Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XVIII. Jahrgang 1888.

München
Verlag der K. Akademie
1889.

In Commission bei G. Franz.

Sitzung vom 7. Juli 1888.

1. Herr L. SOHNCKE hielt einen Vortrag über „Erweiterung der Theorie von der Krystallstruktur". Der Vortrag wird anderweit veröffentlicht werden.

2. Herr GUST. BAUER spricht über „Flächen 4. Ordnung, deren geometrische Erzeugung sich an 2 Tetraeder knüpft".

Ueber Flächen 4. Ordnung, deren geometrische Erzeugung sich an 2 Tetraeder knüpft.

Von G. Bauer.

(Eingelaufen 8. Oktober.)

1. Es seien im Raume vier Punkte A gegeben, welche ein Tetraeder (A-Tetraeder) bilden. Die Ecken dieses Tetraeders mögen einfach durch 1, 2, 3, 4 bezeichnet sein, die ihnen gegenüberliegenden Seitenflächen des Tetraeders durch I, II, III, IV. Den Punkten A (1, 2, 3, 4) sollen vier Ebenen I′, II′, III′, IV′ entsprechen, welche ein zweites Tetraeder (das C-Tetraeder) bilden, dessen Ecken C den vier Ebenen gegenüberliegend nach der Reihe mit 1′, 2′, 3′, 4′ bezeichnet werden mögen. Wird nun ein Punkt P so bestimmt, dass die vier von ihm ausgehenden Strahlen, welche die Ecken 1, 2, 3, 4 des A-Tetraeders projiciren, die diesen Ecken entsprechenden Ebenen I′, II′, III′, IV′ in Punkten Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 treffen, welche in einer Ebene liegen, so ist

der Ort des Punktes P bei allgemeiner Lage der beiden Tetraeder eine Fläche 4. Ordnung mit 4 Knotenpunkten und 10 Geraden. Je nach der Lage der Tetraeder können neue Knotenpunkte und Gerade auf der Fläche sich bilden, kurz dieselbe kann sich in mannigfachster Weise abändern, sodass eine grosse Reihe von Flächen 4. Ordnung der angegebenen geometrischen Construktion unterliegt. Es ist nicht meine Absicht, hier diese ganze Reihe von Flächen zu untersuchen, sondern ich beabsichtige nur auf einige Fälle hinzuweisen, die auf bekannte Flächen führen und theils hiedurch, theils durch die besondere Lage der zwei Tetraeder zu einander einiges Interesse zu gewähren scheinen.

2. Nehmen wir das C-Tetraeder zum Coordinaten-Tetraeder; seien ferner α_i (i = 1, 2, 3, 4) die Coordinaten der ersten, β_i, die Coordinaten der zweiten, γ_i die der dritten und δ_i die der vierten Ecke des A-Tetraeders, so wie x_i die Coordinaten des Punktes P, so ergibt sich sofort die Gleichung der Fläche F, welche nach obiger Construktion der Ort des Punktes P ist, in der Form

$$F \equiv \begin{vmatrix} 0 & (\alpha_2 x_1) & (\alpha_3 x_1) & (\alpha_4 x_1) \\ (\beta_1 x_2) & 0 & (\beta_3 x_2) & (\beta_4 x_2) \\ (\gamma_1 x_3) & (\gamma_2 x_3) & 0 & (\gamma_4 x_3) \\ (\delta_1 x_4) & (\delta_2 x_4) & (\delta_3 x_4) & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{(I)}$$

wo allgemein $(\lambda_k x_i)$ für $\lambda_k x_i - \lambda_i x_k$ gesetzt ist. In der That sind die Elemente dieser Determinante, welche in einer Horizontalreihe stehen, nichts anderes als die Coordinaten je eines der Punkte Q, in welchen die vom Punkte x nach den Ecken des A-Tetraeders gezogenen Geraden die entsprechenden Seitenflächen des Coordinaten- (oder C-Tetraeders) durchstossen, und die Gleichung (I) drückt aus, dass diese vier Punkte Q in einer Ebene liegen.

