

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVII. Jahrgang 1897.

München.

Verlag der k. Akademie.

1898.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Bemerkungen über die Beziehung zwischen Schwere- messungen und geologischen Untersuchungen und Bericht über die in Bayern begonnenen Pendel- bestimmungen.

Von **Karl von Orff.**

(Eingelaufen 6. März.)

Seit den durch von Sterneek ausgeführten zahlreichen Pendelmessungen, welche für einen grossen Theil der österreichischen Monarchie ein engmaschiges Netz von Schwerebestimmungen ergaben, und seit der Publication der für die Verwerthung der Pendelbeobachtungen so wichtigen Schrift Helmert's: „Die Schwerkraft im Hochgebirge“, hat sich das Interesse an diesen Arbeiten wesentlich gesteigert und namentlich bei den Vertretern der geologischen Wissenschaft den lebhaften Wunsch nach umfassender Ausführung von Schwerebestimmungen hervorgerufen. Derartige absolute Messungen bieten bekanntlich nicht unbedeutende Schwierigkeiten und zeigen die bisher auf diesem Wege erlangten Resultate trotz aller auf dieselben verwendeten Zeit und Mühe immer noch ganz erhebliche Divergenzen¹⁾; man kann indessen das zunächst vorliegende Ziel, für eine grosse Anzahl von Punkten der Erdoberfläche Schwerebestimmungen zu gewinnen, auch durch Ausführung relativer Messungen erreichen, wobei es sich

¹⁾ Siehe G. R. Putnam: „Results of a transcontinental series of Gravity measurements“ im XIII. Bande der Bulletins der Philos. Society of Washington.

blos darum handelt, das Verhältniss der Schwerkraft verschiedener Orte zu der Schwere an einer bestimmten Centralstation zu ermitteln. Dieses Verfahren wurde schon zu Anfang unseres Jahrhunderts von den englischen Beobachtern Hall, Foster, Sabine u. A. eingeschlagen, schien aber, als man sich in der zweiten Hälfte des Jahrhunderts fast ausschliesslich den absoluten Messungen zugewendet hatte, in Vergessenheit gerathen zu sein. Es ist das Verdienst von Sterneck's, welcher einen zu relativen Messungen besonders geeigneten, einfachen und leicht transportablen Apparat construirt hatte, dass relative Messungen im Laufe des letzten Decenniums in ausgedehnterem Maasse zur Ausführung gelangten.

Auch die K. Bayerische Commission für die Internationale Erdmessung hat, veranlasst durch die von Seite der deutschen Akademien und der Wiener Akademie ausgesprochenen Wünsche, der Frage der Schweremessungen ihre besondere Aufmerksamkeit zugewendet. Im Mai des vorigen Jahres wurde von der Firma E. Schneider in Wien ein Pendelapparat Sterneck'scher Construction bezogen, dessen Constanten unter gütiger Leitung des Herrn Oberst von Sterneck von dem vormaligen Observator unserer bayer. Commission, Herrn Dr. Oertel und dem k. k. Marineliutenant Herrn von Filz gelegentlich der Uebernahme des Apparates in dem Pendelobservatorium des k. und k. militärgeographischen Institutes zu Wien bestimmt wurden. Nachdem dann der nunmehrige Observator der Commission, Herr Dr. Anding, sich in dem Beobachtungsverfahren gehörig eingeübt und im Laufe der Monate August und September mehrere Serien von Pendelmessungen auf der k. Sternwarte Bogenhausen ausgeführt hatte und nachdem inzwischen auch die von Herrn Ingenieur Riefler gefertigte Sekundenpendeluhr zur Ablieferung gekommen war, konnten noch die beiden auswärtigen Stationen Dachau und Pfaffenhofen a. d. Ilm abgefertigt werden.

Der im Nachfolgenden mitgetheilte Bericht des Herrn Dr. Anding gibt die Resultate der von ihm ausgeführten Beobachtungen, und erläutert den zur Erlangung derselben eingeschlagenen Rechnungsgang. —

Vorläufiger Bericht über die Resultate der in Bayern begonnenen Pendelmessungen

1.

Die Pendelbeobachtungen der k. Bayerischen Commission für die internationale Erdmessung werden nach der Sterneck'schen Methode ausgeführt, an deren Princip nur kurz erinnert werden möge.

Eine Secundenuhr dient dazu, bei jeder Pendelschwingung auf einen kurzen Moment einen Strom zu unterbrechen, in welchen eine Vorrichtung, der „Coincidenzapparat“, eingeschaltet ist, welcher diese Unterbrechungen dem Auge sichtbar macht. Es wird nämlich vermöge eines Elektromagneten entsprechend den Unterbrechungen ein Anker in Bewegung versetzt derart, dass bei jeder Bewegung durch momentanes Ueberdecken zwei länglicher, einseitig beleuchteter Oeffnungen dem anderseitig beobachtenden Auge ein Lichtblitz erscheint.

Diese Lichtblitze werden jedoch nicht direct beobachtet, sondern durch einen Spiegel reflectirt, welcher mit dem Pendel, dessen Schwingungsdauer gemessen werden soll, fest verbunden ist und an seinen Bewegungen Theil nimmt; und diese reflectirten Blitze sind es, welche durch ein Fernrohr mit Horizontalfaden beobachtet werden. Da bei jedem Secundenschlag der Beobachtungsuhr, also bei jedem Lichtblitz, das zu beobachtende Pendel, welches nicht genau halbe Secunden schwingt, in einer etwas anderen Phase steht, so werden die Lichtblitze wegen der veränderten Stellung des Spiegels in etwas veränderter Richtung reflectirt; sie werden also im Gesichtsfeld des Fernrohrs regelmässig fortrücken. Zwischen beiden Apparaten, der Uhr und dem Pendel findet nun eine Coincidenz statt, so oft beispielsweise der Blitz den Mittelfaden des Fernrohrs durchschreitet, und dieser Moment kann ebenso genau bestimmt werden, wie ein Fadenantritt beim Passageninstrument. — Die Schwingungsdauer des Pendels ist also auf die anderweitig bekannte Schwingungsdauer der Uhr zurückgeführt.

2.

Die Pendel, die Stative, sowie der Coincidenzapparat sind von der Firma Schneider in Wien hergestellt. Die Pendel tragen die Nummern

89

90

91

und besitzen für das Münchener Beobachtungslocal die Schwingungsdauer in Sternzeit

0^s50784810^s50777470^s5077195

so dass man in Verbindung mit einer Sternzeituhr nach etwas über 30 Secunden je eine Coincidenz zu erwarten hat.

