

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVII. Jahrgang 1897.

München.

Verlag der k. Akademie.

1898.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber Molekular-Funktionen.

Von Dr. Arthur Korn.

(Eingelaufen 6. März.)

Einleitung. Die Dichtigkeit eines mathematischen Kontinuums ist durch die Formel gegeben:

$$1) \quad \mu = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{dm}{d\tau},$$

wo dm die in dem Raumelement $d\tau$ (x, y, z) vorhandene Masse vorstellt; μ und die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w werden als stetige Funktionen der Zeit t und der Stelle x, y, z angesehen. Für ein solches Kontinuum, welches zur Zeit t den Raum $\mathfrak{A}$ erfüllen möge, gilt das mechanische Grundprincip von D'Alembert in der Form:

$$2) \quad \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathfrak{A}} \mu \left(\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right) d\tau dt = 0$$

für alle dem System erlaubten Verrückungen $\delta x, \delta y, \delta z$.

Wenn wir nun in der empirischen Physik von Dichtigkeit sprechen, so können wir die ideale Definition 1) nicht zu grunde legen, wir können hier nur von der Dichtigkeit eines kleinen Raumgebietes dA sprechen und dieselbe durch die Formel definieren:

$$3) \quad \mu_0 = \frac{dm}{dA},$$

wo dm die in dA vorhandene Masse vorstellt; es ist also:

$$4) \quad \mu_0 = \frac{1}{dA} \int_{dA} \mu \, d\tau,$$

wo μ die ideale, durch die Formel 1) definierte Dichtigkeit ist.

Bei der Untersuchung des Fehlers, welchen man macht, wenn man an Stelle der idealen Dichtigkeit μ in der Gleichung des D'Alembert'schen Princip's 2) den durch die Gleichung 4) gegebenen Mittelwert μ_0 setzt,¹⁾ handelt es sich um die Diskussion von Integralen der folgenden Form:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Gruppe: } & \left\{ \begin{aligned} & \int_{dA} (\mu - \mu_0) (x - x_0) \, d\tau, \\ & \int_{dA} (\mu - \mu_0) (y - y_0) \, d\tau, \\ & \int_{dA} (\mu - \mu_0) (z - z_0) \, d\tau, \end{aligned} \right. \\ 2. \text{ Gruppe: } & \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} \int_{dA} (\mu - \mu_0) (x - x_0)^2 \, d\tau, \quad \frac{1}{1 \cdot 2} \int_{dA} (\mu - \mu_0)^2 (y - y_0) (z - z_0) \, d\tau, \\ & \frac{1}{1 \cdot 2} \int_{dA} (\mu - \mu_0) (y - y_0)^2 \, d\tau, \quad \frac{1}{1 \cdot 2} \int_{dA} (\mu - \mu_0)^2 (z - z_0) (x - x_0) \, d\tau, \\ & \frac{1}{1 \cdot 2} \int_{dA} (\mu - \mu_0) (z - z_0)^2 \, d\tau, \quad \frac{1}{1 \cdot 2} \int_{dA} (\mu - \mu_0)^2 (x - x_0) (y - y_0) \, d\tau, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Sei M der grösste absolute Wert von $\mu - \mu_0$, r die kleinste Entfernung innerhalb dA , so sind die Integrale der 1. Gruppe ihrem absoluten Werte nach

¹⁾ Bei der Voraussetzung, dass μ_0 sich von dem Werte einer stetigen Funktion an einer Stelle x_0, y_0, z_0 innerhalb dA nur um Grössen unterscheide, die gegen die Dichtigkeitseinheit von der Ordnung Dimensionen von $\frac{dA}{\text{Längeneinheit}}$ klein sind.

²⁾ Wobei x_0, y_0, z_0 irgend einen Punkt innerhalb dA vorstellt.

$$< M r \, dA,$$

die Integrale der 2. Gruppe

$$< M r^2 \, dA,$$

u. s. f.