Aus der Gleichung (I) ersieht man, dass dieselbe erfüllt wird, wenn der Punkt x in eine Kante des C-Tetraeders fällt, wie auch geometrisch evident ist. Die Fläche F enthält mithin die sechs Kanten des C-Tetraeders und die Ecken desselben sind Knotenpunkte derselben. Von dem A-Tetraeder aber liegen nur die Ecken auf der Fläche (denn die Gleichung (I) wird erfüllt, wenn z. B. α_i statt x_i gesetzt wird), und zwar sind dieselben im allgemeinen einfache Punkte derselben.[1])

3. Eine einfache geometrische Betrachtung zeigt ferner, dass die Fläche ausser den sechs Kanten des C-Tetraeders noch vier Gerade enthält, nämlich die Durchschnitte der Tetraederseiten

$$(\mathrm{I\ I'}),\ (\mathrm{II\ II'}),\ (\mathrm{III\ III'}),\ (\mathrm{IV\ IV'}),$$

so dass die Fläche F im Allgemeinen 4 Knotenpunkte und 10 Gerade enthält. Diese vier letzten Geraden sollen der Kürze halber im folgenden als die Geraden g_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ bezeichnet sein. Dass dieselben auf der Fläche liegen, geht auch aus der Gleichung der Fläche hervor, wenn wir dieselbe entwickeln. Ersetzen wir die Nullen in der Determinante resp. durch $\alpha_1 x_1 - \alpha_1 x_1$, $\beta_2 x_2 - \beta_2 x_2$, u. s. f. und zerlegen dieselbe sodann nach den Summanden der Hori-

1) Es ist leicht die Tangentialebene an einem dieser Punkte, z. B. an der Ecke 1 anzugeben. Die Kanten (12), (13), (14) des A-Tetraeders treffen die Ebenen II′, III′, IV′ des C-Tetraeders in drei Punkten Q_2^1, Q_3^1, Q_4^1 und die Ebene $Q_2^1\, Q_3^1\, Q_4^1$ schneidet die Ebene I′ des C-Tetraeders in einer Geraden m_1. Die Tangentialebene der Fläche an der Ecke 1 des A-Tetraeders geht durch diese Gerade m_1. Denn bewegt sich der Punkt P (x) auf dieser Ebene unendlich nahe an der Ecke 1, so bleiben auch die Punkte Q_2, Q_3, Q_4 unendlich nahe der Ebene $Q_2^1\, Q_3^1\, Q_4^1$ und mithin der Punkt P unendlich nahe der Fläche. Die Gleichung dieser Tangentialebene in der Ecke 1 findet sich demnach leicht in der Form

$$\begin{vmatrix} 0 & (\alpha_2 x_1) & (\alpha_3 x_1) & (\alpha_4 x_1) \\ (\beta_1 \alpha_2) & 0 & (\beta_3 \alpha_2) & (\beta_4 \alpha_2) \\ (\gamma_1 \alpha_3) & (\gamma_2 \alpha_3) & 0 & (\gamma_4 \alpha_3) \\ (\delta_1 \alpha_4) & (\delta_2 \alpha_4) & (\delta_3 \alpha_4) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

zontalreihen, so erhalten wir folgende Gleichung für die Fläche:

$$\alpha_1 x_2 x_3 x_4 (x_1 \beta_2 \gamma_3 \delta_4) + \beta_2 x_1 x_3 x_4 (\alpha_1 x_2 \gamma_3 \delta_4) + \gamma_3 x_1 x_2 x_4 (\alpha_1 \beta_2 x_3 \delta_4)$$
$$+ \delta_4 x_1 x_2 x_3 (\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 x_4) - x_1 x_2 x_3 x_4 (\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \delta_4) = 0, \qquad (I')$$

wo nach bekannter Bezeichnung die Faktoren $(x_1 \beta_2 \gamma_3 \delta_4)$ u. s. w. Determinanten 4. Ordnung bezeichnen. Da $(x_1 \beta_2 \gamma_3 \delta_4) = 0$ die Gleichung der Ebene (234) oder I des A-Tetraeders darstellt und diese Gleichung in Verbindung mit $x_1 = 0$, die Gleichung der Fläche erfüllt, so liegt die Gerade (I I′) auf der Fläche.

4. Die vier Geraden g der Fläche schneiden sich bei allgemeiner Lage der beiden Tetraeder nicht. Sollen sich zwei derselben schneiden, z. B. (I I′) und (II II′), so müssen sich in demselben Punkte auch die Kanten (I II), (I′ II′) der beiden Tetraeder schneiden, und umgekehrt, schneiden sich diese beiden Kanten, so schneiden sich auch die beiden Geraden (I I′), (II II′) in diesem Punkte. Dann wird aber offenbar dieser Schnittpunkt der beiden Kanten Knotenpunkt der Fläche. So oft sich also zwei gleichbezeichnete Kanten der beiden Tetraeder schneiden, erhält die Fläche einen neuen Knotenpunkt, ohne dass desshalb die betreffende Kante des A-Tetraeders auf die Fläche rückt. Nun sind die Bedingungen,

