bringen, worauf durch (3) und (17) ein System $S_{n-k,\,l}^{(n)}$ definiert ist, wenn man setzt:

$$M_i = \sum_{r=0}^{k-1} \lambda_{ri}\, \varkappa_r;\quad N_i = \sum_{r=0}^{k-1} \lambda_{ri}\, \varkappa_{r+1};\quad A_{s,\,i} = \sum_{r=0}^{s} \varrho_r\, \lambda_{s-r,\,i},$$

unter den λ_{ri} irgend welche k^2 Funktionen von $x \ldots \alpha_n^{(n)}$ mit nicht identisch verschwindender Determinante verstanden. Der Charakter l des Systems $S_{n-k,\,l}^{(n)}$ bestimmt sich dann durch algebraische Operationen, die l integrabeln Combinationen $\delta\Phi_i$ der Ausdrücke $(\delta)_i$ durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme.

II. Abschnitt.

1. Wir betrachten ein Pfaff'sches System

$$(\delta)_i = 0 \quad (i = 1, 2 \,..\, k) \tag{1}$$

von der in I, NN. 2 und 7 geschilderten Beschaffenheit und das dazu gehörige System von $k+1$ linearen partiellen Differentialgleichungen $n+1$. O. (vgl. I, (10)):

$$K_i = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots k). \tag{2}$$

Aus den Beziehungen I (23) folgt dann leicht: Differentiirt man die Relationen (2) j-mal partiell nach x und y, wobei die Grössen $\alpha_i^{(h)}$ als Funktionen von x und y betrachtet werden, so reducieren sich die resultierenden Gleichungen vermöge aller vorhergehenden auf $k+j+1$ der Form:

$$K_i^{(j)} \equiv \sum_{h=0}^{m+1} \varrho_h \, \alpha_{h+i}^{(n+j+1)} + \varkappa_i^{(j)} = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots k+j), \tag{3}$$

worin zur Abkürzung $m = n - k$ gesetzt ist[1]).

2. Unter einer „Charakteristik $n+r$. 0." des Pfaff'schen Systems (1) verstehen wir einen Streifen $n+r$.0., der die folgenden Differentialgleichungen befriedigt:

$$dy = \varDelta_\mu \, dx; \tag{4}$$

$$d\alpha_i^{(h)} = \left(\alpha_i^{(h+1)} + \varDelta_\mu \, \alpha_{i+1}^{(h+1)}\right) dx \, (i = 0, 1 \,..\, h;\ h = 0, 1, \ldots \ldots n+r-1); \tag{5}$$

$$d\alpha_i^{(n+r)} = \left(\alpha_i^{(n+r+1)} + \varDelta_\mu \, \alpha_{i+1}^{(n+r+1)}\right) dx \, (i = 0, 1 \,..\, n+r), \tag{6}$$

unter $\varDelta_\mu$ eine der $m+1$ Wurzeln $\varDelta_1 \,..\, \varDelta_{m+1}$ der Gleichung

$$\chi(-\varDelta) = 0 \tag{7}$$

---

1) $K_i^{(0)} \equiv K_i$; $\varkappa_i^{(0)} \equiv \varkappa_i$.

(vgl. I (15)), unter den Grössen $\alpha_0^{(n+1)} \dots \alpha_{n+r}^{(n+r)}$ irgendwelche Funktionen von $x\,y\,z\,\alpha_0^{(1)} \dots \alpha_n^{(n)}$ verstanden, die den Gleichungen

$$(8) \quad K_i^{(h)} = 0 \; (i = 0, 1 \dots k + h;\; h = 0, 1, \dots r - 1)$$

$$(9) \quad K_i^{(r)} = 0 \; (i = 0, 1 \dots k + r)$$

identisch genügen; die Systeme (8) (9) sollen auch von den Integrationsconstanten $x \dots \alpha_{n+r}^{(n+r)}$, mithin von allen Flächenelementen des Streifens erfüllt werden. Eine solche Charakteristik bezeichnen wir generell mit $C_\mu^{(n+r)}$. Die $m + 1$ Charakteristikensysteme $n + r.0.$ bilden zusammen ein unbeschränkt integrables Streifensystem $S_m^{(n+r)}$[1]).

