# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-physikalischen Classe

der

## k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVII. Jahrgang 1897.

**München.**

Verlag der k. Akademie.

1898.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

# Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 16. Februar.*)

Während die elementare Theorie der einfach-unendlichen Reihen wohl im wesentlichen als abgeschlossen gelten darf, so scheint mir diejenige der unendlichen Doppelreihen in verschiedener Beziehung der Vervollkommnung nicht nur bedürftig, sondern thatsächlich auch fähig zu sein. Im Folgenden mache ich den Versuch, auf der Grundlage einiger einfacher Sätze über die Grenzwerthe zweifach-unendlicher Zahlenfolgen, eine solche Theorie in möglichst einheitlicher und übersichtlicher Weise aufzubauen. Jene Hülfssätze, die im wesentlichen von den möglichen Beziehungen zwischen Grenzwerthen von der Form:

$$\lim_{\mu=\infty,\ \nu=\infty} (a_\mu^{(\nu)}), \quad \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right), \quad \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right)$$

handeln, mögen wohl allgemein bekannt sein: da sie mir indessen in der hier gewählten einfachen Formulirung und Begründung nirgends begegnet sind, so schien es mir zweckmässig, dieselben zunächst vollständig zu entwickeln (§ 1, Art. 2—5). Daraus ergeben sich dann in sehr anschaulicher Weise die verschiedenen Eventualitäten, die bei der Convergenz und Divergenz einer Doppelreihe eintreten können, in's besondere jene scheinbaren Anomalien, die aus dem principiellen Unterschiede zwischen einer Doppelreihe einerseits und der aus ihren Zeilen bezw. Colonnen gebildeten Reihe andererseits hervorgehen: zugleich liefert der gewählte Ausgangspunkt unmittelbar die Hülfsmittel, um das wirkliche Vorkommen der als möglich erkannten Fälle durch concrete Beispiele zu belegen (§ 2). Im darauffolgenden Paragraphen werden die

Beziehungen untersucht, welche zwischen einer convergenten Doppelreihe und der aus den Diagonal-Summen des betreffenden zweifach-unendlichen Schema's gebildeten einfachen Reihe bestehen. Der bei dieser Gelegenheit bewiesene Hauptsatz (§ 3, Art. 3) stellt eine merkliche Verallgemeinerung und Vervollständigung eines wichtigen, zuerst von Herrn Stolz[1]) bewiesenen Satzes dar. Dabei möchte ich einigen Werth darauf legen, dass der hier mitgetheilte Beweis lediglich eine ganz elementare Grenzwerth-Bestimmung erfordert, während derjenige des Herrn Stolz auf Stetigkeits-Betrachtungen und dem Begriffe der gleichmässigen Convergenz beruht.

Es folgen nun zunächst die bekannten Sätze über absolut convergente Doppelreihen und deren unbedingte Convergenz (§ 4, Art. 1—4); sodann aber (Art. 5—7) wird der Satz, dass jede unbedingt convergente Doppelreihe auch absolut convergiren muss, wie ich glaube, zum ersten Male vollständig bewiesen.[2]) — Im letzten Paragraphen (§ 5) werden schliesslich verschiedene Methoden zur Herstellung allgemeiner Convergenz- und Divergenz-Kriterien für unendliche Doppelreihen discutirt und die als zweckmässig erkannten entsprechend verwerthet. Da mir in der Literatur, ausser einer ganz gelegentlichen kurzen Bemerkung des Herrn Thomae[3]),

---

[1]) Ueber unendliche Doppelreihen. Mathem. Ann., Bd. 24, S. 164, Art. 6.

[2]) Herr Stolz hat in der oben citirten Abhandlung (a. a. O. S. 168) den fraglichen Satz nur unter der Voraussetzung bewiesen, dass jede einzelne Zeile und Colonne convergirt. Es steht nun natürlich frei, eine unabhängig von der Anordnung der Glieder convergirende Doppelreihe nur dann unbedingt convergent zu nennen, wenn sie von vornherein jene Eigenschaft besitzt. Allein dann bleibt doch immer die Möglichkeit offen, dass eine convergente Doppelreihe mit divergenten Zeilen oder Colonnen (die also eo ipso nicht absolut convergirt) in dem gewöhnlichen Sinne unbedingt convergiren könnte, d. h. dass die Summe der Doppelreihe bei jeder Umordnung des betreffenden zweifach-unendlichen Schema's den gleichen Werth behielte.

[3]) Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Theta-Functionen einer Veränderlichen. 2. Aufl. (1873). S. 70, Fussnote.

keinerlei Versuche nach dieser Richtung hin bekannt geworden sind, so dürften die hier mitgetheilten Betrachtungen in der Hauptsache als neu und nicht ganz überflüssig erscheinen.[1])

## § 1. Ueber Grenzwerthe zweifach unendlicher Zahlenfolgen.

1. Es sei eine zweifach unendliche Folge reeller Zahlen vorgelegt:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{cccccc} a_0^{(0)} & a_1^{(0)} & \ldots & a_\mu^{(0)} & \ldots \\ a_0^{(1)} & a_1^{(1)} & \ldots & a_\mu^{(1)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0^{(\nu)} & a_1^{(\nu)} & \ldots & a_\mu^{(\nu)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right.$$

so sagt man bekanntlich: die Zahlen $a_\mu^{(\nu)}$ besitzen für $\lim \mu = \infty$, $\lim \nu = \infty$, oder, genauer bezeichnet, für unabhängig von einander in's Unendliche wachsende $\mu$ und $\nu$ einen bestimmten Grenzwerth $a$, in Zeichen:

$$(2) \qquad \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a,$$

wenn eine bestimmte Zahl $a$ existirt, so dass:

$$(3) \qquad |a - a_\mu^{(\nu)}| \leqq \varepsilon \quad \text{für:}\ \mu \geqq m,\ \nu \geqq n:$$

d. h. jeder (beliebig kleinen) positiven Zahl $\varepsilon$ müssen sich zwei natürliche Zahlen $m$, $n$ so zuordnen lassen, dass Ungl. (3) befriedigt wird. Hierzu ist nothwendig und hinreichend, dass:

$$(3\,\text{a}) \qquad |a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)}| \leqq \varepsilon'$$

für $\mu \geqq m'$, $\nu \geqq n'$, $\varrho = 0, 1, 2, \ldots$, $\sigma = 0, 1, 2, \ldots$ (d. h. bei beliebig vorgeschriebenem $\varepsilon' > 0$ und passender Wahl von $m'$, $n'$).

---

[1]) Gleichzeitig mit der Correctur dieser Mittheilung erhalte ich einen Aufsatz des Herrn O. Biermann „Ueber unendliche Doppelreihen und unendliche Doppelproducte" (Monatshefte für Mathematik und Physik, VIII, p. 115 ff.), in welchem gleichfalls einige Convergenz-Kriterien für Doppelreihen aufgestellt werden. Dieselben sind indessen von geringerer Tragweite als die hier mitgetheilten.

Die Beziehung:

(4) $$\lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \infty \text{ bezw. } = -\infty$$

hat sodann die Bedeutung: Jeder (beliebig grossen) positiven Zahl $G$ lassen sich zwei natürliche Zahlen $m$, $n$ so zuordnen, dass:

(5) $$a_\mu^{(\nu)} > G \text{ bezw. } a_\mu^{(\nu)} < -G \text{ für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n.$$

2. Man bemerke vor allem, dass durch die Existenz eines bestimmten endlichen $\lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ diejenige von $\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für endliche Werthe von $\nu$, bezw. diejenige von $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für endliche Werthe von $\mu$ in keiner Weise präjudicirt wird. Denn die definirenden Ungleichungen (3) verlangen ja eine gewisse Eigenschaft lediglich von denjenigen Termen, bei denen beide Indices $\mu$, $\nu$ gewisse Grenzen überschreiten: mit anderen Worten, diejenigen $a_\mu^{(\nu)}$, welche den ersten $m$ Zeilen und $n$ Colonnen des Schema's (1) angehören, können hierbei völlig willkürlich gedacht werden, sie brauchen z. B. nicht einmal numerisch unter einer endlichen Grenze zu bleiben. Aber noch mehr: es kann sogar $\lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ endlich und bestimmt ausfallen, obschon $\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für keinen einzigen bestimmten Werth von $\nu$, $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für keinen einzigen bestimmten Werth von $\mu$ existirt. Beispiel:

$$\begin{aligned} a_\mu^{(\nu)} &= (-1)^{\mu+\nu} \cdot \frac{\mu^p + \nu^q}{\mu^p \cdot \nu^q} \\ &= (-1)^{\mu+\nu} \left( \frac{1}{\mu^p} + \frac{1}{\nu^q} \right) \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots \\ p > 0,\ q > 0 \end{pmatrix}.$$

Hier wird offenbar:

$$\lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0,$$

also völlig bestimmt, dagegen:

$$\liminf_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\frac{1}{\nu^q}, \quad \limsup_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\frac{1}{\nu^q} \quad \text{für: } \nu = 1, 2, 3, \ldots \text{ in infinitum},$$

$$\liminf_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\frac{1}{\mu^p}, \quad \limsup_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\frac{1}{\nu^p} \quad \text{für: } \mu = 1, 2, 3, \ldots \text{ in infinitum},$$

d. h. jede einzelne Zeile bezw. Colonne besitzt zwei von einander verschiedene Unbestimmtheitsgrenzen. Dabei gilt nun, wie dieses Beispiel schon vermuthen lässt, der folgende Satz:

Ist:

$$(6) \quad \begin{cases} \liminf\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = l_\nu, \quad \limsup\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = L_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \\ \liminf\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = l'_\mu, \quad \limsup\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = L'_\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

so hat man stets:

$$(7) \quad \left\{ \begin{matrix} \lim\limits_{\nu=\infty} l_\nu = \lim\limits_{\nu=\infty} L_\nu \\ \lim\limits_{\mu=\infty} l'_\mu = \lim\limits_{\mu=\infty} L'_\mu \end{matrix} \right\} = \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)},$$

falls überhaupt ein endlicher oder bestimmt unendlicher $\lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ **existirt.**

Beweis. Ist: $\lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a$ (d. h. endlich), so existirt für jedes beliebig kleine positive $\varepsilon$ eine Beziehung von der Form:

$$|a_\mu^{(\nu)} - a| < \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m, \ \nu \geqq n.$$

In Folge dessen hat man auch:

$$|\liminf_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} - a| \leqq \varepsilon, \quad |\limsup_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} - a| \leqq \varepsilon \quad \text{für: } \nu \geqq n,$$

d. h.

$$|l_\nu - a| \leqq \varepsilon, \quad |L_\nu - a| \leqq \varepsilon \qquad \text{für: } \nu \geqq n,$$

und somit schliesslich:

$$\lim_{\nu=\infty} l_\nu = \lim_{\nu=\infty} L_\nu = a.$$

Ist dagegen $\lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty$, so besteht für jedes beliebig grosse positive $G$ eine Beziehung von der Form:

$$a_\mu^{(\nu)} > G \text{ bezw. } a_\mu^{(\nu)} < -G \text{ für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n,$$

und somit wird auch:

$$\left.\begin{matrix} l_\nu \\ L_\nu \end{matrix}\right\} > G \text{ bezw. } \left.\begin{matrix} l_\nu \\ L_\nu \end{matrix}\right\} < -G \text{ für: } \nu \geqq n.$$

d. h. schliesslich:

$$\lim_{\nu=\infty} l_\nu = \lim_{\nu=\infty} L_\nu = +\infty \text{ bezw. } = -\infty.$$

Das analoge gilt dann offenbar für $l'_\mu$, $L'_\mu$ — womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

3. Wird jetzt speciell $l_\nu = L_\nu$ für $\nu \geqq n$ (bezw. $l'_\mu = L'_\mu$ für $\mu \geqq m$), d. h. existirt für $\nu \geqq n$ ein endlicher oder bestimmt unendlicher $\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ (bezw. für $\mu \geqq m$ ein endlicher oder bestimmt unendlicher $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$), so nimmt der eben bewiesene Satz die folgende Form an:

Existirt ein endlicher oder bestimmt unendlicher $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ und ausserdem $\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für $\nu \geqq n$, bezw. $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für $\mu \geqq m$, so ist:

$$(8)\quad \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = \lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \text{ bezw. } \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = \lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}.$$

Demnach ergibt sich, dass die Existenz[1]) von:

$$(9)\quad \lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)},\quad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\ (\nu \geqq n),\quad \lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\ (\mu \geqq m)$$

allemal diejenige von:

$$(10)\quad \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right),\quad \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right)$$

und zugleich die Beziehung:

$$(11)\quad \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right)$$

nach sich zieht.

---

[1]) In dem angegebenen weiteren Sinne, d. h. die betreffenden Grenzwerthe dürfen eventuell auch unendlich gross mit bestimmten Vorzeichen ausfallen.

Daraus folgt dann weiter, dass $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ sicher nicht existiren kann, wenn die beiden Grenzwerthe (10) existiren und von einander verschieden ausfallen.

(Beispiele:

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{\mu}{\mu+\nu}, \quad 2^{-\frac{\nu}{\mu}}, \quad \left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)^\nu. \tag{12}$$

Man hat hier für jedes $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 1, \text{ also auch: } \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = 1: \tag{13}$$

dagegen für jedes $\mu = 1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0, \text{ also auch: } \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = 0. \tag{14}$$

Bei keinem der genannten Beispiele kann also $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ existiren, was sich im übrigen auch leicht verificiren lässt).

Dagegen ist es keineswegs gestattet, aus der blossen Existenz der Beziehung (11) (welche allemal die Existenz von $\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für $\nu \geqq n$, $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für $\mu \geqq m$ implicite voraussetzt) auf diejenige von $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ zu schliessen. Selbst wenn:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a \text{ für **jeden** einzelnen Werth von } \nu, \\ \lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \mu, \end{cases} \tag{15}$$

so braucht darum keineswegs $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a$ zu sein (was nach dem Satze am Anfange dieses Artikels nur dann der Fall sein müsste, wenn $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ überhaupt existirt).