$$\left.\begin{array}{llllll}
\text{dass die Kante (III IV)} & \text{die Kante} & \text{(III′ IV′)} & \text{treffe} & - & (\alpha_3 \beta_4) = 0 \\
\text{(II IV)} & „ & \text{(II′ IV′)} & „ & - & (\alpha_4 \gamma_2) = 0 \\
\text{(II III)} & „ & \text{(II′ III′)} & „ & - & (\alpha_2 \delta_3) = 0 \\
\text{(I IV)} & „ & \text{(I′ IV′)} & „ & - & (\beta_1 \gamma_4) = 0 \\
\text{(I III)} & „ & \text{(I′ III′)} & „ & - & (\beta_3 \delta_1) = 0 \\
\text{(I II)} & „ & \text{(I′ II′)} & „ & - & (\gamma_1 \delta_2) = 0
\end{array}\right\} \text{(a)}$$

wo $(\alpha_3 \beta_4)$, . . die Determinanten $\alpha_3 \beta_4 - \alpha_4 \beta_3$, . . . bezeichnen.

Diese sechs Bedingungsgleichungen sind nicht unabhängig von einander. Sind fünf derselben erfüllt, so ist es auch die sechste; man überzeugt sich davon sofort, wenn man in irgend fünf dieser Gleichungen die zweiten Glieder der Determinanten auf die rechte Seite bringt und sodann die linken Gleichungsseiten wie auch die rechten mit einander multiplicirt. Schneiden sich also fünf Paare dieser Kanten, so schneidet sich auch das sechste Paar. Es können sich demnach 1, 2, 3, 4 oder 6 dieser Kantenpaare schneiden und die erzeugte Fläche F wird dann zwar immer 10 Gerade, aber 5, 6, 7, 8, oder 10 Knotenpunkte besitzen.

5. Wir betrachten spezieller den letzteren Fall, in welchem die Fläche 10 Knoten und 10 Gerade enthält, indem sich die sechs Kantenpaare schneiden. Da in diesem Falle jede der vier Geraden g die andern schneidet, so liegen diese Geraden in einer Ebene und mithin sind die zwei Tetraeder perspektivisch gelegen. Die Ebene der vier Geraden ist die Ebene des perspektivischen Durchschnitts der zwei Tetraeder, die Ebenen I und I', II und II', . . sind homologe Ebenen, die Ecken 1 und 1', 2 und 2', u. s. f. homologe Ecken der zwei Tetraeder. Die durch diese zwei perspektivisch liegenden Tetraeder erzeugte Fläche F ist die Hesse'sche Fläche einer allgemeinen Fläche 3. Ordnung. Das C-Tetraeder und die Ebene der vier Geraden g bilden das Pentaeder der Fläche; von dem A-Tetraeder liegen nur die Ecken auf der Fläche.

Dass die Fläche F in diesem Falle in der That die Hesse'sche Fläche einer Fläche 3. Ordnung ist, lässt sich leicht nachweisen und man kann auch sogleich die Gleichung der Fläche 3. Ordnung aufstellen, von welcher sie die Hesse'sche ist. Denn die Seitenflächen I und I' der zwei Tetraeder schneiden sich auf der Ebene der vier Geraden g. Ist mithin $z = o$ diese Ebene, so muss die Gleichung der Ebene I sich vermöge der Bedingungsgleichungen (a) unter die Form $\mu x_1 + \lambda z = o$ bringen lassen; d. h. $(x_1 \beta_2 \gamma_3 \delta_4) = \mu_1 x_1 + \lambda_1 z$. Aus demselben Grunde muss $(\alpha_1 x_2 \gamma_3 \delta_4) = \mu_2 x_2 + \lambda_2 z$ sein u. s. w., wo die μ und λ leicht zu berechnende Constante bezeichnen. Damit geht aber die Gleichung (I') der Fläche in die bekannte Form

$$\begin{aligned}&\alpha_1\lambda_1 x_2x_3x_4z+\beta_2\lambda_2 x_1x_3x_4z+\gamma_3\lambda_3 x_1x_2x_4z+\delta_4\lambda_4 x_1x_2x_3z\\&-\{(\alpha_1\beta_2\gamma_3\delta_4)-\alpha_1\mu_1-\beta_2\mu_2-\gamma_3\mu_3-\delta_4\mu_4)\}x_1x_2x_3x_4=0\end{aligned} \quad (1)$$

der Hesse'schen Fläche, bezogen auf ihr Pentaeder, über.