Die Elimination der $\alpha_i^{(n+r+1)}$ aus (6) und (9) führt auf die $k + r + 1$ totalen Differentialgleichungen

$$(10) \dots [d]_{i,\mu} \equiv \sum_{h=0}^{m} B_{h,\mu}\, d\alpha_{i+h}^{(n+r)} + \varkappa_i^{(r)}\, dx = 0 \; (i = 0, 1, \dots k + r)$$

$$\left(B_{h,\mu} \equiv \sum_{j=0}^{h} \varrho_j (-\varDelta_\mu)^{h-j}\right)$$

die wir mit (4) (5) zusammen als die Definitionsgleichungen der $C_\mu^{(n+r)}$ bezeichnen wollen. Ist $\varDelta_\mu$ keine mehrfach zählende Wurzel von (7)[2]), so sind längs jedes Streifens $C_\mu^{(n)}$ ∞^1 $C_\mu^{(n+1)}$ bestimmt, deren einzelner durch Angabe eines seiner Elemente $n + 1.0.$ festgelegt ist; ebenso gehen durch jede $C_\mu^{(n+1)}$ ∞^1 $C_\mu^{(n+2)}$ etc.

3. Wir verstehen unter F eine Funktion der Grössen $x \dots \alpha_{n+r}^{(n+r)}$, setzen

$$A_i = \frac{\partial F}{\partial \alpha_i^{(n+r)}}$$

---

[1]) Vgl. I, N. 9; doch durchzieht dieses System nicht den ganzen Raum $x \dots \alpha_{n+r}^{(n+r)}$, sondern nur die durch (8) definierte Mannigfaltigkeit.

[2]) Vgl. § 1 meiner Arbeit in den Math. Ann. Bd. 47.

ferner, wie in I, N. 1:

$$dF = D_x^{(n+r-1)}(F)\,dx + D_y^{(n+r-1)}(F)\,dy + \sum_{h=0}^{n+r} A_h\,d\alpha_h^{(n+r)},$$

und nehmen an, dass dF eine integrable Combination der Definitionsgleichungen der $C_\mu^{(n+r)}$ sei, d. h. dass man für alle Werte der Incremente dx, dy, $d\alpha_i^{(n+r)}$ vermöge (8) identisch habe:

$$\sigma\,(dy - A_\mu\,dx) + \sum_{i=0}^{k+r} \sigma_i\,[d]_{i,\mu} = dF, \tag{11}$$

unter σ, σ_i nicht näher bestimmte Funktionen von $x \cdots \alpha_{n+r}^{(n+r)}$ verstanden. Solche integrable Combinationen sind z. B. die Ausdrücke $dK_i^{(r-1)}$; doch setzen wir voraus, dass aus den Gleichungen

$$dF = 0,\quad dK_i^{(r-1)} = 0 \quad (i = 0, 1 \ldots k + r - 1) \tag{12}$$

vermöge (8) keine Relation zwischen dx, dy allein folgt[1]), insbesondere also auch, dass zwischen den linken Seiten dieser Relationen keine lineare Identität besteht; dF sei dann eine *eigentliche* integrable Combination der $C_\mu^{(n+r)}$ genannt. Für F erhält man aus (11), indem man darin die Coefficienten der $dx \ldots$ auf beiden Seiten gleichsetzt und die σ, σ_i eliminiert, ein System homogener linearer partieller Differentialgleichungen 1. O., worin die Variabeln $x \ldots \alpha_{n+r}^{(n+r)}$ den Relationen (8) zu genügen haben, und sich die Zahl der unabhängigen Variabeln demgemäss reduciert. Alle etwa vorhandenen integrabeln Combinationen der $C_\mu^{(n+r)}$ werden also durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme gefunden.

---

[1]) Im Falle $r = 0$ soll dasselbe für die Gleichungen

$$dF = 0,\quad (d)_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots k)$$

gelten.