Wir setzen nun:

$$5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{dA} (\mu - \mu_0) (x - x_0) \, d\tau = \kappa \mu_0 \cdot dA \cdot \xi_1, \\ \int_{dA} (\mu - \mu_0) (y - y_0) \, d\tau = \kappa \mu_0 \cdot dA \cdot \xi_2, \\ \int_{dA} (\mu - \mu_0) (z - z_0) \, d\tau = \kappa \mu_0 \cdot dA \cdot \xi_3, \end{array} \right.$$

$$6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 \cdot 2} \int_{dA} (\mu - \mu_0) (x - x_0)^2 \, d\tau = \kappa^2 \mu_0 \, dA \cdot \xi_{11}, \\ \frac{1}{1 \cdot 2} \int_{dA} (\mu - \mu_0) (y - y_0)^2 \, d\tau = \kappa^2 \mu_0 \, dA \cdot \xi_{22}, \\ \frac{1}{1 \cdot 2} \int_{dA} (\mu - \mu_0) (z - z_0)^2 \, d\tau = \kappa^2 \mu_0 \, dA \cdot \xi_{33}, \\ \frac{1}{1 \cdot 2} \int_{dA} (\mu - \mu_0) 2 (y - y_0) (z - z_0) \, d\tau = \kappa^2 \mu_0 \, dA \cdot 2 \xi_{23}, \\ \frac{1}{1 \cdot 2} \int_{dA} (\mu - \mu_0) 2 (z - z_0) (x - x_0) \, d\tau = \kappa^2 \mu_0 \, dA \cdot 2 \xi_{31}, \\ \frac{1}{1 \cdot 2} \int_{dA} (\mu - \mu_0) 2 (x - x_0) (y - y_0) \, d\tau = \kappa^2 \mu_0 \, dA \cdot 2 \xi_{12}, \end{array} \right.$$

u. s. f.

Dabei soll κ einen konstanten Zahlenfaktor vorstellen, der von der Ordnung:

$$\frac{\text{Dimensionen von } dA}{\text{Längeneinheit}}$$

klein ist.

Unter der Voraussetzung, dass bei einer Einteilung des Gebietes $\mathfrak{A}$ in genügend kleine Teile dA

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{33}, \xi_{23}, \xi_{31}, \xi_{12} \dots$$

sich von stetigen Funktionen an einer Stelle x_0, y_0, z_0 innerhalb dA nur um Grössen unterscheiden, die gegen ihre Dimensionseinheiten von der Ordnung $\frac{\text{Dimensionen von } dA}{\text{Längeneinheit}}$ klein sind, nennen wir:

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3$$

die Molekular-Funktionen erster Ordnung,

$$\xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{33}, \xi_{23}, \xi_{31}, \xi_{12}$$

die Molekular-Funktionen zweiter Ordnung des Kontinuums u. s. f.

§ 1. Die wichtigsten Sätze über die Molekular-Funktionen erster Ordnung.

Wir definierten die Molekular-Funktionen erster Ordnung ξ_1, ξ_2, ξ_3 durch die folgenden Gleichungen:

$$z \mu_0 dA \cdot \xi_1 = \int_{dA} (\mu - \mu_0) (x - x_0) d\tau,$$

$$z \mu_0 dA \cdot \xi_2 = \int_{dA} (\mu - \mu_0) (y - y_0) d\tau,$$

$$z \mu_0 dA \cdot \xi_3 = \int_{dA} (\mu - \mu_0) (z - z_0) d\tau.$$

Wir differenzieren die erste dieser Gleichungen nach der Zeit t , dann folgt bei Vernachlässigung von Gliedern, welche in Bezug auf z von zweiter oder höherer Ordnung klein sind:

$$\begin{aligned}
 \kappa \mu_0 dA \frac{d\xi_1}{dt} &= \int (\mu - \mu_0) \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt} \right) d\tau, \\
 &= \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0 y_0 z_0} \int_{dA} (\mu - \mu_0) (x - x_0) d\tau \\
 &\quad + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{x_0 y_0 z_0} \int_{dA} (\mu - \mu_0) (y - y_0) d\tau \\
 &\quad + \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{x_0 y_0 z_0} \int_{dA} (\mu - \mu_0) (z - z_0) d\tau, \\
 &= \kappa \mu_0 dA \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \xi_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \xi_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \xi_3 \right\}.
 \end{aligned}$$