Durch die Bedingungsgleichungen (a) sind, wie wir sahen, fünf Coordinaten durch die übrigen bestimmt, so dass die Coordinaten der Eckpunkte eines zum Coordinaten-Tetraeder perspektivisch liegenden Tetraeders allgemein durch das Schema gegeben sind:[1])

$$\left.\begin{array}{cccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dfrac{\alpha_4\beta_3}{\alpha_3}\\ \gamma_1 & \dfrac{\alpha_2\beta_3\gamma_1}{\alpha_3\beta_1} & \gamma_3 & \dfrac{\alpha_4\beta_3\gamma_1}{\alpha_3\beta_1}\\ \delta_1 & \dfrac{\alpha_2\beta_3\delta_1}{\alpha_3\beta_1} & \dfrac{\beta_3\delta_1}{\beta_1} & \delta_4\end{array}\right| \quad (2)$$

Ist nun die Gleichung der Hesse'schen Fläche irgend einer allgemeinen Fläche 3. Ordnung gegeben, und man nimmt vier Pentaederebenen zur Bestimmung des C-Tetraeders, so werden die sieben zur Bestimmung des A-Tetraeders noch übrigen Grössen dazu hinreichen, die Ebene $z = 0$ mit der fünften Pentaederebene und die Coëfficienten der Gleichung (1) mit denen der gegebenen Flächengleichung übereinstimmend zu machen. Man ersieht hieraus, dass jede Hesse'sche Fläche einer Fläche 3. Ordnung ohne besondere Singularitäten auf die angeführte Weise mittelst

---

1) Abgesehen von speziellen Lagen, in welchen die Fläche F entartet, kann hier keine der Coordinaten Null werden und daher auch allenfalls α_1, β_1, γ_1, δ_1 gleich Eins gesetzt werden.

zweier perspektivisch liegender Tetraeder construirt werden kann.[1])

6. Die Gleichung der Fläche F lässt in dem eben behandelten Falle, wenn die zwei Tetraeder perspektivisch liegen, eine bemerkenswerthe Transformation zu. Dividirt man nämlich in der Gleichung (I) die 2., 3., 4. Vertikalreihe der Determinante resp. mit α_2, α_3, α_4 und sodann die 2. Horizontalreihe mit $\frac{\beta_3}{\alpha_3}$, die 3. mit $\frac{\gamma_2}{\alpha_2}$, die 4. mit $\frac{\delta_3}{\alpha_3}$, indem man beachtet, dass vermöge der Bedingungsgleichungen (a) $\frac{\beta_3}{\alpha_3}=\frac{\beta_4}{\alpha_4}$, $\frac{\gamma_2}{\alpha_2}=\frac{\gamma_4}{\alpha_4}$, $\frac{\delta_3}{\alpha_3}=\frac{\delta_2}{\alpha_2}$ ist, so wird die Gleichung von F

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}x_2 & x_1-\frac{\alpha_1}{\alpha_3}x_3 & x_1-\frac{\alpha_1}{\alpha_4}x_4 \\ \frac{\beta_1\alpha_3}{\beta_3}x_2-\frac{\beta_2\alpha_3}{\beta_3}x_1 & 0 & x_2-\frac{\beta_2}{\beta_3}x_3 & x_2-\frac{\beta_2}{\beta_4}x_4 \\ \frac{\gamma_1\alpha_4}{\gamma_4}x_3-\frac{\gamma_3\alpha_4}{\gamma_4}x_1 & x_3-\frac{\gamma_3}{\gamma_2}x_2 & 0 & x_3-\frac{\gamma_3}{\gamma_4}x_0 \\ \frac{\delta_1\alpha_2}{\delta_2}x_4-\frac{\delta_4\alpha_2}{\delta_2}x_1 & x_4-\frac{\delta_4}{\delta_2}x_2 & x_4-\frac{\delta_4}{\delta_3}x_3 & 0 \end{vmatrix}=0$$

Aber nach den Relationen (a) ist

$$\frac{\beta_1\alpha_3}{\beta_3}=\frac{\beta_1\alpha_3\delta_1}{\delta_3\beta_1}=\frac{\alpha_3\delta_1}{\delta_3}=\frac{\alpha_2\delta_1}{\delta_2}=\frac{\alpha_2\gamma_1}{\gamma_2}=\frac{\alpha_4\gamma_1}{\gamma_4};$$