Man betrachte z. B.:

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{1+(\mu-\nu)^2} \quad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Hier wird:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0 \text{ für **jeden** einzelnen Werth von } \nu, \\ \lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \mu, \end{cases} \tag{17}$$

während ein bestimmter $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ offenbar nicht vorhanden ist, da $(\mu-\nu)^2$ jede beliebige Zahl $\geqq 0$ vorstellen kann, wenn $\mu$ und $\nu$ unabhängig von einander in's Unendliche wachsen. Im übrigen besteht hier für jedes beliebige Werthepaar $\mu$, $\nu$ die Beziehung:

$$(18)\qquad 0 < a_\mu^{(\nu)} < 1$$

und daraus folgt, dass $a_\mu^{(\nu)}$ auch bei unendlich wachsenden Werthen von $\mu$ und $\nu$ das endliche Intervall $(0, 1)$ niemals verlassen kann.

Ein ähnliches Verhalten zeigt der folgende Ausdruck:

$$(19)\qquad a_\mu^{(\nu)} = \frac{\mu\nu}{\mu^2+\nu^2} \quad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, 3, \ldots \\ \nu = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix},$$

für welchen:

$$(20)\qquad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0,$$

während $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ nicht existirt und im übrigen:

$$(21)\qquad 0 < a_\mu^{(\nu)} \leqq \frac{1}{2}$$

wird.

Man könnte hiernach vermuthen, dass etwas analoges allemal stattfindet, wenn die Grenzwerthe $\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$, $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für jedes einzelne (wenn auch noch so grosse) $\nu$ bezw. $\mu$ existiren und unter einer festen Grenze bleiben. Diese Vermuthung wäre indessen irrig, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$(22)\qquad a_\mu^{(\nu)} = \left(\frac{2}{1+(\mu-\nu)^2}\right)^{\nu+1} \quad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Auch hier wird:

$$(23)\qquad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0 \text{ (für jedes einzelne } \nu \text{ bezw. } \mu),$$

und andererseits:

$$(24)\qquad a_\nu^{(\nu)} = 2^{\nu+1}$$

d. h. die Terme $a_\mu^{(\nu)}$ wachsen für $\mu=\nu$ gleichzeitig mit $\mu$ und $\nu$ in's Unendliche.

Ein Beispiel ähnlicher Art liefert der Ausdruck:

$$(25) \qquad a_\mu^{(\nu)} = \frac{\mu^2 \nu^2}{\mu^3 + \nu^3} \quad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

4. Die im vorigen Artikel betrachteten Eventualitäten erscheinen ausgeschlossen, falls die Terme $a_\mu^{(\nu)}$ sich monoton verhalten, d. h. falls für jedes $(\mu, \nu)$:

$$(26) \qquad a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)} \geqq 0 \text{ bezw. } \leqq 0 \quad \begin{pmatrix} \varrho = 0, 1, 2, \ldots \\ \sigma = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Für solche monotone Zahlenfolgen gilt der Satz:

Bleiben die $|a_\mu^{(\nu)}|$ stets unter einer endlichen Zahl $g$, so stellen die Ausdrücke:

$$(27) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \\ \lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

$$(28) \qquad \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)},$$

durchweg bestimmte Zahlen vor, und es besteht die Beziehung:

$$(29) \qquad \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = \lim_{\mu=\infty} \left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right).$$

Beweis. Es sei etwa die Zahlenfolge $(a_\mu^{(\nu)})$ eine niemals abnehmende, so dass also durchweg:

$$a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)} \geqq 0.$$

Alsdann hat man insbesondere:

$$a_{\mu+\varrho}^{(\nu)} - a_\mu^{(\nu)} \geqq 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$
$$a_\mu^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)} \geqq 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

d. h. die einzelnen Zeilen und Colonnen des Schema's (1) bilden gleichfalls niemals abnehmende und zwar einfach unendliche Zahlenfolgen. Daraus ergiebt sich zunächst, wegen $|a_\mu^{(\nu)}| < g$, nach einem bekannten Satze die Bestimmtheit der Grenzwerthe (27).

Wäre nun der Grenzwerth (28) nicht gleichfalls endlich und bestimmt, so müsste, wie gross auch $\mu$, $\nu$ angenommen werden, zu dem Terme $a_\mu^{(\nu)}$ stets ein Term $a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)}$ existiren, so dass

$$a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)} \geqq a,$$

wo $a$ eine — möglicherweise sehr kleine — aber bestimmte positive Zahl bedeutet. Man könnte darnach aus der Folge $(a_\mu^{(\nu)})$ eine unbegrenzt fortsetzbare Folge von Termen: $a_\mu^{(\nu)}$, $a_{\mu+\varrho_1}^{(\nu+\sigma_1)}$, ... $a_{\mu+\varrho_\varkappa}^{(\nu+\sigma_\varkappa)}$, ... herausheben, so dass

$$\begin{aligned}
a_{\mu+\varrho_1}^{(\nu+\sigma_1)} - a_\mu^{(\nu)} &\geqq a \\
a_{\mu+\varrho_2}^{(\nu+\sigma_2)} - a_{\mu+\varrho_1}^{(\nu+\sigma_1)} &\geqq a \\
\cdots\cdots &\cdots \\
a_{\mu+\varrho_\varkappa}^{(\nu+\sigma_\varkappa)} - a_{\mu+\varrho_{\varkappa-1}}^{(\nu+\sigma_{\varkappa-1})} &\geqq a
\end{aligned}$$

und daher für jedes noch so grosse $\varkappa$:

$$a_{\mu+\varrho_\varkappa}^{(\nu+\sigma_\varkappa)} - a_\mu^{(\nu)} \geqq \varkappa \cdot a \quad \text{d. h.} \quad a_{\mu+\varrho_\varkappa}^{(\nu+\sigma_\varkappa)} \geqq a_\mu^{(\nu)} + \varkappa \cdot a,$$

was der Voraussetzung widerspräche, dass durchweg: $|a_\mu^{(\nu)}| < g$.

Es muss somit $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ eine bestimmte Zahl sein. Daraus folgt dann schliesslich mit Benützung des Satzes in Art. 3 (Gl. (8)) die Existenz der Grenzwerthe $\lim\limits_{\nu=\infty}\left(\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right)$, $\lim\limits_{\mu=\infty}\left(\lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right)$ und ihre Uebereinstimmung mit $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$.

Das analoge Resultat ergiebt sich ohne weiteres für eine niemals zunehmende Folge $(a_\mu^{(\nu)})$, wenn man beachtet, dass in diesem Falle die Folge $(-a_\mu^{(\nu)})$ eine niemals abnehmende und $\lim(-a_\mu^{(\nu)}) = -\lim(a_\mu^{(\nu)})$ ist.

Als Corollar zu dem eben bewiesenen Satze kann man noch folgendes aussprechen:

Ist die Folge $(a_\mu^{(\nu)})$ **monoton**, so zieht **jede** der drei Gleichungen:

$$(30)\quad \lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = A,\ \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = A,\ \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = A$$

**die beiden anderen** nach sich.

Denn aus jeder dieser drei Gleichungen würde für jedes beliebige $(\mu, \nu)$ folgen:

$$a_0^{(0)} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq A,$$

falls die $a_\mu^{(\nu)}$ niemals abnehmen; und:

$$a_0^{(0)} \geqq a_\mu^{(\nu)} \geqq A,$$

falls die $a_\mu^{(\nu)}$ niemals zunehmen. In jedem Falle müssen also die $|a_\mu^{(\nu)}|$ durchweg unter einer endlichen Zahl bleiben, so dass die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung aus dem unmittelbar zuvor bewiesenen Satze hervorgeht.

Ferner ergiebt sich noch:

Ist die Folge $(a_\mu^{(\nu)})$ **monoton** und:

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu^{(\nu)} = A$$

so hat man auch:

$$\lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = A.$$

Denn bedeutet $n$ die grössere der beiden Zahlen $\mu$, $\nu$, so hat man stets:

$$a_\mu^{(\nu)} \leqq a_n^{(n)} \leqq A.$$

Daraus folgt aber die Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\mu=\infty,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ und somit die Beziehung

(31) $$\lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} a_\nu^{(\nu)}.$$

5. Bleiben die absoluten Beträge einer monotonen Zahlenfolge $(a_\mu^{(\nu)})$ nicht unter einer festen Grenze, giebt es also zu jeder noch so grossen positiven Zahl $G$ Werthepaare $(\mu, \nu)$, für welche $|a_\mu^{(\nu)}| > G$, so können nur die folgenden zwei Fälle eintreten:

Entweder die Folge $(a_\mu^{(\nu)})$ ist eine niemals abnehmende. Dann müssen die $a_\mu^{(\nu)}$ für hinlänglich grosse Werthe von $\mu$ und $\nu$ durchweg positiv werden, so dass also geradezu $a_\mu^{(\nu)} > G$, d. h.:

(32) $$\lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} + = \infty.$$

und, wie leicht zu sehen, auch:

$$(33)\qquad \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = +\infty.$$

Oder die Folge $(a_\mu^{(\nu)})$ ist eine niemals zunehmende. Dann bilden wiederum die Terme $(-a_\mu^{(\nu)})$ eine niemals abnehmende Folge, so dass zunächst:

$$\lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} (-a_\mu^{(\nu)}) = +\infty,$$

und daher schliesslich:

$$(34)\qquad \lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = -\infty.$$

Man kann dieses Resultat auch in folgender Form aussprechen:

Ist die Folge $(a_\mu^{(\nu)})$ **monoton**, so zieht **jede** der drei Gleichungen (30) **die beiden anderen** nach sich, auch wenn $A$ die Bedeutung von $+\infty$ oder $-\infty$ hat.

## § 2. Unendliche Doppelreihen: Convergenz und Divergenz. Beziehungen zwischen einer Doppelreihe und der Reihe der Zeilen- bezw. Colonnen-Summen.

1. Setzt man:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \quad u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \ldots + u_\mu^{(0)} \\ + u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \ldots + u_\mu^{(1)} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \ldots + u_\mu^{(\nu)} \end{array}\right\} = S_\mu^{(\nu)},$$

so heisst die unendliche Doppelreihe:

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \quad u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \ldots + u_\mu^{(0)} + \ldots \\ + u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \ldots + u_\mu^{(1)} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \ldots + u_\mu^{(\nu)} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

convergent, wenn $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ (in dem § 1, Art. 1 definirten Sinne) einen bestimmten Werth besitzt.

Ist etwa:

$$\lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = S, \tag{3}$$

so heisst $S$ die Summe der unendlichen Doppelreihe (2). Zur abgekürzten Bezeichnung der in Gl. (1) und (3) enthaltenen Aussagen dient die Schreibweise:

$$\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S. \tag{4}$$

In jedem anderen Falle heisst die Doppelreihe (1) divergent, und zwar eigentlich divergent, wenn:

$$\lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = +\infty \text{ bezw. } = -\infty; \tag{5}$$

uneigentlich divergent oder oscillirend (unbestimmt), wenn überhaupt kein endlicher oder bestimmt unendlicher $\lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ existirt.

Wir bedienen uns in diesen Fällen gelegentlich der zwar nicht ganz correcten, aber bequemen und zu Missverständnissen keinen Anlass bietenden Bezeichnung: die Summe der Doppelreihe (1), in Zeichen: $\sum\limits_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$, sei unendlich gross bezw. unbestimmt.

2. Wie ein Blick auf das Schema (1) lehrt, hat man:

$$\left\{\begin{array}{l} u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \ldots + u_\mu^{(0)} = S_\mu^{(0)} \\ u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \ldots + u_\mu^{(\nu)} = S_\mu^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)} \quad (\nu \geqq 1). \end{array}\right. \tag{6}$$

Ebenso:

$$\left\{\begin{array}{l} u_0^{(0)} + u_0^{(1)} + \ldots + u_0^{(\nu)} = S_0^{(\nu)} \\ u_\mu^{(0)} + u_\mu^{(1)} + \ldots + u_\mu^{(\nu)} = S_\mu^{(\nu)} - S_{\mu-1}^{(\nu)} \quad (\mu \geqq 1). \end{array}\right. \tag{7}$$

Daraus folgt weiter:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{(a)}\ u_0^{(0)} = S_0^{(0)},\ u_\mu^{(0)} = S_\mu^{(0)} - S_{\mu-1}^{(0)}\ (\mu \geqq 1),\ u_0^{(\nu)} = S_0^{(\nu)} - S_0^{(\nu-1)}\ (\nu \geqq 1), & \\ \qquad u_\mu^{(\nu)} = S_\mu^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)} - (S_{\mu-1}^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)}) & \\ \text{(b)} \qquad\ = S_{\mu-1}^{(\nu-1)} + S_\mu^{(\nu)} - (S_\mu^{(\nu-1)} + S_{\mu-1}^{(\nu)}) & (\mu \geqq 1,\ \nu \geqq 1). \end{array}\right. \tag{8}$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass:

$$(9) \qquad \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} u_\mu^{(\nu)} = 0$$

sein muss, wenn $\lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = S$ ist, d. h. wenn die Doppelreihe convergirt. Insbesondere ist also bei einer convergenten Doppelreihe stets:

$$(10) \qquad \lim_{\nu=\infty} u_\nu^{(\nu)} = 0,$$

d. h. die Terme der Haupt-Diagonale (Schema (2)) müssen schliesslich gegen Null convergiren. Da andererseits die Existenz eines bestimmten $\lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ nach Art. 2 der vorigen Paragraphen keineswegs diejenige von:

$\lim\limits_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ für irgend einen endlichen Werth von $\nu$

$\lim\limits_{\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ „ „ „ „ „ „ $\mu$

involvirt, so lehren die Gleichungen (8), dass selbst bei einer convergenten Doppelreihe

$\lim\limits_{\mu=\infty} u_\mu^{(\nu)}$ für keinen einzigen endlichen Werth von $\nu$

$\lim\limits_{\nu=\infty} u_\mu^{(\nu)}$ „ „ „ „ „ „ $\mu$

zu verschwinden braucht. Mit andern Worten: Eine Doppelreihe kann sehr wohl convergiren, ohne dass die Terme einer einzigen Zeile bezw. Colonne mit unbegrenzt wachsendem Stellenzeiger der Null zustreben.