Dividiert man auf beiden Seiten durch $\kappa \mu_0 dA$, so folgt:

$$7) \quad \text{analog:} \quad \begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \xi_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \xi_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \xi_3, \\ \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \xi_1 + \frac{\partial v}{\partial y} \xi_2 + \frac{\partial v}{\partial z} \xi_3, \\ \frac{d\xi_3}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \xi_1 + \frac{\partial w}{\partial y} \xi_2 + \frac{\partial w}{\partial z} \xi_3. \end{cases}$$

Diese Gleichungen, die die Fundamentealeigenschaft der Molekularfunktionen erster Ordnung ausdrücken, spielen in der theoretischen Physik noch an einer anderen Stelle eine hervorragende Rolle. Sie gelten nämlich in jeder inkompressiblen Flüssigkeit für die Wirbelkomponenten:

$$\begin{aligned}
 \pi' &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\
 \chi' &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\
 \varrho' &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).
 \end{aligned}$$

Wir können in Folge der Gleichungen 7) die drei folgenden Sätze aussprechen¹⁾:

¹⁾ Die Sätze I—III gelten natürlich nur so lange, als die von uns gemachten Vernachlässigungen statthaft sind.

I. Sind $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ zu einer Anfangszeit t_0 überall in dem Kontinuum gleich null, so gilt dasselbe zu jeder beliebigen Zeit t ;

II. Ist

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi_2}{\partial y} + \frac{\partial \xi_3}{\partial z}$$

in einem inkompressiblen Kontinuum zu einer Anfangszeit t_0 überall gleich null, so gilt dasselbe zu jeder beliebigen Zeit t ;

III. Sind $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ in einem Kontinuum, das sich wie eine inkompressible Flüssigkeit bewegt, zu einer Anfangszeit t_0 überall den Wirbelkomponenten $\pi' \chi' \varrho'$ proportional, so gilt dasselbe zu jeder beliebigen Zeit t .

§ 2. Das D'Alembert'sche Princip bei Berücksichtigung der Molekular-Funktionen 1. Ordnung.

Wir wollen zunächst der Einfachheit halber annehmen, dass das von unserem Kontinuum erfüllte Gebiet $\mathfrak{A}$ sich so in kleine Gebiete dA zerteilen lasse, dass μ_0 für jedes kleine Gebiet dA denselben Wert habe.¹⁾

Wir können die Gleichung des D'Alembert'schen Princip's so schreiben:

$$8) \quad \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\mathfrak{A}} \int_{dA} \mu \left(\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right) d\tau dt = 0,$$

wo die Summe über alle Gebiete dA des Raumes $\mathfrak{A}$ zu erstrecken ist. Nun entwickeln wir:

$$\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z$$

nach dem Taylor'schen Satz:

1) Ist dies zu einer Anfangszeit t_0 möglich, so wird dasselbe zu jeder Zeit t stattfinden, falls $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ von x, y, z unabhängig, also eine blosse Funktion der Zeit t ist.

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z = & \left[\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right]_{x_0 y_0 z_0} \\
& + (x - x_0) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right) \right]_{x_0 y_0 z_0} \\
& + (y - y_0) \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right) \right]_{x_0 y_0 z_0} \\
& + (z - z_0) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right) \right]_{x_0 y_0 z_0} \\
& + \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

wo $x_0 y_0 z_0$ einen beliebigen Punkt innerhalb des Gebietes dA vorstellt.