Unter den zwei beigegebenen Stativen, einem Wand- und einem Pfeilerstativ, ist bis jetzt nur das erstere verwendet worden. Die Festigkeit der Mauer wurde durch das Wippverfahren, die Festigkeit des Stativs durch regelmässiges Anziehen geprüft, wodurch sich stets ergab, dass die Schwingungsdauer des Pendels durch das Mitschwingen der Träger nur unmerklich beeinflusst wird. (10maliges Wippen mit je 6 kg Kraft ergab stets nur einen Ausschlag von $0^{\text{p}}05 = 0^{\text{p}}20 = 12''$ d. h. pro 1 kg = $0^{\text{p}}2$.)

Als Beobachtungsuhr diente bis zum 22. September die Hauptuhr Riefler I der Sternwarte. Dieselbe war, zunächst für die Zwecke der Meridianbeobachtungen, von Herrn Ingenieur Riefler mit einem Contact versehen worden, derart, dass die Axe des Steigrades noch ein weiteres Rad trägt, dessen Zähne bei jeder Bewegung den einen Arm eines Hebels einen kurzen Moment heben. Der Strom, welcher durch die Drehungsaxe des Hebels und den zweiten Hebelarm, nicht aber durch das Räderwerk der Uhr geht, wird also bei jeder Bewegung des Steigrades am Ende des zweiten Hebelarmes auf kurze Zeit unterbrochen, indem der Hebel von einem Stift abgehoben wird, durch dessen höhere oder tiefere Stellung man die Dauer der Unterbrechung reguliren kann. Der Contact steht also mit dem Pendel in gar keiner, mit dem Steigrad nur in mechanischer Berührung; da sich aber das Steigrad nur in dem-

jenigen Moment bewegt, wo das Pendel durch die Mittellage schwingt, mithin der negative Impuls den kleinsten Einfluss auf die Schwingungsdauer hat, so übt der Contact auch keinen mechanischen Einfluss.

Nach dem 22. September wurde eine andere Uhr desselben Systems, Riefler 25, verwendet, welche von Herrn Ingenieur Riefler eigens für die auswärtigen Beobachtungen construiert worden ist. Es sind daher Vorrichtungen angebracht worden, die Pendelfeder wie die Aufhängung derselben für die Reise festzuklemmen. Ferner ist die Lücke, welche an Stelle des sechzigsten Zahnes des Contactrades die vollen Minuten markierte, ausgefüllt geblieben, weil sie bei Pendelmessungen stören kann. Endlich sind in den Consolen des Werkträgers beiderseits Schrauben angebracht worden, welche mit ihren Stirnflächen auf den unteren Zapfen der Mauerplatte gestützt sind, und welche dazu dienen, die Uhr auf beiderseits gleichmässigen Abfall bequem einzustellen.

Diese Einstellung ist erforderlich, weil bei ungleichem Abfall die Wege, welche im Fernrohr von den Lichtblitzen im Lauf einer Secunde beschrieben werden, abwechselnd gross und klein, eventuell sogar vor- und rückläufig werden müssen. Man hat daher in den Lichtblitzen ein Hilfsmittel, Ungleichheiten im Abfall der Uhr auch dann noch deutlich zu erkennen, wenn das Ohr längst keinen Unterschied mehr wahrnimmt; umgekehrt muss, wenn es sich um Pendelmessungen handelt, um so mehr Sorgfalt auf diese Einstellung verwendet werden, weil bei Bewegung der Schrauben das Uhrwerk sammt Träger und Kasten mitbewegt werden und weil durch nachträgliche Ausgleichung der entstandenen Spannungen die Einstellung sich wieder verändern kann.

3.

Die Anordnung der Messungen ist dieselbe wie anderwärts. Es werden bei jedem Pendel die 1. bis 11., dann die 61. bis 71. Coincidenz beobachtet; vor Beginn und nach Schluss jeder Messung wird das Magazinthermometer und ein Controlthermo-

meter, ferner das Barometer mit der gehörigen Temperatur, sowie auch die Amplitude des schwingenden Pendels abgelesen. Das Mittel beider Ablesungen wird zur Reduction verwendet.

Die einzelnen Pendel werden am Vormittag in der Reihenfolge Nr. 89, 90, 91, am Nachmittag in der Reihenfolge 91, 90, 89 erledigt.

Die Coincidenzdauer c wird nach der Formel

$$s = \frac{c}{2c - 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4c - 2}$$

in Schwingungsdauer s verwandelt. Dies geschieht durch Benützung von Tafeln, welche für die 3 hiesigen Pendel das zweite Glied des obigen Ausdrucks mit dem Argument c nachweisen. Solche Tafeln brauchen nur einen geringen Umfang zu besitzen, da die Coincidenzdauer in Uhrsecunden an jedem Ort sogar vollständig die gleiche bleiben würde, wenn nicht die Beobachtungsuhr bei erneutem Aufstellen ohnedies kleine Veränderungen ihres Ganges erlitte. Wollte man dagegen ein Chronometer als Beobachtungsuhr verwenden, so müsste man innerhalb Bayerns das Argument auf einen Spielraum von $\frac{1}{2}$ Secunde ausdehnen.

Die Schwingungsdauern werden dann auf die Temperatur 0° reducirt durch die Correction

$$- 48.2 \cdot t^{\circ},$$

auf den luftleeren Raum mit

$$- 542 \text{ Luftdichte} = - 542 \cdot \frac{b - 0.377 \cdot r \cdot E(t)}{760 (1 + 0.00367 \cdot t)}$$

(b = Barometerstand, r = relative Feuchtigkeit, $E(t)$ = Maximalspannkraft bei der Temperatur t), endlich auf die Amplitude 0 mit

$$- \frac{1}{4} \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \text{Schwingungsdauer.}$$

Jeder dieser Ausdrücke ist in Tafeln gebracht. Da jedoch die Tafel für den Einfluss der Luftdichte unbequem werden

würde, weil sie nach 2 Argumenten fortschreitet, so würde der Ausdruck in 3 Theilen tabulirt, wovon der erste nur von der Temperatur, der zweite nur vom Barometer abhängig ist, während der dritte allerdings beide Argumente enthält, jedoch wegen seiner Kleinheit nur in sehr weiten Intervallen tabulirt zu werden braucht.

Die Constanten 48.2 und 542 (in Einheiten der 7 Decimale der Schwingungsdauer) sind nach den in Wien unter Leitung des Herrn Obersten von Sterneek ausgeführten Beobachtungen ermittelt worden. Der Ausdehnungscoefficient der Luft 0.00367 ist nach Régnault und das specifische Gewicht des Wasserdampfes 0.623 (für $0.377 = 1 - 0.623$) ist nach Wüllner angesetzt; für r wurde der Mittelwerth 0.7 verwendet; endlich $E(t)$ ist den ausgeglichenen Régnault'schen Spannkrafttabellen entnommen werden.

