Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXV. Jahrgang 1895.

München.
Verlag der K. Akademie.
1896.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Die 7-Systeme von Kegelschnitten, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer ebenen Curve 4. Ordnung gehen.

Von **M. Nöther** in Erlangen.

(*Eingelaufen 9. Februar.*)

Für die 315 Kegelschnitte, welche eine Curve 4. Ordnung in den Berührungspunkten von vier ihrer Doppeltangenten treffen, hat O. Hesse zuerst angegeben (Crelle's Journ., Bd. 40), dass man aus ihnen 7-Systeme bilden kann, die je durch die Berührungspunkte aller 28 Doppeltangenten hindurchgehen. Auf die von ihm (Cr. J. 49) gestellte Frage nach allen derartigen 7-Systemen bin ich in Bd. 15 der Mathem. Annalen[1]) so weit eingegangen, dass ich einmal 135 irreductible 7-Systeme mit „Tripeleigenschaft" nachwies, sodann 315.24 uneigentliche Systeme construirte, in welchen je einer der Kegelschnitte ausgezeichnet war. Aus Anlass der von der k. b. Akad. d. Wiss. demnächst erfolgenden Herausgabe der gesammelten Abhandlungen Hesse's möchte ich die Frage hier vollständig beantworten.

1. Bezeichnungen und Beziehungen. Ich bediene mich der Bezeichnung (ik), wo i, k von $1, 2, \ldots 8$ gehen, $k \gtrless i$, für die Doppeltangenten („Dtgn.") und der in dem ge-

[1]) „Ueber die Gleichungen achten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven vierter Ordnung."

nannten Aufsatz, oder auch in Abhandl. d. bayer. Akad. d. Wiss., Bd. 17,[1]) auseinandergesetzten Rechenregeln. Von diesen übrigens nur der folgenden: In einer Combination zu μ, $i_1 k_1\ i_2 k_2 \ldots i_\mu k_\mu$, ist die Anordnung der Zahlen gleichgültig und zwei gleiche Zahlen heben sich gegenseitig auf. Ist μ gerade, so gelangt man, indem man $[12 \ldots 8] = 0$ setzt, zu den 63 gleichberechtigten Steiner'schen Gruppen („St. Gr.") $[i\,k]$, $[i\,k\,l\,m]$; für ungerades μ zu den 28 $(i\,k)$ und zu 36 unter einander gleichberechtigten $(i\,k\,l\,m)$ und $(12 \ldots 8)$. Jede St. Gr. $[a]$ lässt sich auf 6 Arten in Paare der Art $i_1 k_1 .\ i_2 k_2$ zerlegen, und jede der zwölf entsprechenden Dtgn. $(i\,k)$ heisst: „in $[a]$ enthalten." Zwei St. Gr. $[a]$, $[b]$ heissen „syzygetisch" (Ausdruck von Frobenius), wenn $[b]$ sich gegen die beiden Dtgn. eines Paares von $[a]$ gleichmässig verhält, d. h. beide enthält oder beide nicht enthält. Drei syzygetische St. Gr. $[a]$, $[b]$, $[ab]$ von der Combination $[abab] = 0$, mögen ein „Steiner'sches Tripel" heissen; sie enthalten vier Dtgn. gemeinsam, deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ liegen; die 315 Kegelschnitte

$$\mathfrak{K} = i_1 k_1 \cdot i_2 k_2 \cdot i_3 k_3 \cdot i_4 k_4, \qquad \text{wo } [i_1 k_1\ i_2 k_2\ i_3 k_3\ i_4 k_4] = 0,$$

und die 315 Steiner'schen Tripel

$$[i_1 k_1\ i_2 k_2],\ [i_1 k_1\ i_3 k_3],\ [i_1 k_1\ i_4 k_4] = [i_2 k_2\ i_3 k_3]$$

entsprechen sich so eindeutig; zu jedem $\mathfrak{K}$ „gehören" drei St. Gr. eines Tripels.

Die Beziehungen zwischen zwei Kegelschnitten $\mathfrak{K}$ sind von mir Math. Ann. 15 gegeben worden, ausführlicher von Pascal,[2]) der auch die Beziehungen zwischen dreien der $\mathfrak{K}$ abgeleitet hat. Ich benütze davon Folgendes:

---

[1]) „Zur Theorie der Berührungscurven der ebenen Curve vierter Ordnung."

[2]) Rendiconti d. R. Accad. dei Lincei, 1892 Nr. 11, 12; 1893 Nr. 1.

Zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, welche keine Doppeltangente gemeinsam haben, stehen in „Beziehung erster Art“ $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}')_1$ oder „zweiter Art“ $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}')_2$, je nachdem die beiden zu $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ gehörigen St.'schen Tripel eine St. Gr. gemeinsam haben oder nicht. Zu einem $\mathfrak{K}$ gibt es 18 $\mathfrak{K}'$, für welche $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}')_1$ gilt, 144 $\mathfrak{K}'$, für welche $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}')_2$ ist. Aus dem „Zerlegungsschema“ eines $\mathfrak{K}$, nämlich aus

$$
\begin{array}{lllll}
 & K = 12 \cdot 34 \cdot 56 \cdot 78 & & & \\
[1234] = & 13 \cdot 24, & 14 \cdot 23, & 57 \cdot 68, & 58 \cdot 67 \\
[1256] = & 15 \cdot 26, & 16 \cdot 25, & 37 \cdot 48, & 38 \cdot 47 \\
[1278] = & 17 \cdot 28, & 18 \cdot 27, & 35 \cdot 46, & 36 \cdot 45,
\end{array}
$$

erhält man die K', für welche $(KK')_1$, indem man zwei Paare einer Horizontalreihe zusammenfasst, wie etwa $13 \cdot 24 \cdot 14 \cdot 23$; und die K'', für welche $(KK'')_2$, indem man aus zwei der drei Reihen je zwei ik so herausnimmt, dass die Gesammtcombination 0 ergibt, wie $13 \cdot 14 \cdot 37 \cdot 47$. Die 18 ersteren K' zerfallen dem zu Grunde gelegten K gegenüber in 9 Paare, indem ein solches Paar $K_1 K_2$ eine Horizontalreihe von K erschöpft; solche drei Kegelschnitte K, K_1, K_2 bilden ein „Tripel erster Art“ $(K K_1 K_2)_1$, dessen Glieder gleichartig eingehen und alle derselben St. Gr. $[a]$ zugeordnet sind, während umgekehrt eine St. Gr. $[a]$ auf 15 verschiedene Tripel der Art $(KK_1K_2)_1$ führt. Von letzteren existiren $63 \cdot 15$. Auch die 144 K'' zerlegen sich K gegenüber in 72 Paare, der Art $(K_1'' K_2'')_1$, indem K_2'' jene 4 Dtgn. enthält, welche die 4 Dtgn. von K_1'' in den beiden ausgezeichneten St. Gr. von K zu Paaren ergänzen. Einem Paar 2. Art $(KK'')_2$, ist ein Kegelschnitt K' „conjugirt“, für welchen $(KK')_1$, $(K''K')_1$ ist; derselbe kann dadurch erhalten werden, dass man aus den beiden, gegen einander syzygetischen, St. Gr. von K und K'', von welchen die erstere keine Dtg. von K'', die zweite keine Dtg. von K enthält, die vier gemeinsamen Dtgn. herausnimmt.

Im obigen Beispiel bilden

$$K, K_1 = 13 \cdot 24 \cdot 14 \cdot 23, \qquad K_2 = 57 \cdot 68 \cdot 58 \cdot 67$$

ein Tripel erster Art;

$$K_1'' = 13 \cdot 14 \cdot 37 \cdot 47, \qquad K_2'' = 24 \cdot 23 \cdot 48 \cdot 38$$

sind zweiter Art gegen K und gegen K gepaart; durch K und K'' sind die St. Gr. [1278], [34] ausgezeichnet, welche zu dem, zu $(KK_1'')_2$ conjugirten $K' = 35 \cdot 36 \cdot 45 \cdot 46$ führen.

2. Siebentripelsysteme. Ein solches System entsteht aus K, indem man aus jeder der drei St. Gr. von K diesen Kegelschnitt zu einem Tripel erster Art ergänzt; aber so, dass nur Beziehungen erster Art entstehen. Durch das erste Tripel ist das Quadrupel der vier übrigen Kegelschnitte schon bestimmt. So gibt es $\frac{63 \cdot 15}{7} = 135$ solcher Systeme, je 7 Tripel enthaltend.

Einem solchen System entspricht ein Tripelsystem von 7 Steiner'schen Gruppen und zwar je den Elementen des einen Systems die Tripel des anderen (vergl. das System S, Math. Ann. 15, pag. 95). Man erhält dasselbe einfach aus drei syzygetischen St. Gr. $[a]$, $[b]$, $[c]$, für welche $[abc]$ nicht $= 0$ ist, in

$$[a], [b], [c], [ab], [ac], [bc], [abc].$$

3. Eigentliche Siebensysteme zweiter Art. Es gibt $5!\ 36 \cdot 8$ eigentliche (irreductible) Systeme zweiter Art von je 7 Kegelschnitten $\mathfrak{K}$, deren Glieder alle in Beziehung zweiter Art zu einander stehen. Jedes solches System führt auf eine Galois'sche (also algebraisch lösbare) Gleichung 7. Grades. Dieselben sind, je zu 120, den $36 \cdot 8$ Aronhold-schen 7-Systemen von Dtgn. zugeordnet.