Beispiel. Man setze:

$$(11) \qquad S_\mu^{(\nu)} = \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{2(a+1)} \cdot \left(\frac{1}{a^\mu} + \frac{1}{a^\nu}\right) \quad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

wo $a > 1$, und daher nach Gl. (8):

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} \qquad\qquad u_0^{(0)} = \dfrac{1}{a+1} \\ u_\mu^{(0)} = \dfrac{(-1)^\mu}{2}\left(\dfrac{1}{a^\mu} + \dfrac{2}{a+1}\right),\ u_0^{(\nu)} = \dfrac{(-1)^\nu}{2}\left(\dfrac{1}{a^\nu} + \dfrac{2}{a+1}\right) \\ \qquad u_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu}\left(\dfrac{1}{a^\mu} + \dfrac{1}{a^\nu}\right) \end{array} \right\} (\mu \geqq 1, \nu \geqq 1)$$

Die Doppelreihe $\sum_{0}^{\infty}{}^{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)}$ ist alsdann convergent, denn es ergiebt sich:

(13) $$\lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = 0.$$

Nichtsdestoweniger hat man:

(14) $$\begin{cases} \lim\limits_{\mu=\infty} \left| u_\mu^{(0)} \right| = \dfrac{1}{a+1}, & \lim\limits_{\mu=\infty} \left| u_\mu^{(\nu)} \right| = \dfrac{1}{a^\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \\ \lim\limits_{\nu=\infty} \left| u_0^{(\nu)} \right| = \dfrac{1}{a+1}, & \lim\limits_{\nu=\infty} \left| u_\mu^{(\nu)} \right| = \dfrac{1}{a^\mu} \quad (\mu = 1, 2, 3, \ldots), \end{cases}$$

sodass also die Terme jeder einzelnen Zeile und Colonne durchweg von Null verschieden bleiben.

3. Ist:

(15) $$\lim_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = S^{(\nu)} \quad \text{für: } \nu = 0, 1, 2, \ldots n,$$

so folgt aus Gl. (6), dass:

(16) $$\begin{cases} \sum\limits_{0}^{\infty} u_\mu^{(0)} = S^{(0)} \\ \sum\limits_{0}^{\infty} u_\mu^{(\nu)} = S^{(\nu)} - S^{(\nu-1)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots n) \end{cases}$$

d. h. fallen die Grenzwerthe $\lim\limits_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots n$ endlich aus, so bildet die 1te, 2te, ... $(n+1)$te Zeile je eine convergente Reihe.

Umgekehrt hat man:

(17) $$S_m^{(\nu)} = \sum_{0}^{m}{}^{\mu}\, u_\mu^{(0)} + \sum_{0}^{m}{}^{\mu}\, u_\mu^{(1)} + \ldots + \sum_{0}^{m}{}^{\mu}\, u_\mu^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

und daher:

(18) $$\lim_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = \sum_{0}^{\infty}{}^{\mu}\, u_\mu^{(0)} + \sum_{0}^{\infty}{}^{\mu}\, u_\mu^{(1)} + \ldots + \sum_{0}^{\infty}{}^{\mu}\, u_\mu^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n),$$

falls die rechts stehenden Reihen, d. h. die 1te, 2te, ... $(n+1)$te Zeile sämmtlich convergiren.

Hieraus folgt also:

Die Existenz endlicher Grenzwerthe $\lim_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ ist **identisch** mit der Convergenz aller einzelnen Zeilen.

Die analoge Beziehung besteht dann offenbar zwischen der Existenz endlicher Grenzwerthe $\lim_{\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ für $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ und der Convergenz aller einzelnen Colonnen.

4. Mit Benützung dieses Resultates liefern aber die im vorigen Paragraphen gewonnenen Ergebnisse über die Grenzwerthe zweifach unendlicher Zahlenfolgen ohne weiteres die folgenden Sätze:

I. Eine Doppelreihe kann **convergiren,** ohne dass eine einzige Zeile oder Colonne eine **convergente** Reihe bildet. Es kann dann aber immer nur eine **endliche** Anzahl von Zeilen bezw. Colonnen **eigentlich** divergiren oder ein **unendliches** Unbestimmtheits-Intervall besitzen; und es muss das Unbestimmtheits-Intervall aller Zeilen und Colonnen von einer bestimmten an **beliebig klein** werden.

Dies folgt aus § 1, Art. 2. Ein Beispiel einer Doppelreihe, bei welcher sicher keine einzige Zeile und Colonne convergirt (denn die unendlich entfernten Glieder hatten ja nicht einmal den Grenzwerth Null) wurde bereits am Schlusse des Art. 2 gegeben. Hier war (Gl. (11)):

$$S_\mu^{(\nu)} = \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{2(a+1)} \left( \frac{1}{a^\mu} + \frac{1}{a^\nu} \right)$$

also:

$$S_\mu^{(0)} = \frac{(-1)^\mu}{2(a+1)} \left( \frac{1}{a^\mu} + 1 \right)$$

$$S_\mu^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)} = \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{2(a+1)} \left( \frac{2}{a^\mu} + \frac{a+1}{a^\nu} \right) \quad (\nu \geqq 1),$$

sodass also die $1^{\text{te}}$ Zeile in den Grenzen $\pm \frac{1}{2(a+1)}$, die

$(\nu + 1)^{\text{te}}$ (wo $\nu \geqq 1$) in den Grenzen $\pm \frac{1}{2a^\nu}$ oscillirt. Das analoge gilt bezüglich der Colonnen. Um ferner convergente Doppelreihen herzustellen, in denen eine beliebige endliche Anzahl von Zeilen (Colonnen) eigentlich divergirt oder ein unendliches Unbestimmtheits-Intervall besitzt, braucht man nur in irgend einer convergenten Doppelreihe eine beliebige endliche Anzahl von Zeilen (Colonnen) durch die Terme irgendwelcher eigentlich divergenten oder unendlich-unbestimmten Reihen, ebensoviele andere Zeilen (Colonnen) durch die nämlichen Terme mit entgegengesetztem Vorzeichen zu ersetzen.

II. Ist ausser der **Doppelreihe:** $\sum\limits_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S$ jede einzelne **Zeile:** $\sum\limits_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ oder jede einzelne **Colonne:** $\sum\limits_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)}$ **convergent,** so **convergirt** auch die Reihe der **Zeilen-Summen** bezw. diejenige der **Colonnen-Summen** gegen die Summe $S$, d. h. man hat:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} = S, \text{ bezw. } \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)} = S.\text{[1]} \tag{19}$$

[1]) Das Symbol:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)},$$

ausführlicher geschrieben:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \left( \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} \right),$$

hat allemal die Bedeutung von:

$$\lim_{n=\infty} \left( \lim_{m=\infty} \sum_0^n{}_\nu \sum_0^m{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} \right)$$

d. h. von:

$$\lim_{n=\infty} \left( \lim_{m=\infty} S_m^{(n)} \right).$$

(Fortsetzung auf der nächsten Seite!)

Denn nach § 1, Art. 3 hat die Annahme: $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = S$ und die Existenz der Grenzwerthe $\lim\limits_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ bezw. $\lim\limits_{\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$ stets zur Folge, dass:

$$(20) \qquad \lim_{\nu=\infty}(\lim_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)}) = S \text{ bezw. } \lim_{\mu=\infty}(\lim_{\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}) = S.$$

Man kann den Inhalt des Satzes II auch folgendermaassen aussprechen:

Die Summation einer **convergenten**[1]) Doppelreihe mit **convergenten Zeilen** oder **Colonnen** kann auf zwei successive auszuführende einfache Summationen zurückgeführt werden, nämlich:

$$(21) \quad \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}_\nu \left(\sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)}\right) \text{ bezw. } \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}_\mu \left(\sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)}\right).$$

Man bemerke schliesslich, dass der Satz II mutatis mutandis auch richtig bleibt, wenn $+\infty$ oder $-\infty$ an die Stelle der endlichen Zahl $S$ tritt, da die Gleichung (20) auch in diesem Falle Geltung behält (s. § 1, Art. 3, Gl. (8); also:

III. Ist die **Doppelreihe** der $u_\mu^{(\nu)}$ mit **convergenten Zeilen** bezw. **Colonnen eigentlich** divergent, so gilt das gleiche von der Reihe der **Zeilen-Summen** bezw. **Colonnen-Summen.**

---

Das analoge gilt für das Symbol:

$$\sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)}.$$

Man könnte ein solches Symbol, zum Unterschiede von demjenigen der Doppelreihe: $\sum\limits_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)}$, passend als iterirte Reihe bezeichnen, ein Ausdruck, dessen Analogon zur Vermeidung von Zweideutigkeiten sich auch für die Theorie der bestimmten Integrale empfehlen dürfte.

[1]) Die Convergenz der Doppelreihe, d. h. die Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ muss a priori feststehen, sonst ist der Satz unrichtig, wie Satz IV zeigt.

Mit Berücksichtigung dieses Satzes und der weiteren Betrachtungen in § 1, Art. 3 ergiebt sich sodann:

IV. Auch wenn alle **Zeilen und Colonnen convergente** Reihen bilden, und wenn sowohl die Reihe der **Zeilen-Summen,** als auch diejenige der **Colonnen-Summen** gegen die **nämliche** Summe $S$ **convergirt,** so **kann** die betreffende **Doppelreihe** nichtsdestoweniger **divergiren** und zwar (nach Satz III) allemal **uneigentlich.** Dieses **muss** der Fall sein, wenn die Reihe der **Zeilen-Summen** und diejenige der **Colonnen-Summen** gegen **verschiedene** Werthe convergiren.

Um Beispiele derartiger divergenter Doppelreihen zu gewinnen, hat man lediglich für $S_\mu^{(\nu)}$ einen jener Ausdrücke $a_\mu^{(\nu)}$ zu wählen, welche in § 1, Art. 3 näher untersucht wurden, und sodann die Reihenglieder $a_\mu^{(\nu)}$ vermittelst der Gleichungen (8) entsprechend darzustellen. Setzt man z. B. (s. § 1, Gl. (16) (19) (22) (25)):

$$(22)\qquad S_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{1+(\mu-\nu)^2},\ \frac{\mu\nu}{1+\mu^2+\nu^2},\ \left(\frac{2}{1+(\mu-\nu)^2}\right)^{\nu+1},\ \frac{\mu^2\nu^2}{1+\mu^3+\nu^3},$$

so hat man:

$$(23)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = \lim\limits_{\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = 0 \qquad \begin{pmatrix}\mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots\end{pmatrix} \\ \lim\limits_{\nu=\infty}\left(\lim\limits_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)}\right) = \lim\limits_{\mu=\infty}\left(\lim\limits_{\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}\right) = 0, \end{array}\right.$$

während $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ nicht existirt. Es convergirt dann also jede Zeile und jede Colonne gegen die Summe 0, desgleichen die Reihe aller Zeilen-Summen, wie auch aller Colonnen-Summen gegen die Gesammtsumme 0, während die betreffende Doppelreihe oscillirt.

Nimmt man ferner für $S_\mu^{(\nu)}$ einen der folgenden Ausdrücke (s. § 1, Gl. (12)):

$$(24)\qquad S_\mu^{(\nu)} = \frac{\mu+1}{\mu+\nu+1},\ 2^{-\frac{\nu+1}{\mu+1}},\ \left(\frac{\mu+1}{\mu+2}\right)^{\nu+1},$$

so ist:

$$(25) \qquad \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)}\right) = 1, \quad \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}\right) = 0,$$

sodass also die Reihe der Zeilen-Summen gegen die Summe 1, diejenige der Colonnen-Summen gegen die Summe 0 convergirt. Eine verhältnissmässig einfache Form der Reihenglieder $u_\mu^{(\nu)}$ liefert übrigens der letzte der Ausdrücke (24), nämlich:

$$(26) \quad u_0^{(0)} = \tfrac{1}{2}, \text{ im übrigen: } u_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\mu+1}\cdot\left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)^\nu - \frac{1}{\mu+2}\cdot\left(\frac{\mu+1}{\mu+2}\right)^{\nu+1}.$$ [1]

5. Hat man durchweg $u_\mu^{(\nu)} \geqq 0$, so bilden die $S_\mu^{(\nu)}$ allemal eine monotone (nämlich niemals abnehmende) Folge positiver Zahlen. Daraus ergeben sich aber sofort mit Rücksicht auf § 1, Art. 4 die folgenden Sätze:

V. Ist $u_\mu^{(\nu)} \geqq 0$ und bleibt $S_\mu^{(\nu)}$ unter einer endlichen Zahl $g$, so convergirt die Doppelreihe der $u_\mu^{(\nu)}$ gegen eine bestimmte Summe $S$. Zugleich convergirt jede **Zeile** und jede **Colonne,** und die Reihe der **Zeilen-** bezw. **Colonnen-Summen** convergirt gleichfalls gegen die Summe $S$.

VI. Ist $u_\mu^{(\nu)} \geqq 0$, so zieht **jede** der drei Gleichungen:

$$(27) \qquad \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S, \quad \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} = S, \quad \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)} = S$$

**die beiden anderen** nach sich. Dies gilt auch noch, wenn $+\infty$ an die Stelle der bestimmten positiven Zahl $S$ tritt.

Die Sätze V und VI bleiben selbstverständlich in Kraft, wenn unter den Termen $u_\mu^{(\nu)}$ negative Zahlen in endlicher Anzahl vorkommen.

---

[1] Es ist dies im wesentlichen das von F. Arndt herrührende Beispiel (Grunert's Archiv, Bd. 11, S. 319) Beispiel (s. Stolz, Allg. Arithmetik, Bd. I, S. 246).

## § 3. Beziehungen zwischen einer Doppelreihe und der aus den Diagonal-Summen gebildeten einfachen Reihe.

1. Formt man das zweifach unendliche Schema:

$$
(15)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\phantom{+}\, u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \ldots + u_\mu^{(0)} + \ldots \\
+\, u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \ldots + u_\mu^{(1)} + \ldots \\
+\, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\, u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \ldots + u_\mu^{(\nu)} + \ldots \\
+\, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.
$$

in eine einfach unendliche Reihe um, indem man die Terme $u_\mu^{(\nu)}$ nach „Diagonalen“ ordnet, d. h. indem man bildet:

$$
(2)\qquad \sum_0^\infty{}^{\nu}\, w_\nu, \quad \text{wo: } w_\nu = u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \ldots + u_{\nu-1}^{(1)} + u_\nu^{(0)},
$$

so besteht zwischen der Doppelreihe der $u_\mu^{(\nu)}$ und der einfach-unendlichen Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, w_\nu$ eine vollkommene Aequivalenz, sobald $u_\mu^{(\nu)} \geqq 0$.