Die Correction der Barometerablesung wegen Ausdehnung des Quecksilbers und des Glases wurde den etwaigen Tafelwerthen nicht einverleibt, sondern eigens tabulirt, damit eventuell auch Aneroide verwendet werden könnten, was vom 2. September ab auch thatsächlich geschah.

4.

Die Zeit wird an die auswärtigen Stationen auf telegraphischem Wege übertragen. Hierzu steht am Morgen wie am Abend je 20 Minuten lang die Hauptuhr (zeitweilig, für dienstliche Mittheilungen, auch der Telegraphenapparat) der Münchener Sternwarte in directer Verbindung mit dem Telegraphenapparat desjenigen Postamts, in dessen Nähe sich das Observatorium befindet. Man hat also den Vortheil, sich auf eine Uhr zu beziehen, deren Gang möglichst sicher bestimmt ist.

Die Uebertragung der Zeit von der Poststation (wo, soweit auf der Linie Ruhestrom zur Verwendung kommt, stets der erste Schlag des *Rélais* aufgefasst wird) zur Beobachtungsuhr im Observatorium geschah mit Hilfe des nach mittlerer Zeit gehenden Chronometers Delolme 861 in der Weise, dass die Vergleichung im Observatorium morgens nach, abends vor

der anderen auf der Poststation stattfand. Wegen dieser Reihenfolge, dann aber auch, weil zwischen beiden Vergleichen eine geraume Zeit vergeht (theilweise über 1 Stunde, da am Morgen meistens inzwischen das erste Pendel eingehängt wurde und da bei der Uhrvergleichung stets möglichst viele Coincidenzen genommen wurden) musste man den Gang der Uebertragungsuhr ziemlich genau bestimmen. Es stellte sich aber heraus, dass dieselbe bei Tag und bei Nacht verschiedenen Gang hat. Für jetzt wurde das Mittel aus beiden Gängen verwendet; nicht als ob demselben eine grössere Berechtigung deshalb beigelegt würde, weil die Uebertragung nahe der Grenzscheide zwischen Tag und Nacht stattfand, sondern weil der Fehler halbirt wird. Für die Zukunft jedoch sollen Morgens wie Abends im Observatorium doppelte Vergleichen gemacht werden, nämlich vor und nach der telegraphischen Vergleichung. Dabei ist auch der noch wichtigere Zweck ins Auge gefasst, Unregelmässigkeiten zu constatiren, welche durch das Tragen des Chronometers entstehen. Eine solche ist bis jetzt, ohne dieses Hilfsmittel, nur einmal wahrgenommen worden.

Auf den äusseren Stationen wurde ferner täglich 3 mal, nämlich morgens, abends und zwischen beiden Pendelserien, die Beobachtungsuhr mit Hilfe des Delolme mit dem Sternzeitchronometer Bröcking 898 verglichen, um eventuell das letztere, wenn auch mit geringerem Gewicht, als Beobachtungsuhr zu substituieren. Die Rechnungen ergaben jedoch, wenn diese übrigens gut gehende Uhr eingeführt würde, keine nennenswerthe Verbesserung der Resultate. Ueberhaupt ist auf die Reduction der Uhrgänge viel Sorgfalt verwendet worden.

5.

Ohne auf Einzelheiten weiter einzugehen, theile ich nachstehend die Resultate mit und zwar gleich die Mittelwerthe aus Vor- und Nachmittagsbeobachtungen. Die zwei ersten Münchener Pendeltage sind von Herrn Dr. Oertel, alle folgenden von mir beobachtet. Unter München sind auch unge-

trennt die Anschlussbeobachtungen mit aufgeführt, welche zwischen und nach den auswärtigen Beobachtungen stattfanden. Mit Weglassung der drei ersten Decimalen 0.507 ergab sich für die Schwingungszeiten der Pendel

München.

Epoche	89	90	91	Abw. vom Mittel			Mittel der Pendel	Abw. vom Mittel
				89	90	91		
11. Juni	8501	7794	7205	+ 20	+ 47	+ 10	7833	+ 26
4. Juli	8491	7772	7231	+ 10	+ 25	+ 36	7831	+ 24
13. August	8473	7774	7201	— 8	+ 27	+ 6	7816	+ 9
21. August	8515	7741	7193	+ 34	— 6	— 2	7816	+ 9
2. Sept.	8507	7747	7188	+ 26	0	— 7	7814	+ 7
15. Sept.	8471	7737	7200	— 10	— 10	+ 5	7803	— 4
9.5 Okt.	8157	7725	7191	— 24	— 22	— 4	7791	— 16
12. Okt.	8473	7732	7187	— 8	— 15	— 8	7797	— 10
29. Okt.	8475	7744	7190	— 6	— 3	— 5	7803	— 4
30. Okt.	8443	7703	7165	— 38	— 44	— 30	7770	— 37
Mittel	8481	7747	7195				7807	

Dachau.

29. Sept.	8393	7675	7133	— 1	— 9	+ 5	7728	— 2
30. Sept.	8391	7661	7114	— 3	— 5	— 14	7722	— 8
2. Okt.	8394	7669	7129	0	+ 3	+ 1	7731	+ 1
4. Okt.	8399	7676	7138	+ 5	+ 10	+ 10	7738	+ 8
1.25 Okt.	8394	7666	7128				7730	

Pfaffenhofen.

16. Okt.	8285	7534	6982	+ 6	+ 7	— 3	7600	+ 3
17. Okt.	8297	7525	6999	+ 18	— 2	+ 14	7607	+ 10
19. Okt.	8291	7535	6989	+ 12	+ 8	+ 4	7605	+ 8
20. Okt.	8257	7529	6993	— 22	+ 2	+ 8	7593	— 4
21. Okt.	8270	7513	6963	— 9	— 14	— 22	7582	— 15
22. Okt.	8275	7529	6984	— 4	+ 2	— 1	7596	— 1
19.17 Okt.	8279	7527	6985				7597	

Die Zahlen der letzten Columnne, als Beobachtungsfehler aufgefasst, ergaben die mittleren Fehler eines Tagesmittels:

in München	± 19
Dachau	± 7
Pfaffenhofen	± 9

also bei München einen auffallend grossen Werth. Dazu kommt aber, dass jene Zahlen geradehin einen ganz bestimmten Gang zeigen. Offenbar haben sich also die Schwingungszeiten der Pendel im Laufe der Beobachtungsperiode verkürzt.