Die Formel 8) geht hiedurch in die folgende über:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\mathfrak{A}} \left[\mu_0 \int_{dA} \left(\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right) d\tau \right. \\
& + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right) \right]_{x_0 y_0 z_0} \int_{dA} (\mu - \mu_0) (x - x_0) d\tau \\
& + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right) \right]_{x_0 y_0 z_0} \int_{dA} (\mu - \mu_0) (y - y_0) d\tau \\
& + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right) \right]_{x_0 y_0 z_0} \int_{dA} (\mu - \mu_0) (z - z_0) d\tau \\
& \left. + \dots \dots \dots \right] dt = 0,
\end{aligned}$$

oder bei Einführung der Molekularfunktionen erster Ordnung und unter Vernachlässigung von Grössen, die in Bezug auf z von zweiter oder höherer Ordnung klein sind:

$$9) \left\{ \begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathfrak{A}} \mu_0 \left\{ \frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right. \\ & \quad + \kappa \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right) \\ & \quad + \kappa \xi_2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right) \\ & \quad \left. + \kappa \xi_3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right) \right\} d\tau dt = 0. \end{aligned} \right.$$

Wir verstehen unter einem echten Continuum ein solches, für das zu einer Anfangszeit t_0 die Molekularfunktionen erster Ordnung $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ null sind; nach Satz I des vorigen Paragraphen gilt dies dann zu jeder Zeit t . Für ein echtes Continuum reduziert sich somit das D'Alembert'sche Princip auf die gewöhnliche Form:

$$10) \quad \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathfrak{A}} \mu_0 \left(\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right) d\tau dt = 0.$$

Für alle übrigen Continua aber, welche wir als unechte Continua bezeichnen wollen, müssen wir die Gleichung des D'Alembert'schen Principis in der Form 9) schreiben, und wir dürfen die drei mit κ multiplizierten Glieder nicht fortlassen, ohne die Berechtigung einer solchen Vernachlässigung nachgewiesen zu haben.

Wir haben unsere bisherigen Betrachtungen zunächst nur für den Fall gemacht, dass μ_0 eine Konstante vorstellt, dieselben lassen sich indessen Schritt für Schritt in derselben Weise anstellen, falls wir für die ideale Dichtigkeit μ die Relation annehmen:

$$11) \quad \mu = \mu_0 + m,$$

wo für jedes kleine Gebiet dA :

$$12) \quad \int_{dA} m d\tau = 0$$

und μ_0 eine stetige Funktion von $t x y z$ ist, deren Ableitungen nach $x y z$:

$$\frac{\partial \mu_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mu_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mu_0}{\partial z}$$

nicht gegen die Grösse:

$$\frac{\text{Dichtigkeitseinheit}}{\text{Längeneinheit}}$$

von der Ordnung:

$$\frac{\text{Längeneinheit}}{\text{Dimensionen von } dA}$$

gross sind.

Wir brauchen daher die Konstanz von μ_0 , welche ja die Unabhängigkeit des Ausdrucks: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ von der Stelle verlangen würde (vergl. Anmerkung 1 pag. 7), nicht als Bedingung zu der Gleichung 9) des D'Alembert'schen Principis hinzuzufügen.

§ 3. Anwendungen der Theorie.

Da die Konstante κ von der Ordnung:

$$\frac{\text{Dimensionen von } dA}{\text{Längeneinheit}}$$

klein ist, so werden die mit κ multiplizierten Glieder in der Gleichung 9) des D'Alembert'schen Principis im allgemeinen dann zu vernachlässigen sein, wenn die Grössen:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right)$$

gegen ihre Dimensionseinheiten nicht von derselben Ordnung

gross sind, wie die Längeneinheit gegen die Dimensionen von dA , also im allgemeinen, wenn wir es mit sogenannten sichtbaren Geschwindigkeiten zu thun haben. Dagegen werden diese accessorischen, mit z multiplizierten Glieder einen wesentlichen Einfluss gewinnen können, falls wir mit sehr raschen Schwingungsbewegungen zu rechnen haben.