4. Unsere Annahme in Bezug auf F ist mit der andern äquivalent, dass der Ausdruck

$$D_x^{(n+r)}(F) + \varDelta_\mu D_y^{(n+r)}(F)$$

vermöge (8) (9) verschwinde, d. h. dass vermöge (8) eine Identität der Form

$$\sum_{h=0}^{k+r} \lambda_h K_h^{(r)} = \varrho\,(D_x^{(n+r)}(F) + \varDelta_\mu D_y^{(n+r)}(F)) \tag{13}$$

bestehe, unter ϱ, λ_i Funktionen von $x\,.\,.\,\alpha_{n+r}^{(n+r)}$ verstanden. Also verschwinden vermöge (8) alle $k+r+3$-gliederigen Determinanten der Matrix

$$\left\|\begin{array}{llllll} \varkappa_0^{(r)}, & \varrho_0, & \varrho_1, & \ldots & 0, & 0 \\ \varkappa_1^{(r)}, & 0, & \varrho_0, & \ldots & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ \varkappa_{k+r}^{(r)}, & 0, & 0, & \ldots & \varrho_m, & \varrho_{m+1} \\ D_x^{(n+r-1)}(F), & A_0, & A_1, & \ldots & A_{n+r}, & 0 \\ D_y^{(n+r-1)}(F), & 0, & A_0, & \ldots & A_{n+r-1}, & A_{n+r} \end{array}\right\| \tag{14}$$

was für F wieder ein System partieller Differentialgleichungen 1. O. darstellt, dessen gemeinsame Integrale aber nunmehr die etwaigen integrabeln Combinationen aller $m+1\,C_{(n+r)}$-systeme liefern.

Es möge umgekehrt F obigen Bedingungen genügen, aber nicht alle $k+r+2$-gliedrigen Determinanten der Matrix (14), insbesondere aber auch nicht alle aus den letzten $n+r+2$ Colonnen gebildeten,[1]) zum Verschwinden bringen; dann besitzen die Gleichungen (7) und:

$$\sum_{h=0}^{n+r} A_h\,(-\varDelta)^{n+r-h} = 0$$

---

1) Sonst würde aus (12) eine Relation für dx, dy folgen.

wie leicht ersichtlich, genau m gemeinsame Wurzeln, die mit $\varDelta_1 \ldots \varDelta_{r-1}\ \varDelta_{r+1} \ldots \varDelta_{m+1}$ bezeichnet und durch die Gleichung:

$$(15) \qquad \sum_{h=0}^{m} \varrho'_h (-\varDelta)^{m-h} = 0$$

gegeben seien. Man verificiert nunmehr leicht, dass eine Identität der Form (13) besteht, sowie dass die $k+r+2$ in den $\alpha_i^{(n+r)}$ unabhängigen Relationen, auf die sich demnach die Gleichungen (9) und:

$$D_x^{(n+r)}(F) = 0, \quad D_y^{(n+r)}(F) = 0$$

reducieren, die folgende Form erhalten können:

$$(16) \quad L_i^{(0)} = \sum_{h=0}^{m} \varrho'_h\, \alpha_{h+i}^{(n+r+1)} + l_i^{(0)} = 0 \quad (i = 0, 1, \cdot k + r + 1).$$

Durch j-malige Differentiation dieser Gleichungen, die vermöge (8) ein Involutionssystem bilden (I, N. N. 10, 11), erhält man vermöge (8) und der vorhergehenden Differentiationsgleichungen $k+r+j+2$ Gleichungen

$$(17) \qquad L_i^{(j)} = 0 \qquad (i = 0, 1 \ldots k + r + j + 1).$$

Die „Charakteristiken $C_\nu^{(n+r+r')}$" des Involutionssystems (16) sind definiert durch die Gleichungen:

$$dy = \varDelta_\nu dx;\ d\alpha_i^{(h)} = (\alpha_i^{(h+1)} + \varDelta_\nu \alpha_{i+1}^{(h+1)})\, dx \quad (h = 0, 1, \ldots k + r + r')$$

worin $\varDelta_\nu$ eine Wurzel von (15) bedeutet und die $\alpha_i^{(n+l)}$ die Relationen (8) (17) (18) identisch erfüllen, und bilden ein unbeschränkt integrables Streifensystem $S_{m-1}^{(n+r+r')}$[1]; die Gleichung

$$(18) \qquad F = C$$

---

1) Vgl. die Anm. pag. 435.