1) Mit Benützung der Coordinaten (2) wird, wenn

$$\varkappa_1=\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1,\ \varkappa_2=\alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3,\ \varkappa_3=\frac{\alpha_3\gamma_3\beta_1}{\gamma_1}-\alpha_3\beta_3,\ \varkappa_4=\frac{\alpha_3\delta_4\beta_1}{\delta_1}-\alpha_4\beta_3,$$

$$z=\frac{x_1}{\varkappa_1}+\frac{x_2}{\varkappa_2}+\frac{x_3}{\varkappa_3}+\frac{x_4}{\varkappa_4},$$

die Gleichung der Fläche (1)

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1\cdot\frac{x_2x_3x_4z}{\varkappa_1}+\frac{\alpha_2\beta_2}{\beta_1}\cdot\frac{x_1x_3x_4z}{\varkappa_2}+\frac{\alpha_3\gamma_3}{\gamma_1}\cdot\frac{x_1x_2x_4z}{\varkappa_3}+\frac{\alpha_4\delta_4}{\delta_1}\cdot\frac{x_1x_2x_3z}{\varkappa_4} \\ -\left(\frac{\alpha_1}{\varkappa_1}+\frac{\alpha_2}{\varkappa_2}+\frac{\alpha_3}{\varkappa_3}+\frac{\alpha_4}{\varkappa_4}\right)\left(\frac{1}{\varkappa_1}+\frac{\beta_2}{\beta_1}\cdot\frac{1}{\varkappa_2}+\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\cdot\frac{1}{\varkappa_3}+\frac{\delta_4}{\delta_1}\cdot\frac{1}{\varkappa_4}\right)x_1x_2x_3x_4=0 \end{array}\right\}(1')$$

mithin sind die Coëfficienten von x_2, x_3, x_4 in der 1. Vertikalreihe gleich. Dividirt man mit diesem Coëfficienten, so werden die Elemente der 1. Vertikalreihe

$$o, \quad x_2 - \frac{\beta_2}{\beta_1} x_1, \quad x_3 - \frac{\gamma_3}{\gamma_1} x_1, \quad x_4 - \frac{\delta_4}{\delta_1} x_1 .$$

Die Gleichung der Fläche nimmt sodann folgende Form an:

$$F = \begin{vmatrix} o & \frac{x_1}{\alpha_1} - \frac{x_2}{\alpha_2} & \frac{x_1}{\alpha_1} - \frac{x_3}{\alpha_3} & \frac{x_1}{\alpha_1} - \frac{x_4}{\alpha_4} \\ \frac{x_2}{\beta_2} - \frac{x_1}{\beta_1} & o & \frac{x_2}{\beta_2} - \frac{x_3}{\beta_3} & \frac{x_2}{\beta_2} - \frac{x_4}{\beta_4} \\ \frac{x_3}{\gamma_3} - \frac{x_1}{\gamma_1} & \frac{x_3}{\gamma_3} - \frac{x_2}{\gamma_2} & o & \frac{x_3}{\gamma_3} - \frac{x_4}{\gamma_4} \\ \frac{x_4}{\delta_4} - \frac{x_1}{\delta_1} & \frac{x_4}{\delta_4} - \frac{x_2}{\delta_2} & \frac{x_4}{\delta_4} - \frac{x_3}{\delta_3} & o \end{vmatrix} = o \qquad (3)$$

oder auch, wenn man die Vertikalreihen und auch die Horizontalreihen nach der Reihe mit x_1, x_2, x_3, x_4 dividirt

$$F = \begin{vmatrix} o & (\alpha_2' x_1') & (\alpha_3' x_1') & (\alpha_4' x_1') \\ (\beta_1' x_2') & o & (\beta_3' x_2') & (\beta_4' x_2') \\ (\gamma_1' x_3') & (\gamma_2' x_3') & o & (\gamma_4' x_3') \\ (\delta_1' x_4') & (\delta_2' x_4') & (\delta_3' x_4') & o \end{vmatrix} = o, \qquad (3')$$

wo α', β', γ', x' für $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{x}$ gesetzt ist. Diese Gleichung hat dieselbe Form, wie die Gleichung (I). Liegen also die beiden Tetraeder perspektivisch, sodass die Fläche F eine Hesse'sche Fläche wird, so wird die Gleichung (I) derselben nicht geändert, wenn man für alle Coordinaten ihre reciproken Werthe setzt, und dasselbe gilt natürlich auch von der entwickelten Gleichungsform (I').