Wir sagen, die Bewegungen an einer Stelle (x, y, z) seien aus sichtbaren und mit der sehr kleinen Zeitperiode T schwingenden Bewegungen zusammengesetzt, falls die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w sich in folgender Weise analytisch darstellen lassen:

$$13) \quad \begin{cases} u = u_0 + \sum_1^{\infty} j \left(u_{j1} \cos j \frac{t}{T} 2\pi + u_{j2} \sin j \frac{t}{T} 2\pi \right), \\ v = v_0 + \sum_1^{\infty} j \left(v_{j1} \cos j \frac{t}{T} 2\pi + v_{j2} \sin j \frac{t}{T} 2\pi \right), \\ w = w_0 + \sum_1^{\infty} j \left(w_{j1} \cos j \frac{t}{T} 2\pi + w_{j2} \sin j \frac{t}{T} 2\pi \right), \end{cases}$$

wo:

$$\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_{j1} & v_{j1} & w_{j1} \\ u_{j2} & v_{j2} & w_{j2} \end{vmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{nicht gegen die Geschwindigkeits-} \\ \text{einheit,} \end{array} \right\}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{du_0}{dt} & \frac{dv_0}{dt} & \frac{dw_0}{dt} \\ \frac{du_{j1}}{dt} & \frac{dv_{j1}}{dt} & \frac{dw_{j1}}{dt} \\ \frac{du_{j2}}{dt} & \frac{dv_{j2}}{dt} & \frac{dw_{j2}}{dt} \end{vmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{nicht gegen die Beschleunigungs-} \\ \text{einheit} \end{array} \right\}$$

von der Ordnung: $\frac{\text{Zeiteinheit}}{T}$ gross sein sollen; wir bezeichnen

dabei u_0, v_0, w_0 als die sichtbaren Geschwindigkeitskomponenten, die übrigen Teile von u, v, w als Schwingungsgeschwindigkeiten mit der Schwingungsdauer T .

Gerade bei einer Theorie der elektrischen Erscheinungen auf mechanischer Grundlage wird man es wohl stets mit Geschwindigkeiten zu thun haben, die sich in der eben angegebenen Weise aus sichtbaren und schwingenden Bewegungen zusammensetzen; es können sich daher die Molekular-Funktionen gerade für eine mechanische Theorie der elektrischen Erscheinungen von Nutzen erweisen. Bieten uns doch einzelne rein mechanische Erscheinungen, wie die pulsierenden und oscillierenden Kugeln von Bjerknes, die von einer inkompressiblen Flüssigkeit umströmten Ringe von Kirchhoff Analogien mit elektrischen Erscheinungen dar, von denen man erwarten konnte, dass sie durch geringfügige Modifikationen zu einer mechanischen Theorie der sogenannten elektrischen Fernwirkungen benützt werden könnten. Was liegt nach den obigen Untersuchungen über Molekular-Funktionen näher, als den Versuch zu machen, die gewünschten Modifikationen dadurch herbeizuführen, dass man über die Molekular-Funktionen erster Ordnung, die man gewöhnlich in der Mechanik starrer und flüssiger Körper vernachlässigt, geeignete Annahmen macht?

Wenn wir, um elektrische Fernwirkungen zwischen zwei getrennten Massensystemen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zu erklären, annehmen, dass ausserhalb der beiden Massensysteme der Raum von einer inkompressiblen Flüssigkeit erfüllt wird, welche der Träger der elektrischen Bewegung ist, so kann sich der Einfluss der Molekular-Funktionen erster Ordnung einmal als eine Modifikation der Bewegung der Flüssigkeit, andererseits als eine Modifikation der Bewegung der Massensysteme $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ geltend machen. Wir wollen nun das Zwischenmedium, die inkompressible Flüssigkeit, nicht verändern, weil wir dieselbe bereits für eine hydrodynamische Erklärung der Gravitation gebrauchen; es bleibt somit nur übrig, die Massensysteme $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ nicht mehr als echt kontinuierlich anzunehmen, und wir fragen, können wir die Molekular-Funktionen $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ in denselben so annehmen, dass die hydrodynamischen inversen Analogien zu den elektrischen Erscheinungen von Bjerknes und Kirchhoff zu vollkommenen Analogien sich gestalten und so für

eine mechanische Erklärung der elektrischen Fernwirkungen geeignet werden?