Es gilt dann nämlich, wie das Schema:

$$
\begin{array}{l}
u_0^{(0)} + \ldots + u_n^{(0)} + \ldots + u_{2n}^{(0)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_0^{(n)} + \ldots + u_n^{(n)} \\
\ldots\ldots\ldots \\
u_0^{(2n)}
\end{array}
$$

ohne weiteres zeigt, die doppelte Ungleichung:

$$
(3)\qquad \sum_0^n{}^{\nu}\, w_\nu \leqq S_n^{(n)} \leqq \sum_0^{2n}{}^{\nu}\, w_\nu .
$$

Wenn nun die Doppelreihe gegen die Summe $S$ convergirt, so hat man speciell $\lim_{n=\infty} S_n^{(n)} = S$, also:

$$
\sum_0^n{}^{\nu}\, w_\nu \leqq S,
$$

und daraus folgt zunächst wegen $w_\nu \geqq 0$, die Convergenz der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$.

Bringt man sodann Ungl. (3) auf die Form:

$$(4) \qquad 0 \leqq S_n^{(n)} - \sum_0^n{}_\nu\, w_\nu \leqq \sum_{n+1}^{2n}{}_\nu\, w_\nu,$$

so erkennt man unmittelbar, dass: $\lim_{n=\infty} (S_n^{(n)} - \sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu) = 0$, und somit:

$$(5) \qquad \sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu = S.$$

Umgekehrt: Wenn $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ gegen die Summe $S$ convergirt, so lehrt die Ungleichung (4), dass auch:

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} S_n^{(n)} = S,$$

und somit nach § 1. Gl. (31) auch allgemein:

$$(7) \qquad \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = S.$$

Daraus folgt weiter, dass die Doppelreihe der $u_\mu^{(\nu)}$ und die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ auch allemal gleichzeitig divergiren, falls eine der beiden divergirt.

Fasst man dieses Resultat mit dem Satz VI des vorigen Paragraphen zusammen, so ergiebt sich an dessen Stelle der folgende etwas allgemeinere:

Ist $u_\mu^{(\nu)} \geqq 0$, so zieht jede der **vier** Gleichungen:

$$(8) \quad \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S, \quad \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} = S, \quad \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)} = S, \quad \sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu = S$$

**die drei anderen nach sich,** gleichgültig, ob $S$ endlich oder unendlich gross ist.

2. Um die Beziehung zwischen einer beliebigen Doppelreihe $\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)}$ und der Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, w_\nu$ festzustellen, schicken wir zunächst den folgenden Hülfssatz voraus, welcher eine Verallgemeinerung eines bekannten Cauchy'schen[1]) Satzes darstellt:

Bleiben die Terme $a_\mu^{(\nu)}$ $\begin{pmatrix}\mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots\end{pmatrix}$ numerisch unter einer endlichen Zahl $g$, und ist:

$$(9)\qquad \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a,$$

(wo $a$ eine bestimmte Zahl incl. Null vorstellt), so wird:

$$(10)\quad \lim_{n=\infty} \frac{a_0^{(n)} + a_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}^{(1)} + a_n^{(0)}}{n+1} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n{}^{\nu}\, a_\nu^{(n-\nu)} = a.$$

Beweis. Man hat zunächst identisch:

$$(11)\qquad \sum_0^n{}^{\nu}\, a_\nu^{(n-\nu)} - (n+1)\cdot a = \sum_0^n{}^{\nu}\, (a_\nu^{(n-\nu)} - a).$$

In Folge der Voraussetzung (9) kann man nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Zahl $\varepsilon$ eine Zahl $m$ so fixiren, dass:

$$(12)\qquad |a_\nu^{(n-\nu)} - a| \leqq \varepsilon \quad \text{für:}\ \nu \geqq m,\ n-\nu \geqq m.$$

Nimmt man jetzt $n > 2m$ an (also: $n - m > m$) und schreibt Gl. (11) folgendermaassen:

$$(13)\qquad \begin{aligned} &\sum_0^n{}^{\nu}\, a_\nu^{(n-\nu)} - (n+1)\, a \\ &= \sum_0^m{}^{\nu}\, (a_\nu^{(n-\nu)} - a) + \sum_{m+1}^{n-m}{}^{\nu}\, (a_\nu^{(n-\nu)} - a) + \sum_{n-m+1}^{n}{}^{\nu}\, (a_\nu^{(n-\nu)} - a), \end{aligned}$$

so wird in der zweiten Summe der rechten Seite durchweg: $|a_\nu^{(n-\nu)} - a| \leqq \varepsilon$, in der ersten und dritten zum mindesten: $|a_\nu^{(n-\nu)} - a| \leqq |a_\nu^{(n-\nu)}| + |a| < g + |a|$, und daher:

---

[1]) Analyse algébrique, p. 54.

$$(14)\qquad \left| \sum_0^n{}_\nu\, a_\nu^{(n-\nu)} - (n+1)\,a \right| < (2m+1)\cdot(g+|a|) + (n-2m)\cdot\varepsilon$$

oder:

$$(15)\qquad \left| \frac{1}{n+1}\cdot\sum_0^n{}_\nu\, a_\nu^{(n-\nu)} - a \right| < \frac{2m+1}{n+1}\cdot(g+|a|) + \left(1 - \frac{2m+1}{n+1}\right)\cdot\varepsilon.$$

Lässt man hier $n$ in's Unendliche wachsen, so wird:

$$(16)\qquad \lim_{n=\infty} \left| \frac{1}{n+1} \sum_0^n{}_\nu\, a_\nu^{(n-\nu)} - a \right| \leqq \varepsilon,$$

also schliesslich:

$$(17)\qquad \lim_{n=\infty} \left| \frac{1}{n+1}\cdot\sum_0^n{}_\nu\, a_\nu^{(n-\nu)} \right| = a.$$

3. Nunmehr können wir den folgenden Satz beweisen: Besitzt die **convergente** Doppelreihe:

$$\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S$$

die Eigenschaft, dass die einzelnen Zeilen und Colonnen **convergiren** oder innerhalb **endlicher Grenzen oscilliren,** so kann die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ nur **convergiren** oder **oscilliren.**[1]) Im **ersteren** Falle ist dann auch:

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu = S.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass in Folge der gemachten Voraussetzungen $|S_\mu^{(\nu)}|$ für alle möglichen $\mu$, $\nu$ unter einer festen Zahl $g$ bleiben muss.

Wegen der Convergenz der Doppelreihe gegen die Summe $S$ lassen sich jeder positiven Zahl $\varepsilon$ zwei Zahlen $m$, $n$ zuordnen, so dass:

---

[1]) Sie kann also niemals eigentlich divergiren. Dagegen können ihre Unbestimmtsgrenzen auch $\pm\infty$ werden (s. das Beispiel in Art. 4).

$$|S_\mu^{(\nu)} - S| < \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m, \ \nu \geqq n,$$

also:

$$S - \varepsilon < S_\mu^{(\nu)} < S + \varepsilon,$$

und somit:

(18) $$|S_\mu^{(\nu)}| < |S| + \varepsilon \quad (\mu \geqq m, \ \nu \geqq n).$$

Betrachtet man jetzt die ersten $n$ Zeilen der Doppelreihe, so bleibt nach Voraussetzung die Summe jeder einzelnen, wieviele Glieder man auch summiren mag, numerisch unter einer endlichen Grenze. Dasselbe gilt also auch für diejenigen Summen, welche entstehen, wenn man die ersten 2, 3, ... $n$ Zeilen addirt, sodass man setzen kann:

(19) $$|S_\mu^{(\nu)}| < g' \quad \text{für: } \mu = 0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.}, \ \nu < n,$$

wo $g'$ eine bestimmte positive Zahl bedeutet.

Analog ergiebt sich durch Betrachtung der ersten $m$ Colonnen:

(20) $$|S_\mu^{(\nu)}| < g'' \quad \text{für: } \mu < m, \ \nu = 0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.}$$

Bedeutet jetzt $g$ eine Zahl, die von keiner der drei Zahlen $|S| + \varepsilon$, $g'$, $g''$ überstiegen wird, so bestehen alle drei Beziehungen (18) (19) (20) gleichzeitig, sobald man jene drei Zahlen durch $g$ ersetzt, d. h. es ergiebt sich schliesslich:

(21) $$|S_\mu^{(\nu)}| < g \quad \text{für: } \begin{cases} \mu = 0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.} \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.} \end{cases}$$

Nun werde gesetzt:

(22) $$w_0 + w_1 + \ldots + w_\nu = W_\nu,$$

so hat man für $\nu \geqq 1$:

$$\begin{aligned} W_\nu = {} & u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \ldots + u_{\nu-2}^{(0)} + u_{\nu-1}^{(0)} + u_\nu^{(0)} && = S_\nu^{(0)} \\ & + u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \ldots + u_{\nu-2}^{(1)} + u_{\nu-1}^{(1)} && + (S_{\nu-1}^{(1)} - S_{\nu-1}^{(0)}) \\ & + u_0^{(2)} + u_1^{(2)} + \ldots + u_{\nu-2}^{(2)} && + (S_{\nu-2}^{(2)} - S_{\nu-2}^{(1)}) \\ & + \ldots\ldots && + \ldots\ldots \\ & + u_0^{(\nu)} && + (S_0^{(\nu)} - S_0^{(\nu-1)}) \end{aligned}$$

oder, anders geordnet:

(23) $W_\nu = S_\nu^{(0)} + S_{\nu-1}^{(1)} + \ldots + S_1^{(\nu-1)} + S_0^{(\nu)} - \{S_{\nu-1}^{(0)} + S_{\nu-2}^{(1)} + \ldots + S_0^{(\nu-1)}\}$

Substituirt man hier der Reihe nach $\nu = 1, 2, 3, \ldots n$, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
W_1 &= S_1^{(0)} + S_0^{(1)} - S_0^{(0)} \\
W_2 &= S_2^{(0)} + S_1^{(1)} + S_0^{(2)} - \{S_1^{(0)} + S_0^{(1)}\} \\
W_3 &= S_3^{(0)} + S_2^{(1)} + S_1^{(2)} + S_0^{(3)} - \{S_2^{(0)} + S_1^{(1)} + S_0^{(2)}\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
W_n &= S_n^{(0)} + S_{n-1}^{(1)} + \ldots + S_0^{(n)} - \{S_{n-1}^{(0)} + S_{n-2}^{(1)} + \ldots + S_0^{(n-1)}\}.
\end{aligned}$$

und wenn man diese $n$ Gleichungen zu der folgenden addirt:

$$W_0 = S_0^{(0)}$$

so resultirt nach Hinzufügung des Factors $\dfrac{1}{n+1}$:

$$(24) \qquad \frac{1}{n+1} \sum_0^n{}_\nu\, W_\nu = \frac{S_n^{(0)} + S_{n-1}^{(1)} + \ldots + S_0^{(n)}}{n+1}.$$

Hieraus folgt aber für $\lim n = \infty$, mit Berücksichtigung der Beziehung $\lim\limits_{n=\infty,\, \nu=\infty} S_n^{(\nu)} = S$ und des unmittelbar zuvor bewiesenen Hilfssatzes:

$$(25) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n{}_\nu\, W_n = S.$$

Wenn nun $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ convergirt und etwa:

$$(26) \qquad \sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu = \lim_{n=\infty} W_n = W$$

ist, so ist, nach dem im vorigen Artikel citirten Cauchy'schen Satze, auch:

$$(27) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n{}_\nu\, W_\nu = W,$$

so dass sich aus der Verbindung der Gleichungen (25)—(27) ergiebt:

(28) $$\sum_0^\infty{}^{\nu}\, w_\nu = S.$$

Wäre nun andererseits $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, w_\nu$ eigentlich divergent, also $\lim_{n=\infty} = +\infty$ bezw. $= -\infty$, so müsste wiederum nach jenem Cauchy'schen Satze:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n{}^{\nu}\, W_\nu = +\infty \text{ bezw. } = -\infty$$

sein, was der Gleichung (25) widerspräche. Daraus folgt mit Nothwendigkeit, dass die Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, w_\nu$, falls sie nicht convergirt, jedenfalls nur oscilliren kann.