Ein solches 7-$\mathfrak{K}$-System ist z. B.

$$K_0 = 12 \cdot 34 \cdot 56 \cdot 78$$

$$K_1 = 14 \cdot 27 \cdot 35 \cdot 68,\ K_2 = 15 \cdot 36 \cdot 47 \cdot 28,\ K_3 = 16 \cdot 24 \cdot 57 \cdot 38,$$
$$K_4 = 13 \cdot 25 \cdot 67 \cdot 48,\ K_5 = 26 \cdot 37 \cdot 45 \cdot 18,\ K_6 = 17 \cdot 23 \cdot 46 \cdot 58.$$

Um die Eigenschaft desselben zu erkennen, dass aus irgend zwei der 7 Kegelschnitte die übrigen sich eindeutig ergeben, beachte man, dass, K_0 gegenüber, sich die übrigen 6 in 3 Paare $K_1 K_6$, $K_2 K_5$, $K_3 K_4$ ordnen, derart, dass der einem Paare $(K_1 K_6)_2$ „conjugirte" Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{16}$ mit K_0 (und nur mit K_0) zwei Doppeltangenten gemein hat; ebenso bez. $(K_2 K_5)_2$ und bez. $(K_3 K_4)_2$. Dieselben sechs $\mathfrak{K}$ ordnen sich, K_0 gegenüber, auch in zwei Cyklen 2. Ordnung, $K_1 K_4 K_2$ und $K_6 K_3 K_5$; insofern man von $(K_0 K_1)_2$ auf K_4, von $(K_0 K_4)_2$ auf K_2, von $(K_0 K_2)_2$ auf K_1, und ebenso von $(K_0 K_6)_2$ auf K_3, von $(K_0 K_3)_2$ auf K_5, von $(K_0 K_5)_2$ auf K_6 kommt, genau so wie vorher von $(K_1 K_6)_2$ auf K_0. Und analog ist es, wenn man, statt von K_0, von einem der übrigen sechs $\mathfrak{K}$ ausgeht.

Die Gleichung 7. Grades, welche dem 7-Systeme entspricht, hat also für die Indices i der 7 Kegelschnitte die metacyklische Substitutionsgruppe

$$(i \mid \beta i + \alpha), \qquad \left\{\begin{array}{l} i = 0, 1, \ldots 6 \\ \alpha = 0, 1, \ldots 6 \\ \beta = 1, 2, \ldots 6 \end{array}\right\} \text{ mod. } 7.$$

Ferner ist für das obige System in K_0 die Dtg. (78) vor den übrigen dreien insofern ausgezeichnet, als in den 3 Kegelschnitten $\mathfrak{K}_{16}$, $\mathfrak{K}_{43}$, $\mathfrak{K}_{25}$, welche je den obigen drei Paaren $(K_1 K_6)_2$, $(K_4 K_3)_2$, $(K_2 K_5)_2$ conjugirt sind, jedesmal die Dtg. (78), aber nur je eine der drei übrigen Dtgn. von K_0 vorkommt; und auch dadurch, dass, wenn man die 6 Kegelschnitte $K_1, \ldots K_6$ auf andere Weise paarweise zusammennimmt und jedesmal den conjugirten $\mathfrak{K}$ aufstellt, (78) niemals, die übrigen

drei Dtgn. von K_0 aber je zweimal vorkommen. Auf diese Weise ist in dem obigen System das hervorgehobene Aronhold'sche 7-System von Dtgn. ausgezeichnet, das, combinirt, (12345678) liefert.

Zugleich folgt, dass mittelst des Siebenkegelschnittsystems die 28 Dtgn. alle eindeutig bestimmt sind. Und da die Gleichung für diese Dtgn. eine Gruppe von 8! 36 Substitutionen besitzt, das 7-$\mathfrak{K}$-System aber eine solche von 7·6 Substitutionen, so existiren 5! 36·8 der genannten 7-Systeme. Man erhält dieselben sämmtlich aus dem obigen speciellen, indem man etwa erst auf die Doppeltangentenindices 1, 2, ... 5 alle 120 Vertauschungen ausübt, was das zugehörige Aronhold'sche 7-System nicht ändert, und indem man dann noch diejenigen Substitutionen vornimmt, welche letzteres System in die 36·8 Aronhold'schen 7-Systeme überzuführen erlauben.