Es ist, wenn man die Massensysteme $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ als starre Körper auffasst und die Bewegungsgleichungen für diesen Fall aufstellt, ohne grosse Schwierigkeit zu übersehen, dass die Einführung der Molekular-Funktionen erster Ordnung, welche Werte man auch denselben innerhalb $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zuerteilen möge, keinerlei Einfluss auf die sichtbare Bewegung der starren Körper $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ auszuüben vermag, wir können dagegen einen solchen Einfluss und zwar die gewünschte Modifikation der hydrodynamischen Probleme von Bjerknes und Kirchhoff erlangen, wenn wir die Massensysteme $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ nicht als vollkommen starre Körper voraussetzen, sondern nur ihren sichtbaren Bewegungen die Bedingungen der Starrheit vorschreiben, während ihre schwingenden Bewegungen den Bedingungen der Starrheit nicht unterworfen sind. Während bei vollkommen starren Körpern die Geschwindigkeitskomponenten $u\ v\ w$ die Bedingungen erfüllen:

$$u = \xi' + (z - \zeta) \chi' - (y - \eta) \varrho',$$

$$v = \eta' + (x - \xi) \varrho' - (z - \zeta) \pi',$$

$$w = \zeta' + (y - \eta) \pi' - (x - \xi) \chi',$$

wo $\xi\ \eta\ \zeta\ \pi\ \chi\ \varrho$ sechs unabhängige Variabeln vorstellen, machen wir jetzt diese Beschränkungen nur für die sichtbaren Geschwindigkeitskomponenten $u_0\ v_0\ w_0$:

$$14) \quad \begin{cases} u_0 = \xi' + (z - \zeta) \chi' - (y - \eta) \varrho', \\ v_0 = \eta' + (x - \xi) \varrho' - (z - \zeta) \pi', \\ w_0 = \zeta' + (y - \eta) \pi' - (x - \xi) \chi'; \end{cases}$$

solche Massensysteme bieten dem Auge nichtsdestoweniger die Erscheinung starrer Körper, wenn auch die Schwingungsgeschwindigkeiten nicht mehr den Bedingungen der Starrheit, sondern ganz beliebigen anderen Bedingungen unterworfen sind. Ich habe diesen Massensystemen den Namen „periodisch starre

Körper“ gegeben, weil in dem Falle, dass die Bewegung derselben sich aus einer sichtbaren Bewegung und einer einfachen Schwingung zusammensetzt, in bestimmten periodisch auf einander folgenden Zeitmomenten die Lage ihrer einzelnen Theilchen genau dieselbe ist, wie bei vollkommen starren Körpern. Wie in der Theorie der vollkommen starren Körper die auf denselben wirkenden Kraftkomponenten und Drehungsmomente (bezogen auf einen Punkt $\xi \eta \zeta$) durch die folgenden Gleichungen definiert werden:

$$X = \int \mu \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right) d\tau,$$

$$Y = \int \mu \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \right) d\tau,$$

$$Z = \int \mu \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \right) d\tau,$$

$$D_x = \int \mu \left\{ (y - \eta) \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \right) \right. \\ \left. - (z - \zeta) \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \right) \right\} d\tau,$$

$$D_y = \int \mu \left\{ (z - \zeta) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right) \right. \\ \left. - (x - \xi) \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \right) \right\} d\tau,$$

$$D_z = \int \mu \left\{ (x - \xi) \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \right) \right. \\ \left. - (y - \eta) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right) \right\} d\tau,$$