4. Um an einigen einfachen Beispielen zu zeigen, dass die beiden im vorigen Satze hervorgehobenen Möglichkeiten auch wirkich eintreten können, werde gesetzt:

(29) $$u_\mu^{(\nu)} = v_{\mu+\nu} - v_{\mu+\nu+1},$$

wo $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, v_\nu$ als (bedingt oder unbedingt) convergent angenommen wird. Die auf diese Weise definirte Doppelreihe wird durch das Schema dargestellt:

(30) $$\begin{cases} \quad (v_0 - v_1) + (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + \ldots + (v_\mu - v_{\mu+1}) + \ldots \\ + (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + (v_3 - v_4) + \ldots + (v_{\mu+1} - v_{\mu+2}) + \ldots \\ + (v_2 - v_3) + (v_3 - v_4) + (v_4 - v_5) + \ldots + (v_{\mu+2} - v_{\mu+3}) + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (v_\nu - v_{\nu+1}) + (v_{\nu+1} - v_{\nu+2}) + (v_{\nu+2} - v_{\nu+3}) + \ldots + (v_{\mu+\nu} - v_{\mu+\nu+1}) + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Dasselbe ist offenbar convergent und besitzt die Summe: $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, v_\nu$. Denn man hat:

(31) $$S_m^{(n)} = \sum_0^n{}^{\nu}\, v_\nu - \sum_{m+1}^{m+n+1}{}^{\nu}\, v_\nu = \sum_0^m{}^{\nu}\, v_\nu - \sum_{n+1}^{m+n+1}{}^{\nu}\, v_\nu.$$

Die einzelnen Zeilen und Colonnen sind gleichfalls convergent und ihre Summen der Reihe nach $= v_0, v_1, v_2, \ldots$

Andererseits hat man offenbar:

$$w_\nu = (\nu + 1) \cdot (v_\nu - v_{\nu+1}) \tag{32}$$

und daher:

$$\sum_0^{n-1}{}_\nu\, w_\nu = (v_0 - v_1) + 2\,(v_1 - v_2) + 3\,(v_2 - v_3) + \ldots + n\,(v_{n-1} - v_n)$$

$$= \sum_0^{n-1}{}_\nu\, v_\nu - n \cdot v_n. \tag{33}$$

Diese Gleichung lehrt, dass $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ dann und nur dann convergirt, wenn $\lim\limits_{n=\infty} n \cdot v_n$ eine bestimmte Zahl ist. Letzteres ist aber nur in der Weise möglich, dass:

$$\lim_{n=\infty} n \cdot v_n = 0. \tag{34}$$

Denn die Beziehung $\lim\limits_{n=\infty} n \cdot v_n = a$, wo $|a| > 0$, würde ja die Divergenz der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, v_\nu$ zur Folge haben. Hieraus folgt also, dass in der That:

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu = \sum_0^\infty{}_\nu\, v_\nu \quad \text{d. h.} \quad = \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, (v_{\mu+\nu} - v_{\mu+\nu+1}) \tag{35}$$

wird, wenn $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ überhaupt convergirt. Um Beispiele dieser Art zu gewinnen hat man also nur $v_\nu$ der Bedingung (34) gemäss zu wählen (z. B. $v_\nu = \frac{1}{(\nu+1)^2}$, $v_\nu = \frac{(-1)^\nu}{(\nu+2)\lg(\nu+2)}$).

Da $\lim\limits_{n=\infty} n \cdot v_n$ auch nicht $= +\infty$ bezw. $= -\infty$ sein kann (weil sonst wiederum $\sum_0^\infty{}_\nu\, v_\nu$ divergiren müsste), so erkennt man zunächst aus Gl. (33), dass $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ in keinem Falle eigentlich divergiren kann.

Im übrigen bleibt nur noch die Möglichkeit offen, dass $\liminf_{n=\infty} n \cdot v_n$ und $\limsup_{n=\infty} n \cdot v_n$ verschieden ausfallen. In diesem Falle oscillirt dann die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ nach Gl. (33) in den Grenzen:

$$(36)\qquad \sum_0^\infty{}_\nu\, v_\nu - \limsup_{n=\infty} n \cdot v_n \quad \text{und:} \quad \sum_0^\infty{}_\nu\, v_\nu - \liminf_{n=\infty} n \cdot v_n.$$

(Beispiele. Man setze:

$$v_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu+1}, \text{ also: } u_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu}\left(\frac{1}{\mu+\nu+1} + \frac{1}{\mu+\nu+2}\right).$$

Alsdann wird:

$\liminf_{n=\infty} n \cdot v_n = -1$, $\limsup_{n=\infty} n \cdot v_n = +1$, und da:

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, v_\nu = \sum_0^\infty{}_\nu\, \frac{(-1)^\nu}{\nu+1} = \lg 2,$$

so ergeben sich: $(\lg 2 - 1)$ und $(\lg 2 + 1)$ als Unbestimmtheitsgrenzen von $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$.

Setzt man dagegen:

$$v_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{\nu+1}}, \text{ also: } u_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu+\nu+1}} + \frac{1}{\sqrt{\mu+\nu+2}}\right).$$

so wird: $\liminf_{n=\infty} n \cdot v_n = -\infty$, $\limsup_{n=\infty} n \cdot v_n = +\infty$, und die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ oscillirt somit in den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$).

5. Es verdient ausdrücklich hervorgehoben zu werden, dass die bei der Formulirung des Satzes in Art. 3 gemachte Einschränkung, welche sich auf die Endlichkeit der Zeilen- und Colonnen-Summen bezieht, nicht etwa lediglich der Beweisführung zu Liebe eingeführt wurde: dieselbe bildet vielmehr eine wesentliche Voraussetzung für die Gültigkeit jenes Satzes, d. h. der letztere kann thatsächlich hinfällig werden, wenn die fragliche Bedingung nicht erfüllt ist.

Man kann dies in sehr einfacher Weise aus der folgenden Ueberlegung ersehen. Es sei $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S$ irgend eine convergente Doppelreihe, für welche die Beziehung besteht: $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu = S$. Man bilde nun aus dieser Doppelreihe eine neue, indem man die Terme der ersten Zeile, also die $u_\mu^{(0)}$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$, durch $u_\mu^{(0)} + v_\mu$, die der zweiten, also die $u_\mu^{(1)}$, durch $u_\mu^{(1)} - v_\mu$ ersetzt, wo die $v_\mu$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$ eine nach Belieben zu wählende Zahlenfolge bedeuten. Man erhält auf diese Weise das folgende Schema:

$$
(37)\quad \left\{\begin{array}{llllll}
 & (u_0^{(0)} + v_0) & + (u_1^{(0)} + v_1) & + \ldots + (u_{\nu-1}^{(0)} + v_{\nu-1}) & + (u_\nu^{(0)} + v_\nu) & + \ldots \\
+ & (u_0^{(1)} - v_0) & + (u_1^{(1)} - v_1) & + \ldots + (u_{\nu-1}^{(1)} - v_{\nu-1}) & + (u_\nu^{(1)} - v_\nu) & + \ldots \\
+ & u_0^{(2)} & + u_1^{(2)} & + \ldots + u_{\nu-1}^{(2)} & + u_\nu^{(2)} & + \ldots \\
+ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
+ & u_0^{(\nu)} & + u_1^{(\nu)} & + \ldots + u_{\nu-1}^{(\nu)} & + u_\nu^{(\nu)} & + \ldots \\
+ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right.
$$

und erkennt unmittelbar, dass auch diese Doppelreihe gegen die Summe $S$ convergirt.

Bezeichnet man sodann die Diagonal-Summen dieses Schema's mit $w'_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, so wird:

$$
(38)\quad \left\{\begin{array}{l}
w'_0 = u_0^{(0)} + v_0 \\
w'_\nu = u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \ldots + u_{\nu-2}^{(2)} + (u_{\nu-1}^{(1)} - v_{\nu-1}) + (u_\nu^{(0)} + v_\nu) \quad (\nu \geqq 1) \\
\phantom{w'_\nu} = w_\nu - v_{\nu-1} + v_\nu
\end{array}\right.
$$

und daher:

$$
(39)\qquad \sum_0^n{}_\nu\, w'_\nu = \sum_0^n{}_\nu\, w_\nu + v_n.
$$

Ist nun $\lim_{n=\infty} v_n = v$ endlich und von Null verschieden, so wird nach Gl. (34):

$$
(40)\qquad \sum_0^\infty{}_\nu\, w'_\nu = S + v,
$$

d. h. die Reihe $\sum_0^\infty {}_\nu\, w'_\nu$ bleibt zwar convergent, ihre Summe ist aber verschieden von derjenigen der betreffenden Doppelreihe. (Beispiel: $v_\nu = 1$).

Ist dagegen $\lim_{n=\infty} v_n = +\infty$ oder $= -\infty$, so lehrt Gl. (34), dass die Reihe $\sum_0^\infty {}_\nu\, w'_\nu$ eigentlich divergent wird. (Beispiel: $v_\nu = \nu$).

Die Reihe $\sum_0^\infty {}_\nu\, w'_\nu$ verliert also hier thatsächlich jene Eigenschaften, welche ihr nach dem Satze des Art. 3 zukommen, falls die Zeilen- und Colonnen-Summen durchweg endlich bleiben.

## § 4. Absolut convergente Doppelreihen. — Identität zwischen absoluter und unbedingter Convergenz.

1. Die aus den Termen $u_\mu^{(\nu)} \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$ gebildete Doppelreihe heisst absolut convergent, wenn die Doppelreihe der $|u_\mu^{(\nu)}|$ convergirt.

Um vor allem nachzuweisen, dass eine in diesem Sinne absolut convergente Doppelreihe überhaupt convergirt, werde gesetzt:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \quad |u_0^{(0)}| + |u_1^{(0)}| + \ldots + |u_\mu^{(0)}| \\ + |u_0^{(1)}| + |u_1^{(1)}| + \ldots + |u_\mu^{(1)}| \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + |u_0^{(\nu)}| + |u_1^{(\nu)}| + \ldots + |u_\mu^{(\nu)}| \end{array} \right\} = \bar{S}_\mu^{(\nu)},$$

während $S_\mu^{(\nu)}$ wiederum die entsprechende Summe der $u_\mu^{(\nu)}$ bezeichnen mag. Da allgemein:

$$\left|\sum u_\mu^{(\nu)}\right| \leq \sum |u_\mu^{(\nu)}|$$

(wobei sich die Summation links und rechts über die nämlichen Werthe von $\mu$, $\nu$ zu erstrecken hat), so hat man:

$$(2) \qquad \left| S_{m+\varrho}^{(n+0)} - S_m^{(n)} \right| \leqq \bar{S}_{m+\varrho}^{(n+0)} - \bar{S}_m^{(n)},$$

sodass gleichzeitig mit $\lim\limits_{m=\infty,\, n=\infty} \bar{S}_m^{(n)}$ stets auch $\lim\limits_{m=\infty,\, n=\infty} S_m^{(n)}$ einen bestimmten Werth besitzt, also mit der Doppelreihe der $|u_\mu^{(\nu)}|$ stets auch diejenige der $u_\mu^{(\nu)}$ convergirt.

2. Solche absolut convergente zeigen ein ganz analoges Verhalten, wie convergente Doppelreihen mit positiven Gliedern. Insbesondere gilt der Satz:

Ist die Doppelreihe der $u_\mu^{(\nu)}$ **absolut** convergent und:

$$(3) \qquad \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S,$$

so convergirt auch jede einzelne Zeile (Colonne) und die Reihe der Zeilen-Summen (Colonnen-Summen) **absolut,** und man hat:

$$(4) \qquad \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} = S \quad \text{(Reihe der Zeilen-Summen)}$$

$$(5) \qquad \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)} = S \quad \text{(Reihe der Colonnen-Summen).}$$

Ebenso convergirt die Reihe der Diagonalen **absolut** und zwar auch dann, wenn man die einzelnen Terme $u_\mu^{(\nu)}$ als Reihenglieder auffasst, und man hat:

$$(6) \qquad \sum_0^\infty{}_\nu \left(u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \ldots + u_\nu^{(0)}\right) = S \quad \text{(Reihe der Diagonalen).}$$

Beweis. Da nach Voraussetzung die Doppelreihe der $|u_\mu^{(\nu)}|$ convergirt, so convergirt in dem Schema der $|u_\mu^{(\nu)}|$ jede Zeile und Colonne, die Reihe der Zeilen- und der Colonnen-Summen und die Reihe der Diagonalen. In Folge dessen ist aber in dem Schema der $u_\mu^{(\nu)}$ jede Zeile und Colonne, die Reihe der Zeilen- und der Colonnen-Summen und die Reihe der Diagonalen **absolut** convergent (auch wenn man durchweg die einzelnen Terme $u_\mu^{(\nu)}$ als Reihenglieder auffasst).

Es handelt sich also nur noch darum zu zeigen, dass die betreffenden Reihen sämmtlich die Summe $S$ besitzen. Für die Reihe der Diagonalen (Gl. (6)) folgt dies aber unmittelbar aus dem Satze in Art. 3 des vorigen Paragraphen.

Die Gültigkeit der Gleichungen (4) und (5) ergiebt sich dann schliesslich, indem man einen bekannten Satz[1]) über absolut convergente einfach-unendliche Reihen auf die Reihe (6) anwendet, nämlich: Vertheilt man die Glieder einer absolut convergenten Reihe mit der Summe $S$ in unendlich viele Reihen, so ist jede derselben (absolut) convergent und die aus ihren Summen gebildete Reihe convergirt gleichfalls gegen die Summe $S$.

3. Der im vorigen Artikel bewiesene Satz lässt sich ohne weiteres in folgender Weise umkehren bezw. verallgemeinern:

Von den **vier** Gleichungen:

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S, \quad \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} = S, \quad \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)} = S, \\ \sum_0^\infty{}_\nu \left(u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \ldots + u_\nu^{(0)}\right) = S \end{array}\right.$$

zieht **jede** einzelne **die drei anderen** nach sich, wenn die in der **Voraussetzung** auftretende Reihe bei Vertauschung der $u_\mu^{(\nu)}$ mit ihren absoluten Beträgen convergent bleibt.

Aus der letzteren Annahme folgt nämlich (nach dem Satze am Schlusse von § 3, Art. 1), dass die Doppelreihe der $|u_\mu^{(\nu)}|$ convergent, also diejenige der $u_\mu^{(\nu)}$ absolut convergent ist. Sodann ergiebt sich aber alles weitere aus dem Satze des vorigen Artikels.

In diesem Satze ist offenbar der folgende von Cauchy herrührende[2]), als Theil enthalten, nämlich:

---

[1]) s. z. B. Stolz, Allg. Arithmetik, Bd. 1, S. 242.

[2]) Analyse algébrique, p. 541.

Convergiren alle **Zahlen** des Schema's:

$$
(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l}
\phantom{+}\, u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \ldots + u_\mu^{(0)} + \ldots \\
+\, u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \ldots + u_\mu^{(0)} + \ldots \\
+\, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\, u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \ldots + u_\mu^{(\nu)} + \ldots \\
+\, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array} \right.
$$

und bilden die **Zeilen-Summen** eine convergente Reihe mit der Summe $S$, so gilt das Gleiche von den einzelnen **Colonnen** und der Reihe der **Colonnen-Summen**, falls die vorausgesetzten Convergenz-Eigenschaften bei Vertauschung der $u_\mu^{(\nu)}$ mit ihren absoluten Beträgen erhalten bleiben.