Um dies weiter zu verfolgen, wurden jene Zahlen nach der Methode der kleinsten Quadrate durch die Formel

$$0.4 - 35.4 \cdot t$$

dargestellt, wobei t vom 5. September gezählt und in Einheiten von 100 Tagen gemessen ist; dann ergab sich

Beob.	Rechn.	Beob.-Rechn.
+ 26	+ 31	— 5
+ 24	+ 23	+ 1
+ 9	+ 9	0
+ 9	+ 6	+ 3
+ 7	+ 2	+ 5
— 4	— 3	— 1
— 16	— 12	— 4
— 10	— 13	+ 3
— 4	— 19	+ 15
— 37	— 19	— 18

und hiedurch ist in der That der mittlere Fehler auf ± 9 herabgesunken.

Diese Formel wurde verwendet, um diejenigen Schwingungsdauern zu bestimmen, welche die Pendel in München in dem Zeitpunkt gehabt hätten, als die auswärtigen Beobachtungen stattfanden. Hiernach erhält das Mittel der Münchener Beobachtungen

für Dachau (Epoche = 1.25 Oktbr.) die Correction — 9
für Pfaffenhofen (Epoche = 19.17 Oktbr.) die Correction — 15

Es ist nicht ohne Werth, zu sehen, wie sich gegenüber diesem Erfolg die Pendel einzeln verhalten. Hierzu wurden aus den entsprechenden Abweichungen S. 163 nach der Methode der kleinsten Quadrate die Formeln abgeleitet

$$\begin{array}{ccc} 89 & 90 & 91 \\ - 0.4 - 30.8 \cdot t & - 0.1 - 48.9 \cdot t & + 0.1 - 26.6 \cdot t; \end{array}$$

durch welche die mittleren Fehler der Beobachtungen

von	23	29	17
auf	17	13	11

herabgemindert wurden. Jedenfalls zeigt sich, dass alle Pendel sich im gleichen Sinne verändert haben, allerdings in verschiedenem Grade; am wenigsten das Pendel 91, welches jedoch seinerzeit beim Transport von Wien nach München eine plötzliche Verkürzung erfahren hatte.

6.

Es bleibt noch übrig, die Resultate festzustellen.

Die Stelle, wo bei auswärtigen Beobachtungen der Pendelapparat angebracht war, wird in die Steuerpläne des k. Katasterbureaus eingetragen und ihre Coordinaten gegen den nächsten trigonometrischen Punkt mit dem Zirkel am Massstab abgemessen; hieraus erhält man zunächst die Soldner'schen Coordinaten des Punktes, aus welchen dann nach den Vorschriften der „Bayer. Landesvermessung“ die geographischen Coordinaten berechnet werden. Eine genauere Zeichnung im Beobachtungsheft soll dienen, den Punkt wieder auffinden zu können.

Die Höhe des Observatoriums wird barometrisch bestimmt, nämlich durch Anschluss an den nächsten Höhenpunkt (des Präcisionsnivelements, des Eisenbahnnivelements oder der Höhenangaben des topographischen Bureaus). Hierbei kann man allerdings um etwa 1—2 Meter fehlen, was jedoch erst etwa 1 Einheit der 7 Decimale der Schwingungsdauer ausmacht.

So ergab sich

	Länge von Greenwich			Breite			Höhe
München:	11°	36'	32"	48°	8'	45"	525 ^m
Dachau:	11	26	0	48	15	37	501
Pfaffenhofen:	11	30	25	48	31	50	428

Die theoretische Zunahme der Schwere mit der geographischen Breite wurde nach Helmert angesetzt und die Abhängigkeit der Schwere von der Meereshöhe nach der Bouguer'schen Formel (Beobachter im Centrum der oberen Grundfläche eines Kreiscylinders) berechnet. Für die ganze Ausdehnung Bayerns ist es hinreichend genau, eine Differentialformel zu benützen, welche die Differenz von g gegen die Schwere in München zu

$$\Delta g^{\text{mm}} = + 51.93 \cdot \Delta \sin^2 \varphi - 0.0021754 \cdot \Delta h^{\text{m}} \text{ ergibt a)}$$

welche auf den Werthen beruht: $g = 9.808812^{\text{m}}$, für den Erdradius = 6374000^m, Dichte des Terrains unter der Station = 2.15^m, mittlere Erddichte = 5.5.

Andererseits berechnet sich für die drei Münchener Pendel aus den beobachteten Zunahmen der Schwingungsdauer in Einheiten der 7 Decimale Δt die Zunahme der beobachteten Schwere nach der Formel

$$\Delta g^{\text{mm}} = 0.0038634 \cdot \Delta t. \quad \text{b)}$$

Von München bis Dachau, bzw. bis Pfaffenhofen findet sich nach a) die theoretische Zunahme der Schwere

$$0.15^{\text{mm}} \text{ bez. } 0.56^{\text{mm}}$$

und nach b) die beobachtete Zunahme

$$0.26^{\text{mm}} \text{ bez. } 0.75^{\text{mm}}$$

das sind Unterschiede, die bei weitem nicht durch Beobachtungsfehler erklärt werden können.

Um dies zu zeigen, vergleichen wir die den theoretischen Schwerezunahmen entsprechende Zunahme der Schwingungsdauer in Einheiten der 7. Decimale

$$40 \quad \text{bez.} \quad 144$$

mit den thatsächlich beobachteten Zunahmen

$$68 \quad \text{bez.} \quad 195$$

die Beobachtungen müssten also um

$$28 \quad \text{bez.} \quad 51$$

Einheiten der 7. Decimale falsch sein, während die mittleren Fehler des Resultats nur

$$3 \quad \text{bez.} \quad 4$$

betrugen.

Man kann auch so sagen: Infolge der theoretischen Schwerezunahme würde eine von München nach Dachau bzw. Pfaffenhofen transportirte Uhr täglich um

$$0.68^{\text{sec}} \quad \text{bez.} \quad 2.45^{\text{sec}}$$

vorgehen; bei der thatsächlichen Schwerezunahme müsste dagegen ceteris paribus eine Beschleunigung von

$$1.16 \quad \text{bez.} \quad 3.32$$

eintreten. Das gibt Unterschiede

$$0.48 \quad \text{bez.} \quad 0.87$$

wie sie bei Uhrvergleichen wie bei Zeitbestimmungen gar nicht denkbar sind.

Schliesslich seien noch die Werthe γ der Helmert'schen Formel mit den beobachteten aber auf den Meeresspiegel reducirten Werthen verglichen, wobei für München der Sterneck'sche Werth 9807.35^{mm} bei 529^{m} Höhe zu Grunde gelegt ist:

	g mm	γ mm	$g - \gamma$ mm
München	9808.50	9808.80	— 0.31
Dachau	9808.76	9808.97	— 0.21
Pfaffenhofen	9809.25	9809.37	— 0.12

mit welchen man die früheren Zahlen verificieren kann.