so werden die auf den periodisch starren Körper wirkenden Kraftkomponenten und Drehungsmomente (bezogen auf einen Punkt $\xi \eta \zeta$) durch die folgenden Gleichungen definiert:

$$15) \left\{ \begin{aligned} X &= \int \mu_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial x} u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial y} v_0 + \frac{\partial u_0}{\partial z} w_0 \right) d\tau, \\ Y &= \int \mu_0 \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial v_0}{\partial x} u_0 + \frac{\partial v_0}{\partial y} v_0 + \frac{\partial v_0}{\partial z} w_0 \right) d\tau, \\ Z &= \int \mu_0 \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{\partial w_0}{\partial x} u_0 + \frac{\partial w_0}{\partial y} v_0 + \frac{\partial w_0}{\partial z} w_0 \right) d\tau, \end{aligned} \right.$$

$$16) \left\{ \begin{aligned} D_x &= \int \mu_0 \left\{ (y - \eta) \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{\partial w_0}{\partial x} u_0 + \frac{\partial w_0}{\partial y} v_0 + \frac{\partial w_0}{\partial z} w_0 \right) \right. \\ &\quad \left. - (z - \zeta) \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial v_0}{\partial x} u_0 + \frac{\partial v_0}{\partial y} v_0 + \frac{\partial v_0}{\partial z} w_0 \right) \right\} d\tau, \\ D_y &= \int \mu_0 \left\{ (z - \zeta) \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial x} u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial y} v_0 + \frac{\partial u_0}{\partial z} w_0 \right) \right. \\ &\quad \left. - (x - \xi) \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{\partial w_0}{\partial x} u_0 + \frac{\partial w_0}{\partial y} v_0 + \frac{\partial w_0}{\partial z} w_0 \right) \right\} d\tau, \\ D_z &= \int \mu_0 \left\{ (x - \xi) \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial v_0}{\partial x} u_0 + \frac{\partial v_0}{\partial y} v_0 + \frac{\partial v_0}{\partial z} w_0 \right) \right. \\ &\quad \left. - (y - \eta) \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial x} u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial y} v_0 + \frac{\partial u_0}{\partial z} w_0 \right) \right\} d\tau. \end{aligned} \right.$$

Auf diesen Grundlagen kann man thatsächlich durch den Einfluss der Molekular-Funktionen erster Ordnung die hydrodynamischen inversen Analogien zu vollkommenen Analogien mit den elektrischen Erscheinungen machen und so eine mechanische Theorie der elektrischen Fernwirkungen gewinnen.¹⁾

Wenn ich auch diese Verwertung der Molekular-Funktionen erster Ordnung für die wichtigste Anwendung unserer Theorie halte, so zweifle ich doch nicht, dass die Einführung dieser Funktionen auch in anderen Gebieten der theoretischen Physik, im besonderen in der Theorie der Krystalle und der Krystall-

¹⁾ In bezug auf die Rechnungen im einzelnen verweise ich auf: A. Korn, Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik, II. Teil I. Abschnitt (F. Dümmler's Verlag, Berlin 1897).

optik, vielleicht auch in den Anfangsgründen der theoretischen Chemie von Nutzen sein wird.

Schlussbemerkung. Die obigen Betrachtungen ähneln einigermassen gewissen Untersuchungen in der kinetischen Gas-theorie. Wie bei uns von der Dichtigkeit, so wird dort von den Geschwindigkeitskomponenten angenommen, dass die Werte ihrer Differenzen innerhalb sehr kleiner Raumgebiete nicht gegen die Geschwindigkeitseinheit von derselben Ordnung klein sind, wie die Dimensionen dieser Raumgebiete gegen die Längen-einheit, und man rechnet mit den Mittelwerten gewisser Funktionen der Geschwindigkeitskomponenten, die man als stetige Funktionen der Zeit und der Stelle ansieht.¹⁾ Dadurch, dass wir diese Voraussetzung nur für die Dichtigkeit, nicht für die Geschwindigkeitskomponenten machen, erhält unsere Theorie eine viel grössere Einfachheit und völlige mathematische Strenge.²⁾