hat also mit (1) ein Integral gemein, das von m willkürlichen Funktionen je eines Arguments abhängt, indem durch jeden gemeinsamen Streifen $n+r$. O. von (1)[1]) und (18) eine und nur eine Fläche hindurchgeht, die den Gleichungen (1) (18) genügt.

5. Man entnimmt dem Vorhergehenden leicht den folgenden allgemeinen Satz:

„Ist $r' \geqq r$, F' eine Funktion von $x \ldots \alpha_{n+r'}^{(n+r')}$ und besitzen die Definitionsgleichungen der $C_\mu^{(n+r')}$ von (1) die integrabele Combination dF', so ist auch df eine solche, unter f irgend eine Funktion von F und F' verstanden."

6. Sei die ganze Zahl $s \geqq r$, ferner $\nu \mp \mu$, Φ eine Funktion von $x \ldots \alpha_{n+s}^{(n+s)}$, $d\Phi$ eine eigentliche integrable Combination der Definitionsgleichungen der $C_\nu^{(n+s)}$ von (1), so ist $d\Phi$ offenbar auch eine eigentliche integrable Combination der $C_\nu^{(n+s)}$ des Involutionssystems (16); also reducieren sich die $k+s+4$ Gleichungen:

$$L_i^{(s-r)} = 0, \quad D_x^{(n+s)}(\Phi) = 0, \quad D_y^{(n+s)}(\Phi) = 0$$

auf $k+s+3$ in den $\alpha_i^{(n+s+1)}$ unabhängige, die vermöge der vorhergehenden Gleichungen (17) und vermöge (8) ein Involutionssystem bilden, und die Gleichungen (1) (18) und $\Phi = C$ haben somit ein Integral mit $m-1$ willkürlichen Funktionen gemein; durch Wiederholung dieser Schlussweise erhält man schliesslich folgendes Theorem:

„Ist die ganze Zahl $\lambda \leqq m$, sind die partiellen Differentialgleichungen

(19) $$F_1 = C_1, \; F_2 = C_2 \ldots F_\lambda = C_\lambda$$

---

1) Ein Streifen $n+r$. O. von (1) ist ein solcher, dessen Elemente n. O. den Gleichungen (1), dessen Elemente $n+1$. O. den Relationen (2) etc. genügen.

bezw. von der Ordnung $n+r_1, \cdot\cdot n+r_\lambda$ und ist $n+r$ die grösste dieser Zahlen, besitzen ferner die Definitionsgleichungen der Charakteristiken $C_1^{(n+r_1)}, \ldots C_\lambda^{(n+r_\lambda)}$ des Pfaff'schen Systems (1) bez. die eigentlichen integrabeln Combinationen $dF_1 \ldots dF_\lambda$, so definieren das System (1) und die Gleichungen (19) durch ihre gemeinsamen Charakteristiken $n+r.0.$ ein unbeschränkt integrables Streifensystem $S_{m-\lambda}^{(n+r)}$ und besitzen daher ein gemeinsames Integral mit $m-\lambda+1$ arbiträren Funktionen, indem durch jeden ihrer gemeinsamen Streifen $n+r.0.$, der keine Charakteristik des Systems $S_{m-\lambda}^{(n+r)}$ ist, eine und nur eine gemeinsame Integralfläche hindurchgeht."