Dr. E. Anding.

Die in Wien ausgeführten Messungen geben Gelegenheit zu einer wiederholten Bestimmung der Intensität der Schwere für die Sternwarte Bogenhausen. Es können jedoch hiezu nur die beiden Pendel Nr. 89 und Nr. 90 verwendet werden, da die zunächst nach den Wiener Beobachtungen am 11. Juni und 4. Juli in Bogenhausen ausgeführten Messungen eine die Grenzen der Beobachtungsfehler wesentlich überschreitende Verkürzung des Pendels Nr. 91 ausgewiesen haben, welche wahrscheinlich während des Transportes von Wien nach München eingetreten sein dürfte.

Seit der Ankunft in München, sowie während der Beobachtungen auf der Sternwarte und auf den beiden auswärtigen Stationen haben sich die drei Pendel — wie obiger Bericht ausweist — nur um geringere und zwar mit der Zeit proportional fortschreitende Beträge verkürzt. Aehnliche Wahrnehmungen wurden in den letzten Jahren auch von andern Pendelbeobachtern gemacht, ohne dass es gelungen wäre, eine befriedigende Erklärung dieser Erscheinung zu geben.¹⁾

Die reducirten Schwingungszeiten wurden in Wien, wie folgt beobachtet:

5. Mai 1896	Nr. 89	$T = 0^s5078188$	Nr. 90	$T = 0^s5077460$
5. „ „		8172		7451
7. „ „		8203		7479
8. „ „		8198		7504
9. „ „		8184		7460
10. „ „		8187		7496

Mittelwerth: Nr. 89 $T = 0^s5078189$; Nr. 90 $T = 0^s5077475$ für die Epoche 7. Mai.

Die oben vorgetragenen, während des Sommers und Herbstes ausgeführten Messungen ergaben für die Schwingungszeiten dieser beiden Pendel:

¹⁾ Siehe „Mittheilungen des k. und k. milit.-geograph. Instituts“ XIV. Band und „Bestimmung der Polhöhe und der Intensität der Schwerkraft auf 22 Stationen von der Ostsee bei Kolberg bis zur Schneekoppe.“ Berlin 1896. (Veröffentl. d. K. Preuss. Geodät. Instituts).

Für Nr. 89 $T = 0.5078480.6 - 0.308 t$ (Einheiten der 7. Decimale)

„ Nr. 90 $T = 0.5077746.9 - 0.489 t$ („ „ „ „)

wobei t die seit der Epoche — 5. September — verflossene Zeit, in Tagen ausgedrückt, bedeutet; hiemit erhält man für die Epoche der Wiener Beobachtungen (7. Mai 1896):

für Nr. 89: $T = 0.5078518$ und für Nr. 90: $T = 0.5077806$

Mit diesen Daten und unter Zugrundelegung des von von Sterneck angenommenen Werthes der Schwerkraft in Wien (Milit.-geograph. Institut) $g = 9.80876^m$) ergibt sich für die Schwerkraft auf der Sternwarte Bogenhausen (Pendelobservatorium im Keller des Refraktorgebäudes):

nach Pendel Nr. 89: $g = 9.807477^m$;

„ „ Nr. 90: $g = 9.807469^m$.

Der Mittelwerth dieser beiden in bemerkenswerther Weise übereinstimmenden Resultate ist demnach $g = 9.80747^m$.

Im Jahre 1877 habe ich in der k. Sternwarte Bogenhausen mit Hülfe des dem Oesterreichischen Gradmessungs-Büreau gehörigen Reversionspendel-Apparates eine absolute Bestimmung der Länge des einfachen Pendels von 1^s (mittlere Zeit) Schwingungsdauer ausgeführt²⁾; diese Beobachtungen ergaben für den ovalen Mittelpfeiler im Meridiansaale der Sternwarte die Länge des einfachen Sekundenpendels $L = 0.9936937^m$ und den entsprechenden Werth für die Beschleunigung der Schwerkraft $g = 9.807362^m$.

Nachdem nun bei diesen Messungen der Schwerpunkt des Reversionspendels sich 4^m über jenen der im Kellerraum des Refraktorgebäudes schwingenden Pendel Nr. 89 und Nr. 90 befunden hatte, so ist behufs strenger Vergleichung das 1877 erhaltene Resultat noch um $+ 0.012^m$ zu vergrössern, wodurch sich dasselbe zu $g = 9.807374^m$ ergibt.

1) Siehe „Mittheilungen des k. und k. milit.-geograph. Instituts“ XI. Band.

2) Siehe „Abhandlungen der k. bayer. Akademie der Wissensch.“ II. Cl. XIV. Band, III. Abth.

Ferner hat Herr Oberst von Sterneck im Sommer des Jahres 1891 die Schwerkraft auf der Sternwarte von Bogenhausen mit der in Wien (Milit.-geograph. Institut) stattfindenden durch 4 Beobachtungsreihen mit je 4 Pendeln verglichen und für ersteren Punkt erhalten: $g = 9.80735^m$ ¹⁾; bringt man hier die oben erwähnte Reduktion auf den Kellerraum des Refraktorgebäudes an, so ergibt sich $g = 9.80736^m$.

Die Differenz der Resultate von 1891 und 1896 beträgt 0.11^m ; eine der Ursachen dieser Differenz glaubt Herr Oberst von Sterneck in einem minimalen Gleiten seines Pendelstativs auf der ziemlich glatten Oberfläche des ovalen Steinpfeilers im Meridiansaale der Sternwarte erblicken zu sollen; es dürfte ferner auch auf eine kleine Unsicherheit in dem Uhr gange hinzuweisen sein, da die schlechte Witterung in der Zeit vom 5. mit 10. Mai 1896 nicht eine einzige gute Zeitbestimmung ermöglichte, so dass der Uhr gang für die Beobachtungszeit nur aus der Vergleichung von vier allerdings sehr gut gehenden Uhren ermittelt werden konnte. Indessen ist nicht zu übersehen, dass nach einer Schätzung Helmert's²⁾ der mittlere Fehler einer relativen Schweremessung von Sterneck's selbst bei sehr sicherer Kenntniss des Uhr ganges immerhin zu $\Delta(g) = \pm 0.05^m$ zu veranschlagen sein dürfte; die Differenz zwischen den relativen Bestimmungen von 1891 und 1895, — nämlich 0.11^m , — überschreitet also den zu erwartenden mittleren Fehler nur um etwa 0.04^m . Man wird also vorläufig den Werth der Beschleunigung der Schwere für das Pendelobservatorium auf der Sternwarte zu Bogenhausen zu $g = 9.80741^m$ anzunehmen haben, welchem Werthe ein mittlerer Fehler von $\pm 0.05^m$ entsprechen würde. Hoffentlich wird in diesem oder im nächsten Jahre eine wiederholte Vergleichung der Intensität der Schwere in München mit jener in Wien eine neue Controlle dieses Werthes bieten. Vor der Hand wird es sich jedoch empfehlen, eine Reihe von Beobachtungen auf der

¹⁾ Siehe „Mittheilungen des k. und k. milit.-geograph. Instituts“ XI. Band.