Es sei mir noch gestattet, einen analytischen Ausdruck für die lebendige Kraft eines Kontinuums bei Berücksichtigung der Molekular-Funktionen erster Ordnung aufzustellen. Es ist:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int \mu (u^2 + v^2 + w^2) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int \mu_0 \left\{ u^2 + v^2 + w^2 + z \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) \right. \\ &\quad \left. + z \xi_2 \frac{\partial}{\partial y} (u^2 + v^2 + w^2) \right. \\ &\quad \left. + z \xi_3 \frac{\partial}{\partial z} (u^2 + v^2 + w^2) \right\} d\tau, \end{aligned}$$

somit nach 7):

$$17) \quad T = \frac{1}{2} \int \mu_0 \left\{ u^2 + v^2 + w^2 + z \left(u \frac{d\xi_1}{dt} + v \frac{d\xi_2}{dt} + w \frac{d\xi_3}{dt} \right) \right\} d\tau.$$

¹⁾ Vgl. u. a.: G. Kirchhoff, Vorl. über die Theorie der Wärme, 15. Vorl. pag. 156 ff.

²⁾ Für die Erklärung der Wärmeerscheinungen werden wir natürlich jener Voraussetzungen, auch für die Geschwindigkeitskomponenten, nicht entraten können.

Wir können nun, wenn wir die Bewegung des Kontinuums aus sichtbaren und schwingenden Bewegungen zusammengesetzt annehmen, $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ durch Gleichungen von der Form definieren:

$$18) \quad \begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = a' + \sum_j U_{j1} \cos j \frac{t}{T} 2\pi + U_{j2} \sin j \frac{t}{T} 2\pi, \\ \frac{d\xi_2}{dt} = b' + \sum_j V_{j1} \cos j \frac{t}{T} 2\pi + V_{j2} \sin j \frac{t}{T} 2\pi, \\ \frac{d\xi_3}{dt} = c' + \sum_j W_{j1} \cos j \frac{t}{T} 2\pi + W_{j2} \sin j \frac{t}{T} 2\pi, \end{cases}$$

als ob die $\frac{d\xi_1}{dt}$, $\frac{d\xi_2}{dt}$, $\frac{d\xi_3}{dt}$ sich aus sichtbaren Geschwindigkeiten $a' b' c'$ und schwingenden Geschwindigkeiten zusammensetzten. Sehen wir dies in 17) ein, so ergibt sich aus dieser Formel die folgende Gleichung:

$$19) \quad \frac{1}{T} \int_t^{t+T} T dt = \frac{1}{2} \int \mu_0 \left[(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) + \frac{1}{2} \sum_j (u_{j1}^2 + v_{j1}^2 + w_{j1}^2 + u_{j2}^2 + v_{j2}^2 + w_{j2}^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_j (u_{j1} U_{j1} + v_{j1} V_{j1} + w_{j1} W_{j1} + u_{j2} U_{j2} + v_{j2} V_{j2} + w_{j2} W_{j2}) \right] dt. ^1)$$

Auch diese Formel lässt uns den Einfluss erkennen, den die Molekular-Funktionen erster Ordnung auf die Bewegung eines Kontinuums ausüben können, wenn die Geschwindigkeiten $u_{j1} v_{j1} w_{j1} u_{j2} v_{j2} w_{j2}$ und $U_{j1} V_{j1} W_{j1} U_{j2} V_{j2} W_{j2}$ sehr gross sind.

¹⁾ Das Glied:

$$\frac{1}{2} \mu_0 \sum (u_0 a' + v_0 b' + w_0 c')$$

haben wir unter dem Integral, als zu vernachlässigen, fortgelassen, da $u_0 v_0 w_0 a' b' c'$ als sichtbare Geschwindigkeiten vorausgesetzt sind.