4. Eine convergente Doppelreihe heisst **unbedingt** convergent, wenn jede durch Umordnung der Glieder daraus hervorgehende Doppelreihe gegen dieselbe Summe convergirt, wie die ursprüngliche. Dabei betrachten wir die Doppelreihe $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, v_\mu^{(\nu)}$ dann und nur dann als durch „Umordnung" aus der Doppelreihe $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)}$ hervorgegangen, wenn jedem Terme $u_\mu^{(\nu)}$ ein ihm gleicher $v_\varrho^{(\sigma)}$ entspricht und umgekehrt. Es muss also jeder Term, der in dem Schema:

$$
\begin{array}{cccc}
u_0^{(0)} & u_1^{(0)} & u_2^{(0)} & \ldots \\
u_0^{(1)} & u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \ldots \\
u_0^{(2)} & u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

an einer bestimmten endlichen Stelle erscheint, auch in dem Schema:

$$
\begin{array}{cccc}
v_0^{(0)} & v_1^{(0)} & v_2^{(0)} & \ldots \\
v_0^{(1)} & v_1^{(1)} & v_2^{(1)} & \ldots \\
v_0^{(2)} & v_1^{(2)} & v_2^{(2)} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

eine bestimmt endliche Stelle innehaben und umgekehrt.

Alsdann gilt der Satz:

Jede **absolut** convergente Doppelreihe ist **unbedingt** convergent.

Beweis. Es werde das allgemeine Glied der ursprünglichen Doppelreihe mit $u_\mu^{(\nu)}$, ihre Summe mit $S$, dasjenige der umgeordneten mit $v_\mu^{(\nu)}$ bezeichnet. Dann folgt zunächst, dass auch die Doppelreihe der $v_\mu^{(\nu)}$ convergirt und zwar absolut. Denn setzt man etwa: $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} |u_\mu^{(\nu)}| = \bar{S}$, so muss jede begrenzte Doppelsumme, welche aus den Termen $|v_\mu^{(\nu)}|$ gebildet wird, unterhalb $\bar{S}$ bleiben, sodass also $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} |v_\mu^{(\nu)}|$ convergirt und $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} v_\mu^{(\nu)}$ absolut convergirt. Bezeichnet man die Summe der letzteren Doppelreihe mit $T$, so wird nach dem Satze des Art. 2 (Gl. (6)):

$$(9)\qquad \begin{cases} \sum_0^\infty{}_\nu \left(u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \ldots + u_\nu^{(0)}\right) = S \\ \sum_0^\infty{}_\nu \left(u_0^{(\nu)} + v_1^{(\nu-1)} + \ldots + v_\nu^{(0)}\right) = T \end{cases}$$

Jede dieser einfach-unendlichen Reihen ist absolut convergent, auch wenn man die einzelnen Terme $u_\mu^{(\nu)}$ bezw. $v_\mu^{(\nu)}$ als Reihenglieder auffasst. Die zweite stellt dann aber lediglich eine Umordnung der ersten dar, und somit ergiebt sich:

$$(10)\qquad T = S,$$

womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

5. Um auch die Umkehrung des letzten Satzes beweisen zu können, schicken wir die folgende Bemerkung voraus. Eine einfach-unendliche Zahlenfolge:

$$u_1, \; u_2, \; u_3, \; \ldots \; .$$

lässt sich auf unendlich viele Arten als zweifach-unendliche Folge anordnen, am einfachsten etwa in folgender Weise:

man theile jene Folge in Gruppen, welche der Reihe nach aus $1, 3, 5, \ldots (2\nu + 1), \ldots$ Termen bestehen, sodass also die ersten $\nu$ Gruppen zusammen $(\nu + 1)^2$ Terme enthalten, und ordne sodann diese Gruppe zu einem unbegrenzt fortsetzbaren quadratischen Schema, wie folgt:

$$(10)\quad \left\{ \begin{array}{cc|cccccc}
(1) & \rightarrow & u_1 & u_4 & u_9 & \ldots & u_{(\nu+1)^2} & \ldots \\
 & & & \uparrow & \uparrow & \ldots & \uparrow & \ldots \\
(2) & \rightarrow & u_2 \rightarrow & u_3 & u_8 & \ldots & & \ldots \\
 & & & & \uparrow & \ldots & & \ldots \\
(3) & \rightarrow & u_5 \rightarrow & u_6 \rightarrow & u_7 & \ldots & & \ldots \\
 & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & & & & \uparrow & \ldots \\
(\nu+1) & \rightarrow & u_{\nu^2+1} \rightarrow & u_{\nu^2+2} \rightarrow & u_{\nu^2+3} \rightarrow & \ldots & u_{\nu^2+\nu+1} & \ldots \\
 & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array} \right.$$

Bezeichnet man jetzt mit $s_\mu^{(\nu)}$ die Summe aller derjenigen Terme, welche den ersten $\nu$ Zeilen und $\mu$ Colonnen dieses Schema's angehören, so hat man speciell:

$$(11)\qquad s_n^{(n)} = \sum_1^{n^2}{}_{\nu}\, u_\nu.$$

Wenn nun $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(n)}$ einen bestimmten Werth besitzt, so folgt daraus freilich noch nicht das gleiche für $\lim\limits_{m=\infty, n=\infty} s_m^{(n)}$: d. h. man kann hieraus noch keinen Schluss auf die Convergenz derjenigen Doppelreihe ziehen, welche durch das Schema (10) definirt wird.

Wenn dagegen $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(n)} = \pm\infty$ ist, oder wenn $\lim\limits_{n=\infty}\inf s_n^{(n)}$ und $\lim\limits_{n=\infty}\sup s_n^{(n)}$ verschieden ausfallen, so folgt mit Sicherheit, dass kein bestimmter $\lim\limits_{m=\infty, n=\infty} s_m^{(n)}$ existirt, und dass somit die Doppelreihe (10) unter keinen Umständen convergiren kann.

6. Mit Benützung dieser Bemerkung und des nämlichen Grundgedankens, welchen Riemann beim Beweise eines bekannten Satzes über die bedingte Convergenz einer nicht-absolut convergenten (einfachen) Reihe verwendet hat, können wir jetzt den folgenden Satz beweisen:

Eine convergente Doppelreihe, welche **nicht absolut** convergirt, lässt sich stets durch Umordnung **divergent** machen. Sie kann also **keinesfalls unbedingt** convergiren.

Beweis. Bezeichnet man wiederum das allgemeine Glied der betrachteten Doppelreihe mit $u_\mu^{(\nu)}$, so lässt sich die Gesammtheit dieser Glieder durch Anordnung nach „Diagonalen" in Form der einfach-unendlichen Reihe anschreiben:

$$(12) \qquad u_0^{(0)} + u_0^{(1)} + u_1^{(0)} + \ldots + u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \ldots + u_\nu^{(0)} + \ldots$$

Alsdann folgt zunächst aus der Voraussetzung, dass diese Reihe sowohl positive, als negative Glieder in unbegrenzter Anzahl enthalten muss, und dass die Reihe der positiven und diejenige der negativen Terme einzeln divergiren: denn in jedem anderen Falle würde die vorgelegte Doppelreihe, wie leicht zu sehen, absolut convergiren oder eigentlich divergiren. Es werde die Reihe der in (12) enthaltenen positiven Glieder mit:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots \qquad (A),$$

die der negativen mit:

$$-b_1, \quad -b_2, \quad -b_3, \quad \ldots \qquad (B)$$

bezeichnet. Nun entnehme man zunächst der Reihe $(A)$ so viele positive Glieder, dass ihre Summe $\geqq 1$ ausfüllt, und füge nöthigenfalls noch so viele ebensolche Glieder hinzu, dass ihre Gesammt-Anzahl eine Quadratzahl: $n_1^2$ wird. Ordnet man dann diese $n_1^2$ Glieder nach dem zuvor angegebenen Verfahren zu einem quadratischen Schema, so gilt also für dasselbe die Beziehung:

$$(13) \qquad s_{n_1}^{(n_1)} \geqq 1.$$

Jetzt füge man zu der Summe $s_{n_1}^{(n_1)}$ so viele negative Glieder aus der Reihe ($B$), dass die Gesammt-Summe $\leqq -1$ wird, und nöthigenfalls weitere negative Glieder, bis die Gesammt-Anzahl wiederum eine Quadratzahl: $n_2^2$ wird (wo also $n_2 \geqq n_1 + 1$). Durch entsprechende Anreihung dieser Terme kann man das quadratische Schema zu einem solchen von $n_2^2$ Gliedern vergrössern und hat sodann:

$$s_{n_2}^{(n_2)} \leqq -1. \tag{14}$$

In analoger Weise bringe man dasselbe durch Hinzufügung von positiven Termen auf $n_3^2$ Glieder, sodass:

$$s_{n_3}^{(n_3)} \geqq 2, \tag{15}$$

alsdann durch Hinzufügung von negativen Termen auf $n_4^2$ Glieder, so dass:

$$s_{n_4}^{(n_4)} \leqq -2. \tag{16}$$

Dieses Verfahren lässt sich in der Weise fortsetzen, dass nach $(2\nu - 1)$ solchen Operationen ein quadratisches Schema von $n_{2\nu-1}^2$ Gliedern mit der Summe resultirt:

$$s_{n_{2\nu-1}}^{(n_{2\nu-1})} \geqq \nu, \tag{17}$$

nach der nächsten ($(2\nu)^{\text{ten}}$) Operation ein solches von $n_{2\nu}^2$ Gliedern mit der Summe:

$$s_{n_{2\nu}}^{(n_{2\nu})} \leqq -\nu. \tag{18}$$

Bei unbegrenzter Fortsetzung dieser Methode entsteht also aus den Termen $u_\mu^{(\nu)}$ eine Doppelreihe, deren Summe in den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ oscillirt.

7. Aus dem eben bewiesenen Satze geht aber ohne weiteres der folgende hervor:

Jede **unbedingt** convergente Doppelreihe ist auch **absolut** convergent.

Und es ergiebt sich sodann mit Berücksichtigung von Art. 2:

Ist die Doppelreihe der $u_\mu^{(\nu)}$ **unbedingt** convergent, so convergirt auch jede **Zeile (Colonne),** desgleichen die aus den **Zeilen-Summen (Colonnen-Summen)** gebildete Reihe, und die Summe der letzteren ist gleich der Summe der Doppelreihe, d. h. man hat:

$$(19) \qquad \sum_{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu u_\mu^{(\nu)}.$$

Absolute und unbedingte Convergenz erweisen sich also schliesslich als völlig gleichwerthig.

8. Eine Doppelreihe, welche convergirt, ohne **absolut** zu convergiren, ist also nur **bedingt** convergent: sie kann, wie der Beweis in Art. 6 zeigt, durch blosse Umordnung der Terme stets in eine divergente Doppelreihe verwandelt werden. Zu den nur bedingt convergirenden Doppelreihen gehören z. B. eo ipso alle diejenigen, bei denen irgend eine Zeile oder Colonne divergirt; ferner die in § 3, Art. 4 betrachteten, bei denen die Reihe der Diagonalen divergirt: denn bei einer unbedingt, als absolut convergenten Doppelreihe, muss ja die Reihe der Diagonalen gleichfalls convergiren (s. Art. 2). Andere Beispiele bedingt convergenter Doppelreihen giebt Herr Stolz in dem oben citirten Aufsatze.[1])

Man bemerke, dass auch bei einer nur bedingt convergirenden Doppelreihe, der Ausdruck $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ bei jedem beliebigen simultanen Grenzübergange $\lim \mu = \infty$, $\lim \nu = \infty$ eine einzige bestimmte Zahl vorstellt, und dass dieser Grenzwerth bezw. seine Existenz nur dadurch alterirt werden kann, dass die Terme $a_\mu^{(\nu)}$ von vornherein in eine andere Anordnung gebracht werden.

Es erschien mir nützlich, diesen Punkt nochmals ausdrücklich hervorzuheben, da über den Begriff der bedingten Convergenz einer Doppelreihe noch keineswegs durchweg vollständige Klarheit herrscht.

---

[1]) a. a. O. p. 160. 161.

So kommt z. B. C. Jordan in der neuen Auflage seines Cours d'analyse[1]) auf Grund einer, wie mir scheint, durchaus unzulänglichen Definition der Convergenz einer Doppelreihe zu dem paradoxen Ergebnisse, dass es überhaupt ausschliesslich **absolut** convergente Doppelreihen giebt,[2]) und er erblickt darin einen fundamentalen Unterschied zwischen den einfach- und den mehrfah-unendlichen Reihen.[3])

Auf der anderen Seite hat man den Begriff der bedingten Convergenz und damit überhaupt denjenigen der Convergenz einer Doppelreihe auch häufig zu weit gefasst, indem man eine Doppelreihe schon als (bedingt) convergent bezeichnete, wenn $S_\mu^{(\nu)}$ bei irgend einem speciellen Grenzübergange (etwa für $\mu = \varphi(\varrho)$, $\nu = \psi(\varrho)$ und $\lim\limits_{\varrho=\infty} \varphi(\varrho) = \infty$, $\lim\limits_{\varrho=\infty} \psi(\varrho) = \infty$) einen bestimmten Grenzwerth besitzt.[4]) Diese an und für sich offenbar zulässige Erweiterung des Convergenz-Begriffes einer Doppelreihe erweist sich schon aus dem Grunde als wenig empfehlenswerth, weil bei derselben die Möglichkeit, eine Doppelreihe durch ein einfaches Symbol von der Form $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$ zu bezeichnen, ausgeschlossen erscheint und somit eine der wesentlichsten Analogien zwischen einer Doppelreihe und einer einfachen Reihe verloren gehen würde. Im übrigen handelt es sich in dem angedeuteten Falle lediglich um die Existenz eines **ein**fachen Grenzwerthes von der Form:

---

1) Paris 1893—96.

2) a. a. O. T. I. p. 302.

3) T. II. p. 88. Ueberträgt man die viel zu enge Jordan'sche Definition der Convergenz einer Doppelreihe mutatis mutandis auf einfache Reihen, so gelangt man vielmehr naturgemäss zu dem Schlusse, dass auch eine einfache Reihe nicht anders als absolut convergiren kann!

4) vgl. z. B. Eisenstein, Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen. — Crelle's Journal, Bd. 35, p. 172 ff.

$$\lim_{\varrho=\infty} \sum_0^{\psi(\varrho)} {}^{\nu} \sum_0^{\varphi(\varrho)} {}^{\mu} a_{\mu}^{(\nu)},$$

also schliesslich gar nicht um die Convergenz einer Doppelreihe, sondern nur um diejenige einer aus den Termen $a_{\mu}^{(\nu)}$ in bestimmter Ordnung zu bildenden einfach-unendlichen Reihe.