²⁾ Siehe Helmert „Die Schwerkraft im Hochgebirge“ pag. 16 u. 17.

Linie Innsbruck—München—Coburg zur Ausführung zu bringen, um auf diese Weise im Süden an die Messungen von Sterneck's in Tyrol und im Norden an die vom k. Preussischen Geodätischen Institute auf der Linie Hadersleben—Coburg ausgeführte Pendeloperation anzuschliessen. Eine solche circa 335 km lange, Bayern in nahezu meridionaler Richtung durchschneidende Linie, welche 18 Pendelstationen mit einem durchschnittlichen gegenseitigen Abstände von 18—22 km enthält und an welche sich sodann noch weitere Messungen im Bayerischen Walde, im Fichtelgebirge sowie im Spessart- und Rhön-Gebiete anzuschliessen hätten, wird nicht nur einen entsprechenden allgemeinen Ueberblick über den Verlauf der Schwerkraft innerhalb des bayerischen Territoriums gewähren, sondern auch Fingerzeige darbieten, nach welchen weitere specielle Untersuchungen für einzelne Gegenden anzuordnen wären.

Man hat in neuerer Zeit vielfach versucht, die Resultate der Schweremessungen im Dienste geologischer Speculation als Grundlage von Schlüssen auf die Struktur der Erdrinde zu verwerthen. Wenn Helmert in seiner schon oben citirten, geistvollen Schrift: „Die Schwerkraft im Hochgebirge“ zu dem Schlusse gelangt: „Es besteht hiernach unterhalb der Tyroler Alpen zwischen Innsbruck, Landeck, Stifserjoch und Bozen ein relativer Massendefekt in der Erdrinde, der einer auf's Meeresniveau condensirten Schicht von 1200^m Dicke und — 2.4 Dichtigkeit äquivalent ist,“ — so scheint dieser Ausspruch wohl den Ausgangspunkt einschlägiger, geologischer Combinationen gebildet zu haben. Man dürfte aber dabei den unmittelbar folgenden Passus: „Wie dieser Defekt in Wirklichkeit sich in dem Erdkörper vertheilt, ist nicht genau angebbar, da aus der Potentialwirkung ausserhalb eben nur die gleichwirkende Störungsschicht in der Oberfläche ermittelt werden kann,“ — vielfach unbeachtet gelassen haben.

Nimmt man an, der nahezu die Kugelgestalt besitzende Erdkörper bestehe aus einer Reihe von übereinander gelagerten, homogenen Schichten, deren Dichtigkeit eine Funktion des Abstandes vom Erdcentrum ist, so wird die Schwerkraft im

Meeresniveau bekanntlich durch die Formel $g = G(1 + \beta \sin^2 \varphi)$ als Funktion der geographischen Breite φ bestimmt; die numerischen Werthe der Constanten G und β wurden von Helmert aus einer grösseren Reihe von älteren und neueren, sorgfältig ausgewählten Pendelbeobachtungen zu $G = 9.7800^m$ und $\beta = 0.005310$ ermittelt.¹⁾ Vergleicht man nun die an einem Orte aus Pendelbeobachtungen gefolgerte, nach der bekannten Regel von Bouguer auf das Meeresniveau reducirte Schwere mit der aus vorstehender Formel berechneten und stellt sich hiebei eine Abweichung heraus, welche durch die mittleren, oder je nach der Güte der Beobachtung überhaupt noch möglichen Beobachtungsfehler nicht erklärt werden kann, so findet für den betreffenden Ort eine Störung des regelmässigen Verlaufes der Schwerkraft statt. Ueber die Ursache dieser Störung, d. h. über Art, Grösse und Form der störenden Massen, lassen sich genauere Angaben nicht erreichen; — die Aufgabe ist eine vollkommen unbestimmte. —

Es ist nicht schwierig, sich in einzelnen speciellen Fällen von der Richtigkeit dieser Behauptung zu überzeugen. Um zunächst den einfachsten Fall zu erwähnen, genügt es an den bekannten Satz zu erinnern, nach welchem eine aus homogenen Schichten, deren Dichte eine beliebige Funktion des Radius ist, zusammengesetzte Kugel an ihrer Oberfläche wie im ganzen äussern Raum dieselbe anziehende Wirkung ausübt, als wenn die gesammte Masse in ihrem Mittelpunkte concentrirt wäre. Man kann also bei einer so constituirten Kugel die Dichte einer beliebigen Schichte ganz willkürlich vermehren oder vermindern, wenn man gleichzeitig die Dichte irgend einer andern Schichte so vermindert bezw. vermehrt, dass die Gesamtmasse der Kugel unverändert bleibt, welcher Anforderung auf unendlich viele Arten entsprochen werden kann.

In ganz allgemeiner Weise beweist dagegen Gauss in seiner tief sinnigen Abhandlung: „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfer-

¹⁾ Siehe Helmert „Höhere Geodäsie“ II. Bd. pag. 241.

nungen wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte“ den Satz,¹⁾ dass eine gegebene Vertheilung von Massen im Innern eines durch eine in sich geschlossene Fläche begrenzten Raumes stets nur durch einen einzigen Modus der Vertheilung dieser Massen auf der Oberfläche dieses Raumes ersetzt werden könne, so dass die anziehende Wirkung dieses Flächenbelages in den Punkten sowohl der Oberfläche wie des äussern Raumes genau dieselbe ist, wie jene der im Innern der Fläche befindlichen Gesamtmasse.

Hält man dieses wichtige und schöne Theorem mit dem obigen, für die Kugel gültigen, elementaren Satze zusammen, so ergibt sich das Resultat, dass man einer gegebenen Massenvertheilung im Innern des Erdkörpers, welcher also eine bestimmte Wirkung an der Oberfläche und im äussern Raum entspricht, sofort eine unendliche Zahl von andern Massenvertheilungen substituiren kann, welche genau die gleiche Wirkung nach Aussen ergeben wie die ursprüngliche Anordnung. Man braucht zu diesem Ende nur beliebig viele in sich homogene Theile der ursprünglichen Massenordnung in concentrisch geschichtete Kugelschaalen auseinander zu ziehen oder zu concentriren, welches Verfahren in successiven Wiederholungen zur Darstellung einer unendlichen Anzahl bezüglich der Wirkung nach Aussen äquivalenter Arten der Massenvertheilung führt.