7. Wir nehmen endlich an, dass die Funktionen $F_1 \ldots F_m$, $F'_1 \ldots F'_m$ bez. die Ordnung $n+r_1, \ldots n+r_m$, $n+r'_1, \ldots n+r'_m$ besitzen, dass man habe $r_i > r'_i$ $(i=1,2,\ldots m)$, und dass r die grösste der Zahlen r_i sei. Es sei ferner für $i=1,2,\ldots m$ dF_i eine eigentliche integrable Combination der $C_i^{(n+r_i)}$, dF'_i eine solche der $C_i^{(n+r'_i)}$ des Pfaff'schen Systems (1); im Falle $r_i = r'_i$ setzen wir überdies voraus, dass zwischen den Ausdrücken

$$(20) \qquad dF_i,\ dF'_i,\ dK_h^{(r_i-1)}\ (h=0,1\ldots k+r_i-1)$$

bez. im Falle $r_i=0$, zwischen den Ausdrücken

$$(21) \qquad dF_i,\ dF'_i,\ (d)_j\ (j=1,2,\ldots k)^{1)}$$

keine lineare Identität bestehe.

Ist jetzt $s^{(n)}$ ein gemeinsamer Streifen n. O. der Gleichungen (1), der keiner der $m+1$ Relationen (4) genügt, so ist ihm entlang ein und nur ein Streifen $s^{(n+r)}$ bestimmt, dessen Elemente $n+r.0.$ die Relationen (8) befriedigen

---

[1] Vgl. die Anmerkung, pag. 436.

(I, N. 8). Drücken wir die zu $s^{(n+r)}$ gehörigen Grössen $x \dots \alpha_{n+r}^{(n+r)}$ als Funktionen eines Parameters aus und substituieren diese Werte in die m Funktionspaare F_i, F_i', so kann man die m Funktionen φ_i auf eine und wesentlich nur eine Weise so bestimmen, dass man für jeden Wert des Parameters identisch hat:

$$\varphi_i(F_i, F_i') \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \dots m).$$

Diese Bestimmung wäre nur dann unausführbar, wenn sich die beiden Funktionen eines Paars vermöge unserer Substitution auf Constante reducierten, dann aber wäre, wie leicht zu sehen, $s^{(n)}$ eine Charakteristik von (1), was ausgeschlossen wurde. Ist so die Form der Functionen φ_i gefunden, so ist $s^{(n+r)}$ ein gemeinsamer Streifen der Gleichungen (1) und:

$$\varphi_i(F_i, F_i') = 0 \quad (i = 1, 2, \dots m),$$

welche nach N. 5 und 6 mit (1) zusammen ein unbeschränkt integrables Streifensystem $S_0^{(n+r)}$ bestimmen. Das Letztere wäre nur dann nicht der Fall, wenn einer der Ausdrücke $d\varphi_i$ keine eigentliche integrable Combination des zugehörigen $C_i^{(n+r_i)}$-systems wäre; dann aber hätte man notwendig $r_i = r_i'$, und $s^{(n)}$ genügte einer der Relationen (4) oder es bestände zwischen den Ausdrücken (20) bezw. (21) eine lineare Identität, was unseren Annahmen gleichfalls widerspricht. Da nun die Integralflächen eines Systems $S_0^{(n+r)}$ sich durch Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen bestimmen lassen, da ausserdem auch die Funktionenpaare F_i, F_i' als Integrale solcher Gleichungen erhalten werden (N. 3), so können wir schliesslich den Satz aussprechen:

„Unter den zu Anfang dieser N. gemachten Voraussetzungen kann die Aufsuchung der allgemeinsten Integralfläche von (1) durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme geleistet werden." [1])

Existirt nicht für m, sondern nur für λ der $m+1$ Charakteristikensysteme von (1) je ein Funktionenpaar F_i, F_i' der geschilderten Beschaffenheit, so vereinfacht sich die Integration von (1) insoferne, als sie auf die Aufsuchung der Integralflächen gewisser Systeme $S_{m-\lambda}^{(n+r)}$ zurückkommt.

---

[1]) Ersetzt man im Vorstehenden das System (1) durch die einzige Gleichung

$$\delta F^{(n)} = 0$$

(I, N. 1), so erhält man die Integrationstheorie der part. Differentialgleichungen n. O. in 3 Variabeln, im Falle $n=2$ eine Erweiterung der Darboux'schen Theorie, indem die derselben anhaftende Beschränkung auf Funktionenpaare gleicher Ordnung aufgehoben erscheint.