## § 5. Convergenz- und Divergenz-Kriterien für Doppelreihen mit positiven Gliedern.

1. Nach dem bisher gesagten erfordert die Feststellung der unbedingten Convergenz einer beliebigen Doppelreihe lediglich die Beurtheilung der Convergenz oder Divergenz einer aus lauter Termen $a_{\mu}^{(\nu)} \geqq 0$ gebildeten Doppelreihe. Hierzu könnte man die letztere nach Diagonalen ordnen und auf diese Weise die fragliche Untersuchung auf diejenige der einfach-unendlichen Reihe: $\sum_0^{\infty} {}^{\nu} (a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu-1)} + \ldots + a_{\nu}^{(0)})$ zurückführen (dabei würde es noch freistehen, entweder die Diagonal-Summen $(a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu-1)} + \ldots + a_{\nu}^{(0)})$ oder die einzelnen $a_{\mu}^{(\nu)}$ als Glieder dieser Reihe aufzufassen).

In der Praxis gestaltet sich aber dieses Verfahren nicht nur verhältnissmässig umständlich, sondern es ist zumeist überhaupt nicht möglich, jener Reihe $\sum_0^{\infty} {}^{\nu} (a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu-1)} + \ldots + a_{\nu}^{(0)})$ mit Hülfe der gewöhnlichen Convergenz- und Divergenz-Kriterien beizukommen. Hiernach erscheint es wünschenswerth, Kriterien zu besitzen, welche gestatten, unmittelbar aus der Beschaffenheit der Reihenglieder $a_{\mu}^{(\nu)}$ auf die Convergenz oder Divergenz der Doppelreihe zu schliessen.

Bezeichnet man mit $c_{\mu}^{(\nu)} \geqq 0$ bezw. $d_{\mu}^{(\nu)} \geqq 0$ das allgemeine Glied einer bereits als convergent bezw. divergent erkannten Doppelreihe, so ist leicht zu ersehen, dass eine beliebig vorgelegte Doppelreihe $\sum_{\mu, \nu} a_{\mu}^{(\nu)}$ (wo: $a_{\mu}^{(\nu)} \geqq 0$) allemal

$$(1)\left\{\begin{array}{ll}\text{convergirt, wenn: } a_\mu^{(\nu)} \leqq G\cdot c_\mu^{(\nu)} \\ \text{divergirt, wenn: } a_\mu^{(\nu)} \geqq g\cdot d_\mu^{(\nu)}\end{array}\right\}\text{ für: }\left(\begin{array}{l}\mu \geqq m, \nu = 0,1,2,\ldots \\ \nu \geqq n, \mu = 0,1,2,\ldots\end{array}\right)$$

wo $m$, $n$ irgend zwei feste ganze Zahlen (incl. Null), $g$ und $G$ zwei beliebige positive Zahlen bedeuten. Denn, setzt man:

$$(2)\qquad \sum_0^n{}_\nu \sum_0^m{}_\mu\, a_\mu^{(\nu)} = s_m^{(n)},$$

so ist im ersten Falle:

$$(3a)\qquad s_{m+\varrho}^{(n+\sigma)} - s_m^{(n)} \leqq G\cdot\left\{\sum_0^{n+\sigma}{}_\nu \sum_0^{m+\varrho}{}_\mu\, c_\mu^{(\nu)} - \sum_0^n{}_\nu \sum_0^m{}_\mu\, c_\mu^{(\nu)}\right\},$$

im zweiten:

$$(3b)\qquad s_{m+\varrho}^{(n+\sigma)} - s_m^{(n)} \geqq g\cdot\left\{\sum_0^{n+\sigma}{}_\nu \sum_0^{m+\varrho}{}_\mu\, c_\mu^{(\nu)} - \sum_0^n{}_\nu \sum_0^m{}_\mu\, c_\mu^{(\nu)}\right\},$$

woraus die Richtigkeit der obigen Behauptung ohne weiteres hervorgeht.

2. Es kommt somit lediglich darauf an, die nöthigen $c_\mu^{(\nu)}$ bezw. $d_\mu^{(\nu)}$ zur Verfügung zu haben. Um sich solche in beliebiger Anzahl zu verschaffen, könnte man davon ausgehen, dass sich das allgemeine Glied $u_\mu^{(\nu)}$ jeder beliebigen Doppelreihe in die Form setzen lässt (§ 2, Gl. (8)):

$$(4)\qquad u_\mu^{(\nu)} = (S_\mu^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)}) - (S_{\mu-1}^{(\nu)} - S_{\mu-1}^{(\nu-1)})$$

und dass hierbei die $u_\mu^{(\nu)}$ durchweg positiv ausfallen, wenn:

1) $S_\mu^{(\nu)}$ mit $\mu$, $\nu$ monoton zunimmt;

2) $S_\mu^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)} > S_{\mu-1}^{(\nu)} - S_{\mu-1}^{(\nu-1)}$,

(d. h. es müssen auch die Differenzen $(S_\mu^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)})$ bei wachsenden Werthen von $\mu$ monoton zunehmen).

Wird im übrigen $S_\mu^{(\nu)}$ so angenommen, dass $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ einen bestimmten Werth hat, so ist dann $u_\mu^{(\nu)}$ das allgemeine Glied einer convergenten Doppelreihe, dagegen dasjenige einer divergenten, wenn $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = \infty$.

Da es sich indessen hier nicht darum handelt, die allgemeinsten Formen der aus Ungl. (1) resultirenden Convergenz- und Divergenz-Kriterien aufzustellen, sondern lediglich darum, brauchbare Kriterien von einiger Allgemeinheit zu gewinnen, so erscheint es einfacher, mit Benützung bekannter Sätze aus der Convergenz-Theorie der einfach-unendlichen Reihen einen der folgenden beiden Wege einzuschlagen: nämlich entweder aus einfach-unendlichen Reihen von bekannter Convergenz bezw. Divergenz durch Multiplication Doppelreihen mit gleichfalls unmittelbar zu erkennender Convergenz bezw. Divergenz zu bilden; oder jene einfach-unendlichen Reihen durch passende Methoden in Doppelreihen umzuformen.

3. Die erste der eben angedeuteten Methoden beruht auf der Identität:

$$(5)\qquad \sum_0^m{}_\mu\, b_\mu \cdot \sum_0^n{}_\nu\, b'_\nu = \sum_0^m{}_\nu \sum_0^n{}_\mu\, b_\mu \cdot b'_\nu = \sum_0^{\mu,\nu}{}_{\mu,\nu}\, b_\mu \cdot b'_\nu$$

Versteht man hier unter $b_\mu$, $b'_\nu$ irgend welche positive Zahlen, so hat man also:

$$(6)\qquad \lim_{m=\infty,\, n=\infty} \sum_0^{m,n}{}_{\mu,\nu}\, b_\mu \cdot b'_\nu = \sum_0^\infty{}_\mu\, b_\mu \cdot \sum_0^\infty{}_\nu\, b'_\nu,$$

und daraus folgt, dass die Doppelreihe mit dem allgemeinen Gliede $(b_\mu \cdot b'_\nu)$ convergirt, wenn die Reihen $\sum_0^\infty{}_\mu\, b_\mu$, $\sum_0^\infty{}_\nu\, b'_\nu$ beide convergiren; dass dieselbe dagegen divergirt, wenn mindestens eine jener beiden Reihen divergirt.

Bezeichnet man also mit $c_\nu$ das allgemeine Glied einer convergenten, mit $d_\nu$ dasjenige einer divergenten einfach-unendlichen Reihe (mit positiven Gliedern), so ergiebt sich mit Berücksichtigung von Ungl. (1), dass eine beliebig vorgelegte Doppelreihe $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$ (mit nicht-negativen Gliedern) allemal

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{ll}\text{convergirt, wenn: } a_\mu^{(\nu)} \leqq G \cdot c_\mu \cdot c_\nu & \\ \text{divergirt, wenn: } a_\mu^{\nu} \geqq g \cdot c_\mu \cdot d_\nu \text{ oder: } \geqq g \cdot d_\mu \cdot c_\nu\end{array}\right\}$$

$$\text{für: } \begin{pmatrix}\mu \geqq m, & \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu \geqq n, & \mu = 0, 1, 2, \ldots\end{pmatrix}$$

Oder anders geschrieben, wenn man $c_\mu = C_\mu^{-1}$, $d_\nu = D_\nu^{-1}$ setzt: Die Doppelreihe der $a_\mu^{(\nu)}$

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{ll}\text{convergirt, wenn: } C_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq G & \\ \text{divergirt, wenn: } C_\mu \cdot D_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \geqq g \text{ oder: } D_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \geqq g\end{array}\right\}$$

$$\text{für: } \begin{pmatrix}\mu \geqq m, & \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu \geqq n, & \mu = 0, 1, 2, \ldots\end{pmatrix}$$

Um zunächst das vorstehende Convergenz-Kriterium noch auf eine andere Form zu bringen, zerlegen wir die betreffende Bedingung in die folgenden drei Theil-Bedingungen:

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{lll} C_\mu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq \dfrac{G}{C_\nu} & \text{für: } & \mu \geqq m,\ \nu < n, \\[2ex] C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq \dfrac{G}{C_\mu} & \quad " & \mu < m,\ \nu \geqq n, \\[2ex] C_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq G & \quad " & \mu \geqq m,\ \nu \geqq n. \end{array}\right.$$

Da man hier offenbar $m$, $n$ auch durch jedes beliebige Zahlenpaar $m' > m$, $n' > n$ ersetzen darf, so ziehen diese drei Ungleichungen stets die folgenden nach sich:

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{lll} \text{(a)} & \lim\limits_{\mu=\infty} C_\mu \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty\ ^{1)} & \text{für jedes endliche } \nu, \\ \text{(b)} & \lim\limits_{\nu=\infty} C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty & \text{für jedes endliche } \mu, \\ \text{(c)} & \lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} C_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty. & \end{array}\right.$$

---

[1]) Abgekürzte Schreibweise für:

$$\limsup_{\mu=\infty} C_\mu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq A,$$

wo $A$ eine endliche Zahl bedeutet.

Umgekehrt würde aus diesen letzteren Ungleichungen zunächst folgen, dass:

$$(11) \quad \begin{cases} C_\mu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq g^{(\nu)} \text{ etwa für: } \mu \geqq m_1, \ \nu = 0, 1, 2, \ldots, \\ C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq g_\mu \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \nu \geqq n_1, \ \mu = 0, 1, 2, \ldots, \\ C_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq g \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \mu \geqq m_2, \ \nu \geqq n_2, \end{cases}$$

wo $g^{(\nu)}$, $g_\mu$, $g$ bestimmte positive Zahlen bedeuten. Bezeichnet man nun mit $m$ bezw. $n$ die grössere der beiden Zahlen $m_1$ und $m_2$, bezw. $n_1$ und $n_2$, so folgt a fortiori:

$$(12) \quad \begin{cases} C_\mu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq \dfrac{g^{(\nu)} \cdot C_\nu}{C_\nu} \quad \text{für: } \mu \geqq m, \ \nu < n, \\ C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq \dfrac{g_\mu \cdot C_\mu}{C_\mu} \quad \text{"} \quad \mu < m, \ \nu \geqq n, \\ C_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq g \quad \text{"} \quad \mu \geqq m, \ \nu \geqq n, \end{cases}$$

und diese Ungleichungen gehen unmittelbar in die Bedingungen (9) über, wenn man mit $G$ die grösste der Zahlen $g^{(\nu)} \cdot C_\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots n-1)$, $g_\mu \cdot C_\mu$ $(\mu = 0, 1, \ldots m-1)$ und $g$ bezeichnet.

Hienach erweisen sich auch die Bedingungen (10) als hinreichend für die Convergenz der Doppelreihe $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$. Dieselbe ist also beispielsweise convergent, wenn bei irgend einem positiven Werthe von $\varrho$:

$$(13) \quad \begin{cases} \lim\limits_{\mu=\infty} \mu^{1+\varrho} \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty \text{ für jedes endliche } \nu, \\ \lim\limits_{\nu=\infty} \nu^{1+\varrho} \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty \text{ für jedes endliche } \mu, \\ \lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} (\mu\,\nu)^{1+\varrho} \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty. \end{cases}$$

Beachtet man, dass die Bedingungen (10a) und (10b) offenbar nichts anderes enthalten als die Convergenz jeder einzelnen Zeile und Colonne, und dass andererseits die Convergenz jeder Zeile und Colonne eine nothwendige Bedingung für die Convergenz einer Doppelreihe mit nicht-negativen Gliedern bildet, so kann man dem Kriterium (10) auch die folgende Form geben:

Erfüllt die Doppelreihe $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$ (mit nicht-negativen Termen) die **nothwendige** Convergenz-Bedingung, dass jede einzelne Zeile und Colonne convergirt, so ist für deren Convergenz **hinreichend,** wenn:

$$\lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} C_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty. \tag{14}$$

4. Während die auf diesem Wege gewonnenen Convergenz-Kriterien durch passende Wahl der $C_\mu$ sich beliebig verschärfen lassen und die analoge Leistungsfähigkeit besitzen, wie die entsprechenden Kriterien für einfach-unendliche Reihen, so erweisen sich die aus Ungl. (7) bezw. (8) resultirenden Divergenz-Kriterien bei näherer Betrachtung als völlig unzulänglich. Die zum Vergleiche herangezogenen Doppelreihen:

$$\left\{\begin{array}{ll} \phantom{+}c_0 d_0 + c_1 d_0 + \ldots + c_\mu d_0 + \ldots & \phantom{+}c_0 d_0 + c_0 d_1 + \ldots + c_0 d_\mu + \ldots \\ + c_0 d_1 + c_1 d_1 + \ldots + c_\mu d_1 + \ldots & + c_1 d_0 + c_1 d_1 + \ldots + c_1 d_\mu + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + c_0 d_\nu + c_1 d_\nu + \ldots + c_\mu d_\nu + \ldots & + c_\nu d_0 + c_\nu d_1 + \ldots + c_\nu d_\mu + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{15}$$

besitzen nämlich offenbar die Eigenschaft, dass alle Colonnen **oder** alle Zeilen divergente Reihen bilden.[1]) Nun ist es aber für die Divergenz einer Doppelreihe mit nicht-negativen Termen schon vollständig hinreichend, wenn auch nur eine einzige Zeile oder Colonne divergirt, wenn also:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\mu=\infty} D_\mu \cdot a_\mu^{(\nu)} > 0 \text{ für irgend einen bestimmten Werth } \nu \\ \text{oder:} \\ \lim\limits_{\nu=\infty} D_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} > 0 \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad \mu. \end{array}\right. \tag{16}$$

[1]) Bei einer Doppelreihe mit dem allgemeinen Gliede $d_\mu \cdot d_\nu$ würden sogar alle Zeilen **und** Colonnen divergiren.