Das Gauss'sche Theorem wurde später auch von Riemann auf einem von dem Gauss'schen Entwicklungsgange verschiedenen Wege in direktem Anschluss an den bekannten Green'schen Satz bewiesen.²⁾ — Die vorstehend erwähnten Theoreme so hervorragender Mathematiker begründen in ganz allgemeiner Weise die Ueberzeugung, dass eine Erkenntniss der Constitution des Erdinnern auf dem Wege der Schweremessungen nicht erreicht werden kann; nur wenn anderweitige Anhaltspunkte auf Grund mehr oder weniger hypothetischer Annahmen hinzu-

¹⁾ Siehe § 31 bis 37.

²⁾ Siehe „Schwere, Elektrizität und Magnetismus.“ Nach den Vorlesungen von Riemann bearbeitet von Hattendorf (§§ 21, 22, 34 u. 79).

treten, wird man im Stande sein, wenigstens einigermassen plausible oder wahrscheinliche Folgerungen zu ziehen. Kann dagegen eine geologische Hypothese wenigstens annähernde Angaben über Ort, Grösse und Ausdehnung störender Massen im Erdinnern bieten, dann ist man im Stande, den störenden Einfluss auf die Intensität der Schwerkraft an der Erdoberfläche zu berechnen und aus der Vergleichung mit den Ergebnissen der Beobachtung einen Rückschluss auf die Möglichkeit der zu Grunde gelegten Hypothese zu machen. —

Es ist vielleicht nicht ohne Nutzen specielle Beispiele in Betracht zu ziehen und an der Hand derselben zu untersuchen, in wie weit die Pendelbeobachtungen den hiebei sich ergebenden Anforderungen genügen können. Nimmt man an, in einer Tiefe t unter einem Stationspunkte befinde sich die obere Fläche einer cylindrischen Masse von der Dicke h , deren Radius der Grundfläche r ist, während deren Dichte die durchschnittliche Dichte der festen Erdrinde um $\pm \delta$ übersteigt; setzt man ferner voraus, die Station befinde sich in der Verlängerung der Cylinderaxe und bezeichne mit k die Attraktions-Constante, mit R ($= 6470$ km) und G ($= 9.8^m$) die durchschnittlichen Werthe des Erdradius und der Beschleunigung der Schwere, endlich aber mit A ($= 5.6$) die mittlere Dichte des gesammten Erdkörpers, so ergibt sich für die Schwerestörung S in der Station der Ausdruck

$$S = 2 \pi k \delta [h + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + (h + t)^2}]$$

und da hinreichend genau $g = \frac{4}{3} \pi k A R$ ist:

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{2} \frac{\delta}{A} \cdot \frac{g}{R} [h + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + (h + t)^2}] \\ &= 0.406^{mm} \delta [h + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + (h + t)^2}] \end{aligned}$$

Mit $h = 0.5$ km, $r = 1$ km bzw. $h = 0.5$ km, $r = 2$ km ergibt sich hieraus:

für $t = 0.0$ km:	$S = \pm 0.155^{\text{mm}} \delta$	bezw. $S = \pm 0.178^{\text{mm}} \delta$
„ $t = 0.2$ „	$\pm 0.121 \delta$	$\pm 0.159 \delta$
„ $t = 0.4$ „	$\pm 0.094 \delta$	$\pm 0.141 \delta$
„ $t = 0.6$ „	$\pm 0.073 \delta$	$\pm 0.124 \delta$
„ $t = 0.8$ „	$\pm 0.057 \delta$	$\pm 0.109 \delta$
„ $t = 1.0$ „	$\pm 0.045 \delta$	$\pm 0.096 \delta$
„ $t = 2.0$ „	$\pm 0.017 \delta$	$\pm 0.051 \delta$
„ $t = 3.0$ „	$\pm 0.009 \delta$	$\pm 0.030 \delta$

Wird der Durchschnittswerth der Dichte der auf dem Festlande unterhalb des Meeresniveau's liegenden Theile der Erdrinde zu 2.4 angenommen und bedenkt man, dass die Dichten der die verschiedenen geologischen Formationen darstellenden Massen, — wenn man einzelne Erz führende Blöcke, sowie mit Wasser oder Gas gefüllte Hohlräume, welche jedoch schon mit Rücksicht auf die absolute Festigkeit der dieselbe gewölbeartig einschliessenden Massen nur eine relativ geringere Ausdehnung besitzen können, ausschliesst, — sich von diesem Werthe im positiven wie im negativen Sinne höchstens um $\delta = 0.5^1$) entfernen, so zeigen obige Zahlen, dass das Auftreten störender Massen von dem für geognostische Detailstudien immerhin nicht unbedeutenden Volumen von mehr als 1.5 (bezw. 6.2) Cubik-Kilometern nur durch Pendelbeobachtungen von hervorragender Präcision und auch nur dann angezeigt werde, wenn dieselben sich höchstens 1 km (bezw. 2 km) unter dem Meeresniveau befinden.

In einer kleinen Notiz, welche Helmert gelegentlich des Zusammentrittes der Permanenten Commission der Internationalen Erdmessung zu Innsbruck (1894) veröffentlicht hat, wird der mittlere Fehler einer Schweremessung zu $\pm 0.00001 g = 0.10^{\text{mm}}$ angenommen;²⁾ diese Genauigkeit würde demnach noch nicht

¹⁾ Siehe *Annuaire du Bureau de longitude pour l'an 1896* die: *Densités de roches diverses* überschriebene Zusammenstellung (pag. 592 und 579).

²⁾ Inzwischen ist es bei den durch Anordnung und Ausführung ausgezeichneten Schweremessungen des K. Preuss. Geodät. Institutes auf

ausreichen, um Aufschlüsse über das Vorkommen störender Massen von der vorstehend angegebenen Grösse zu ermöglichen. Die im Interesse geognostischer Detailuntersuchungen in der Provinz Hannover bei Freden und Alfeld ausgeführten Pendelbeobachtungen haben in der That auch keine Andeutung über die Existenz vermutheter Dichteungleichheiten ergeben;¹⁾ die Differenzen der Dichten der treffenden geologischen Formationen sind hiefür zu gering und schwanken überdiess innerhalb einer und derselben Formation um Beträge von 0.10 bis 0.30. —