4. Uneigentliche Siebensysteme.

a) Man ergänzt, wie in Nr. 2, K aus jeder der drei St. Gr. von K zu einem Tripel erster Art; aber so, dass die drei Paare $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ gegenseitig in Beziehung zweiter Art stehen; z. B.

$$K = 12\cdot 34\cdot 56\cdot 78,\quad A_1 = 13\cdot 24\cdot 57\cdot 68,\quad A_2 = 14\cdot 23\cdot 58\cdot 67,$$
$$B_1 = 15\cdot 26\cdot 16\cdot 25,\quad B_2 = 37\cdot 48\cdot 38\cdot 47,$$
$$C_1 = 17\cdot 28\cdot 36\cdot 45,\quad C_2 = 18\cdot 27\cdot 35\cdot 46.$$

In diesem System ist K ausgezeichnet. Es gibt 315·6 derartige Systeme.

b) Man verfährt wie in a), nur dass zwei der drei Paare gegen einander in Beziehung erster Art, gegen das dritte in Beziehung zweiter Art stehen. So erhält man aus dem System a) ein System b), wenn man nur $B_1 B_2$ ersetzt durch

$$B_1 = 15\cdot 26\cdot 37\cdot 48,\qquad B_2 = 16\cdot 25\cdot 38\cdot 47.$$

Auch in diesem System ist K ausgezeichnet, und es gibt $315 \cdot 18$ derartige Systeme.

In a) und b) zusammen hat man die in Math. Ann. 15 angegebenen $315 \cdot 24$ uneigentlichen Systeme.

c) Zu K nimmt man drei Paare erster Art, die aber alle gegenüber K in Beziehung zweiter Art stehen. Dieselben stehen dann auch gegenseitig in Beziehung zweiter Art; so dass K wiederum ausgezeichnet auftritt; z. B.

$$\begin{aligned} K = 12 \cdot 34 \cdot 56 \cdot 78, \quad A_1 &= 13 \cdot 57 \cdot 26 \cdot 48, \quad A_2 = 15 \cdot 37 \cdot 24 \cdot 68, \\ B_1 &= 16 \cdot 38 \cdot 27 \cdot 45, \quad B_2 = 18 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 47, \\ C_1 &= 14 \cdot 67 \cdot 28 \cdot 35, \quad C_2 = 17 \cdot 46 \cdot 23 \cdot 58. \end{aligned}$$

Von dieser Art gibt es $315 \cdot 192$ Systeme; und zu ihnen gehört auch das von Hesse, Cr. J. 49, angeführte.

d) Zu K nimmt man ein Paar $A_1 A_2$, das mit K ein Tripel erster Art bildet; ferner $B_1 B_2$, die K gegenüber in Beziehung zweiter Art und gepaart stehen, und welche zugleich mit $A_1 A_2$ in Beziehung 2. Art sind; endlich die $C_1 C_2$, welche noch in Beziehung erster Art (nicht gepaart) zu K stehen; z. B.

$$\begin{aligned} K = 12 \cdot 34 \cdot 56 \cdot 78, \quad A_1 &= 13 \cdot 24 \cdot 57 \cdot 68, \quad A_2 = 14 \cdot 23 \cdot 58 \cdot 67, \\ B_1 &= 15 \cdot 16 \cdot 35 \cdot 36, \quad B_2 = 25 \cdot 26 \cdot 45 \cdot 46, \\ C_1 &= 37 \cdot 38 \cdot 47 \cdot 48, \quad C_2 = 17 \cdot 18 \cdot 27 \cdot 28. \end{aligned}$$

Auch hierbei ist K ausgezeichnet; und es gibt $315 \cdot 144$ derartige Systeme.

e) Zu einem Tripel erster Art $(K A_1 A_2)_1$ nimmt man eines der am Anfange von Nr. 2 erwähnten Quadrupel $(B_1 B_2 C_1 C_2)_1$, das aber nicht, wie dort, zu $(K A_1 A_2)_1$ gehört, sondern durchaus mit diesem in Beziehung zweiter Art stehe; wie etwa:

$$\begin{aligned} K = 12 \cdot 34 \cdot 56 \cdot 78, \quad A_1 &= 13 \cdot 24 \cdot 57 \cdot 68, \quad A_2 = 14 \cdot 23 \cdot 58 \cdot 67, \\ B_1 &= 15 \cdot 38 \cdot 27 \cdot 46, \quad B_2 = 18 \cdot 35 \cdot 26 \cdot 47, \\ C_1 &= 16 \cdot 37 \cdot 28 \cdot 45, \quad C_2 = 17 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 48. \end{aligned}$$

Jedem Tripel zugeordnet, hat man hier 8 Quadrupel; da in dem System ein Tripel erster Art ausgezeichnet ist, so gibt es $63 \cdot 15 \cdot 8$ derartige Systeme.

Die bezeichneten Systeme erschöpfen alle existirenden Siebenkegelschnittsysteme, wie man, von dem Zerlegungsschema von K ausgehend, leicht beweist.