Diese Art von Divergenz ist aber im Grunde genommen gar keine Eigenschaft, welche für eine Doppelreihe als solche charakteristisch ist, und zu ihrer etwaigen Feststellung genügen die zur Untersuchung einfach-unendlichen Reihen dienlichen Hülfsmittel.

Der einer Doppelreihe specifisch eigenthümliche Fall von Divergenz tritt vielmehr dann ein, wenn die Doppelreihe divergirt, während alle möglichen Zeilen und Colonnen convergente Reihen bilden. Um sich zunächst von der wirklichen Existenz solcher divergenten Doppelreihen zu überzeugen, betrachte man z. B. die folgende:

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} (d_0-d_1) \quad +(d_1-d_2) \quad +\dots+(d_\mu-d_{\mu+1}) \quad +\dots \\ +(d_1-d_2) \quad +(d_2-d_3) \quad +\dots+(d_{\mu+1}-d_{\mu+2}) \quad +\dots \\ +\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ +(d_\nu-d_{\nu+1})+(d_{\nu+1}-d_{\nu+2})+\dots+(d_{\mu+\nu}-d_{\mu+\nu+1})+\dots \\ +\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

wo $d_\nu \geqq d_{\nu+1}$, $\lim\limits_{\nu=\infty} d_\nu = 0$. Hier besitzen die einzelnen Zeilen und Colonnen der Reihe nach die Summen $d_0, d_1, d_2, \dots$, während die Doppelreihe gleichzeitig mit der Reihe $\sum\limits_0^\infty{}_\nu\, d_\nu$ divergirt.

Alle divergenten Doppelreihen dieser Art werden offenbar durch kein Kriterium von der Form (16) getroffen. Um hier möglicherweise-wirksame Divergenz-Kriterien zu erhalten, ist es vor allem erforderlich, Vergleichs-Doppelreihen herzustellen, welche selbst den fraglichen Divergenz-Charakter besitzen.

5. Solche Vergleichs-Doppelreihen mit übrigens beliebig-langsamer Divergenz könnte man sich offenbar bei passender Wahl der $d_\nu$ auf Grund des Schema's (17) verschaffen. Für den fraglichen Zweck erscheint es indessen noch einfacher, den folgenden Weg vorzuschlagen.

Es bedeute $(b_\nu)$ eine beliebige positive Zahlenfolge, so liefert das Schema:

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} \phantom{+}\ \frac{b_0}{1} + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{3} + \ldots + \frac{b_\mu}{\mu+1} + \ldots \\ + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{3} + \frac{b_3}{4} + \ldots + \frac{b_{\mu+1}}{\mu+2} + \ldots \\ + \frac{b_2}{3} + \frac{b_3}{4} + \frac{b_4}{5} + \ldots + \frac{b_{\mu+2}}{\mu+3} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{b_\nu}{\nu+1} + \frac{b_{\nu+1}}{\nu+2} + \frac{b_{\nu+2}}{\nu+3} + \ldots + \frac{b_{\mu+\nu}}{\mu+\nu+1} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

als Diagonal-Summen der Reihe nach die Zahlen: $b_0, b_1, b_2, \ldots$, so dass also die durch das Schema (18) definirte Doppelreihe gleichzeitig mit der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, b_\nu$ convergirt bezw. divergirt. Anders ausgesprochen:

Von den beiden Doppelreihen: $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} \frac{c_{\mu+\nu}}{\mu+\nu+1}$, $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} \frac{d_{\mu+\nu}}{\mu+\nu+1}$ convergirt die erste gegen die Summe: $\sum_0^\infty{}_\nu\, c_\nu$, während die zweite divergirt.

Dabei wird offenbar in dem zweiten Falle jede einzelne Zeile und Colonne noch convergiren, wenn nur die $d_\nu$ so angenommen werden, dass $\frac{d_\nu}{\nu+1}$ convergirt.

(Beispiel. Man hat für $\varrho > 0$:

$$\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} \frac{1}{(\mu+\nu+1)^{2+\varrho}} = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{(\nu+1)^{1+\varrho}} \text{ (convergent)},$$

während $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} \frac{1}{(\mu+\nu+1)^2}$ divergirt).

6. Das eben gewonnene Resultat könnte selbstverständlich auch zur Bildung neuer Formen von Convergenz-Kriterien dienen. Da dieselben aber, wie leicht erkannt wird, gegenüber den in Art. 3 abgeleiteten keine besondere Vortheile bieten, so mag hier davon abgesehen werden.

Bezüglich der Divergenz bemerke man zunächst, dass offenbar die Doppelreihe mit dem allgemeinen Gliede $\dfrac{d_{\mu+\nu}}{\mu+\nu}$ a fortiori divergirt und dass dieselbe auch nach Weglassung der ersten $n$ Zeilen und $m$ Colonnen divergent bleibt. Denn summirt man das Schema:

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} \quad \dfrac{d_{m+n}}{m+n} + \dfrac{d_{m+n+1}}{m+n+1} + \cdots + \dfrac{d_{m+n+\nu}}{m+n+\nu} + \cdots \\ + \dfrac{d_{m+n+1}}{m+n+1} + \dfrac{d_{m+n+2}}{m+n+2} + \cdots + \dfrac{d_{m+n+\nu+1}}{m+n+\nu+1} + \cdots \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \dfrac{d_{m+n+\nu}}{m+n+\nu} + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

nach Diagonalen, so resultirt die Reihe:

$$(20)\quad \frac{1}{m+n}\cdot d_{m+n} + \frac{2}{m+n+1}\cdot d_{m+n+1} + \ldots + \frac{\nu+1}{m+n+\nu}\cdot d_{m+n+\nu} + \ldots,$$

welche offenbar divergirt, da $\lim\limits_{\nu=\infty} \dfrac{\nu+1}{m+n+\nu} = 1$.

Hieraus folgt aber, dass die Doppelreihe $\sum\limits_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$ sicher divergirt, wenn:

$$(21)\qquad a_\mu^{(\nu)} \geqq g\cdot\frac{d_{\mu+\nu}}{\mu+\nu} \quad \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n,$$

oder, anders geschrieben:

$$(22)\qquad (\mu+\nu)\cdot D_{\mu+\nu}\cdot a_\mu^{(\nu)} \geqq g \quad \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n.$$

(wo $m$, $n$ zwei beliebige positive Zahlen bedeuten). Und diese Bedingung ist sicher erfüllt, wenn:

$$\lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} (\mu+\nu)\cdot D_{\mu+\nu}\cdot a_\mu^{(\nu)} > 0. \tag{23}$$

Man hat also z. B. Divergenz, wenn

$$\left\{\begin{array}{ll} & \lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} (\mu+\nu)^2\cdot a_\mu^{(\nu)} > 0 \\ \text{oder:} & \lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} (\mu+\nu)^2\cdot \lg(\mu+\nu)\cdot a_\mu^{(\nu)} > 0 \quad \text{u. s. f.} \end{array}\right. \tag{24}$$

7. Als Beispiel für die Anwendung der gewonnenen Regeln wollen wir die Doppelreihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{(a\mu^2+2b\mu\nu+c\nu^2)^\sigma} \quad \left(\begin{array}{l}\mu=0,1,2,\ldots, \\ \nu=0,1,2,\ldots,\end{array}\; a_0^{(0)}=0\right) \tag{25}$$

untersuchen, wo $(a\mu^2+2b\mu\nu+c\nu^2)$ eine sog. positive quadratische Form mit negativer Determinante sein soll, d. h. wo:

(26) $a>0$, $c>0$, $b^2-ac=-\Delta<0$ ($b$ beliebig, eventuell auch $=0$).

Da sodann:

$$\begin{aligned} a\mu^2+2b\mu\nu+c\nu^2 &= \frac{1}{a}\left\{(a^2\cdot\mu^2+2ab\cdot\mu\nu+b^2\cdot\nu^2)+(ac-b^2)\nu^2\right\} \\ &= \frac{1}{a}\left\{(a\mu+b\nu)^2+\Delta\cdot\nu^2\right\}, \end{aligned} \tag{27}$$

so fällt dieser Ausdruck nach Ausschluss des einen Werthepaares ($\mu=0$, $\nu=0$) stets wesentlich positiv aus, sodass die betreffende Doppelreihe aus lauter wohl definirten positiven Termen besteht.

Bedeutet nun $A$ eine positive Zahl, die von keiner der drei Zahlen $a$, $|b|$, $c$ überstiegen wird, so ist:

$$a\mu^2+2b\mu\nu+c\nu^2 \leqq A(\mu+\nu)^2 \tag{28}$$

und daher:

$$a_\mu^{(\nu)} \geqq \frac{1}{A}\cdot\frac{1}{(\mu+\nu)^{2\sigma}} \tag{29}$$

und:

$$(30)\qquad (\mu+\nu)^2\cdot a_\mu^{(\nu)} \geqq \frac{1}{\Delta}\cdot(\mu+\nu)^{2(1-\sigma)},$$

woraus sofort die Divergenz der fraglichen Doppelreihe für $\sigma \leqq 1$ hervorgeht (s. Ungl. (24)).

Andererseits hat man neben Gl. (27) die folgende analog gebildete:

$$(31)\qquad a\mu^2+2b\nu\mu+c\nu^2 = \frac{1}{c}\left\{(b\mu+c\nu)^2+\Delta\cdot\mu^2\right\},$$

also:

$$(32)\qquad a\mu^2+2b\mu\nu+c\nu^2 \begin{cases} \geqq \dfrac{\Delta}{a}\cdot\nu^2 \\[2ex] \geqq \dfrac{\Delta}{c}\cdot\mu^2 \end{cases}$$

und daher:

$$(33)\qquad a_\mu^{(\nu)} \begin{cases} \leqq \left(\dfrac{a}{\Delta}\right)^\sigma\cdot\dfrac{1}{\nu^{2\sigma}} & \text{für jedes } \mu \text{ und } \nu\geqq 1, \\[2ex] \leqq \left(\dfrac{c}{\Delta}\right)^\sigma\cdot\dfrac{1}{\mu^{2\sigma}} & \text{für jedes } \nu \text{ und } \mu\geqq 1. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen lehren zunächst, dass jede Zeile und jede Colonne der betrachteten Doppelreihe schon convergirt, wenn nur $\sigma > \frac{1}{2}$.

Schliesst man sodann für den Augenblick die Werthe $\mu = 0$, $\nu = 0$ von der Betrachtung aus, so folgt durch Multiplication der beiden Ungleichungen (33):

$$(34)\qquad a_\mu^{(\nu)} \leqq \left(\frac{\sqrt{ac}}{\Delta}\right)^\sigma\cdot\frac{1}{(\mu\nu)^\sigma}\quad (\mu\geqq 1,\ \nu\geqq 1),$$

und hieraus ergiebt sich nach Ungl. (7) $\left(\text{für: } c_\nu = \dfrac{1}{\nu^\sigma}\right)$ die Convergenz der Doppelreihe $\sum_1^\infty{}_{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$, sobald $\sigma > 1$ ist. Fügt man zu derselben noch die (schon für $\sigma > \frac{1}{2}$) convergente Zeile und Colonne: $\sum_0^\infty{}_\mu\, a_\mu^{(0)}$, $\sum_1^\infty{}_\nu\, a_0^{(\nu)}$, so erkennt man schliesslich, dass die vorgelegte Doppelreihe $\sum\limits_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$ gleichfalls für $\sigma > 1$ convergirt.

8. Statt die Reihen-Glieder $a_\mu^{(\nu)}$ direkt mit denjenigen einer bereits als convergent bezw. divergent erkannten Doppelreihe $\sum c_\mu^{(\nu)}$ bezw. $\sum d_\mu^{(\nu)}$ zu vergleichen, kann man auch, analog wie bei der Kriterien-Bildung für einfach-unendliche Reihen, die Quotienten $\dfrac{a_\mu^{(\nu)}}{a_{\mu+1}^{(\nu)}}$, $\dfrac{a_\mu^{(\nu)}}{a_\mu^{(\nu+1)}}$ mit den entsprechenden Quotienten der $c_\mu^{(\nu)}$ bezw. $d_\mu^{(\nu)}$ vergleichen und auf diese Weise auch Convergenz- und Divergenz-Kriterien zweiter Art herstellen. Dieselben erscheinen jedoch von untergeordneter Wichtigkeit, weshalb hier nicht näher darauf eingegangen werden soll.[1])

[1]) Das einfachste derselben, welches dem Cauchy'schen Fundamental-Kriterium entspricht, findet sich in der oben citirten, soeben publicirten Arbeit von Herrn Biermann: a. a. O. p. 123.

---

In meinem Aufsatze „Ueber die sogenannte Grenze und die Grenzgebiete zwischen Convergenz und Divergenz", welcher im vorigen Bande dieser Sitzungsberichte abgedruckt ist, findet sich die Angabe (a. a. O. p. 605, Fussnote), dass Du Bois Reymond die in Aussicht gestellte genauere Discussion seiner Function $\tau(a)$ meines Wissens nicht geliefert habe. Da ich inzwischen bemerkt habe, dass dies thatsächlich doch der Fall gewesen ist (in dem Aufsatze: Ueber die Paradoxen des Infinitärcalcüls, Math. Ann. XXI p. 158), so werde ich demnächst auf den fraglichen Gegenstand nochmals zurückkommen.