Es dürfte überhaupt nicht zu übersehen sein, dass die durch Helmert eingeführte Angabe der Dicke einer im Meereshorizont liegenden „ideellen“ störenden Massenschichte im Grunde genommen nur ein anderer Ausdruck für die Thatsache ist, dass die Beobachtung an der betreffenden Stelle gegen die aus der Clairaut'schen Formel berechnete Schwereintensität eine mehr oder minder grosse positive oder negative Differenz aufweist; es geht dieses auch aus der approximativen Regel hervor, welche besagt, dass man die in mètres ausgedrückte Dicke einer bestimmten Störung von $\pm n$ Mikrons im Schwerewerth g hervorbringenden Wasserschichte findet, wenn man diese Zahl $\pm n$ mit 2.4 (= durchschnittliche Dichte der Oberflächenschichte der Erdrinde multiplicirt; es entspricht z. B. einer Differenz von $\pm 0.100^{\text{mm}}$ in g eine Dicke der ideellen störenden Wasserschichte von 240^{m} . —

Man ist ferner keineswegs berechtigt, diese ideelle störende Masse in eine gewisse Tiefe senkrecht unter die Station zu verlegen; dass man durch eine derartige Auslegung der Beobachtungsergebnisse zu Trugschlüssen geführt werden kann, zeigt an einem einfachen Beispiele die nachfolgende Betrachtung.

dem Meridianbogen Kolberg—Schneekoppe gelungen, die Genauigkeit der Resultate wesentlich zu erhöhen und den mittleren Fehler einer Schwerebestimmung auf $0.0000025 g = 0.025^{\text{mm}}$ herabzudrücken, was jedoch augenblicklich noch als eine ausnahmsweise Präcision zu betrachten sein dürfte. —

¹⁾ Siehe „Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.“ (Math.-physik. Klasse 1896 Heft 1). —

tung, bei welcher man der Einfachheit halber die störenden Massen als kugelförmig annehmen und von der Krümmung der Erdoberfläche absehen kann. In einer horizontalen Entfernung a von der Pendelstation A befinde sich in der Tiefe t eine störende Masse m senkrecht unterhalb einer zweiten Pendelstation B , dann ergibt sich für diese letztere der Störungsbetrag

$$S_B = \frac{mk}{t^2} \text{ und für } A: S_A = \frac{mkt}{(a^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

sohin $S_A = S_B \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{t^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$; dieser Betrag hat sein Maximum

bei $a = 0$, in welchem Falle A mit B zusammentrifft und nimmt von da an ständig ab, so dass er selbst bei den grössten Werthen ($S_B = 2^{\text{mm}}$), welche auf der Erdoberfläche beobachtet wurden, schon bei $\frac{a}{t} = 5$ für die besten Pendelbeobachtungen

unter die Grenze des mittleren Fehlers herabsinkt. Tritt nun zu der unter B liegenden Masse m auf der andern Seite von A unter C eine gleich grosse, symmetrisch gelagerte Masse hinzu, so ergibt sich die Störung in A :

$$S'_A = 2 \cdot \frac{mk}{t^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{t^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \text{ und}$$

$$S'_B = \frac{mk}{t^2} \left[1 + \frac{1}{\left(1 + 4 \frac{a^2}{t^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Führt man in diesen Ausdrücken Zahlenwerthe ein, indem man z. B. $a = 4$ km, $t = 5$ km setzt und annimmt, senkrecht unter B und C befinden sich zwei kugelförmige Erzlager vom Radius $\varrho = 2$ km und von der Dichte 5,0, welcher Werth die mittlere Oberflächendichte von 2,4 um 2,6 übertrifft, so erhält man $S'_A = 0,214^{\text{mm}}$ und $S'_B = S'_C = 0,259^{\text{mm}}$.

Denkt man sich nun die gegen die mittlere Oberflächendichte überschüssige Masse der beiden Kugeln gleichförmig auf zwei grössere concentrische Kugeln vom Halbmesser 5 km

vertheilt, so erhält man zwei die Erdoberfläche bezw. in B und in C tangirende Kugeln von der Dichte 2.57; unterhalb A aber, — da wo die beiden vorgenannten Kugeln theilweise übereinander greifen, — ergibt sich ein linsenförmiger Raum von 2 km Dicke und 6 km Durchmesser, dessen Mitte sich in einer Tiefe von 5 km befindet, welchem die Dichte 2.73 zukommt, während in dem unmittelbar unter A liegenden, nach Abzug der beiden Kugeln und der Linse noch übrig bleibenden Räume die Dichte 2.4 herrscht. Die so erhaltene Massenanordnung ist von der ursprünglich angenommenen der beiden kugelförmigen Erzlager ganz wesentlich verschieden und dennoch ist die Wirkung nach Aussen, welche wir durch genaue Pendelbeobachtungen messen können, in beiden Fällen ganz die gleiche.

Während man den Schweremessungen bisher von mancher Seite vielleicht ein zu grosses Gewicht beigelegt hat, wurde dagegen das zweite Datum, welches die Geodäsie der Forschung nach der Constitution der Erdrinde bietet, nämlich die Kenntniss der Störung in der Richtung der Vertikalen, — die sogenannte Lothablenkung in ihrer Bedeutung häufig unterschätzt. Befindet sich in B senkrecht unter der Erdoberfläche in einer Tiefe t wieder eine störende kugelige Masse m , so wird diese in einer um a auf dem Meridian von B entfernten Station A eine Störung der Lage der Vertikalen bewirken, welche unter Vernachlässigung der bei Entfernungen von einigen hundert Kilometern das Resultat nicht merkbar beeinflussenden Krümmung der mathematischen Erdoberfläche als Breitenstörung s im Betrage von

$$s = \frac{mka}{(a^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{g \sin 1''} \text{ (in Sekunden ausgedrückt)}$$

erscheint.

Da nun die den obigen Voraussetzungen entsprechende Schwerestörung in A : $S = \frac{mkt}{(a^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}}$ ist, so ergibt sich:

$$\frac{s}{S} = \frac{a}{t} \cdot \frac{1}{g \sin 1''}$$

Mit $g = 9.8^m$ ergibt sich, wenn die Schwerestörung S in mm ausgedrückt ist: $\frac{s}{S} = 21.047 \frac{a}{t}$

Hält man sich zu der Annahme berechtigt, dass die beiden Störungen s und S von einer einzigen nahezu kugelförmigen Masse bewirkt werden, so liefert diese Gleichung eine Relation zwischen der Entfernung und der Tiefe, in welcher sich die störende Masse befindet, sobald man in einer Station sowohl die Grösse der Lothablenkung als auch die Schwerestörung auf dem Wege der Beobachtung bestimmt hat.

Die Unbestimmtheit der Aufgabe, durch Messungen an der Erdoberfläche die Constitution des Erdinnern zu erforschen, wird indessen auch durch die Kenntniss der Lothablenkungen nur beschränkt aber nicht aufgehoben; um mathematisch bestimmte Lösungen zu erlangen, wird man immer geöthigt sein, Hypothesen in die Rechnung einzuführen. —