7. Bei der perspektivischen Lage der beiden Tetraeder liegt jede Seitenfläche des einen Tetraeder perspektivisch zu der entsprechenden Seitenfläche des andern Tetraeder und die in diesen entsprechenden Seitenflächen der beiden Tetraeder liegenden Kanten schneiden sich mithin; ebenso liegen auch zwei entsprechende Trieder der beiden Tetraeder perspektivisch und ihre Kanten schneiden sich. Bei der perspektivischen Lage der beiden Tetraeder schneiden also die drei Kanten, welche durch eine Ecke gehen, wieder drei Kanten, welche durch eine Ecke gehen im anderen Tetraeder und drei Kanten in einer Ebene schneiden wieder drei Kanten in einer Ebene des anderen Tetraeders; und umgekehrt schneiden sich die Kanten zweier Tetraeder in dieser Weise, so sind die Tetraeder in perspektivischer Lage und die sechs Schnittpunkte liegen in der Collineationsebene. Es gibt aber noch eine andere, hievon wesentlich verschiedene, Lage zweier Tetraeder, deren Kanten sich schneiden; nämlich die beiden Tetraeder können so liegen, dass drei Kanten durch eine Ecke drei Kanten in einer Ebene und drei Kanten in einer Ebene drei Kanten durch eine Ecke schneiden. Bei dieser Lage sind die Tetraeder nicht perspektivisch gelegen; drei der sechs Schnittpunkte liegen auf einer Ebene des einen Tetraeders, und die drei anderen auf einer Ebene des anderen Tetraeders.

Diese Lage tritt ein, wenn sich folgende Kantenpaare des A-Tetraeders und C-Tetraeders schneiden:

$$\left.\begin{array}{rlll} (\mathrm{III\,IV}),\text{ d. i. }(12) & \text{mit }(\mathrm{I'\,II'}), & \text{Bedingung} & (\alpha_1\beta_2)=o \\ (13) & \;\;\text{„}\;\;(\mathrm{I'\,III'}), & \text{„} & (\alpha_1\gamma_3)=o \\ (14) & \;\;\text{„}\;\;(\mathrm{I'\,IV'}), & \text{„} & (\alpha_1\delta_4)=o \\ (23) & \;\;\text{„}\;\;(\mathrm{II'\,III'}), & \text{„} & (\beta_2\gamma_3)=o \\ (24) & \;\;\text{„}\;\;(\mathrm{II'\,IV'}), & \text{„} & (\beta_2\delta_4)=o \\ (34) & \;\;\text{„}\;\;(\mathrm{III'\,IV'}), & \text{„} & (\gamma_3\delta_4)=o \end{array}\right\}\text{(b)}$$

Die sechs Bedingungsgleichungen sind in diesem Falle unabhängig von einander, so dass wir sechs Coordinaten des A-Tetraeders durch die übrigen darstellen können und erhält man hiedurch folgendes Schema für die Coordinaten der Ecken des A-Tetraeder:

$$\left.\begin{array}{cccc}
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\[1ex]
\beta_1 & \dfrac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1} & \beta_3 & \beta_4 \\[2ex]
\gamma_1 & \dfrac{\alpha_2\alpha_3\beta_1\gamma_1}{\alpha_1^2\beta_3} & \dfrac{\alpha_3\gamma_1}{\alpha_1} & \gamma_4 \\[2ex]
\delta_1 & \dfrac{\alpha_2\alpha_4\beta_1\delta_1}{\alpha_1^2\beta_4} & \dfrac{\alpha_3\alpha_4\gamma_1\delta_1}{\alpha_1^2\gamma_4} & \dfrac{\alpha_4\delta_1}{\alpha_1}
\end{array}\right\} \qquad (4)$$

Man kann daher die Ecke (α) beliebig wählen, die Ecke (β) auf einer bestimmten Ebene, die 3. Ecke (γ) auf einer bestimmten Geraden; dann ist aber auch die 4. Ecke vollkommen bestimmt, wie diess auch die geometrische Betrachtung leicht erkennen lässt.

8. Es ist nun leicht zu sehen, dass, wenn eine der Bedingungen (b) erfüllt ist, z. B. (12) die Kante (I′ II′) schneidet, die Gerade (12) ganz auf der Fläche F liegt. Denn projicirt man den Punkt 1 auf die Ebene I′ und den Punkt 2 auf II′ von irgend einem Punkt P der Geraden (12) aus, so fallen die Projektionspunkte Q_1, Q_2 in dem Schnittpunkt von (12) und (I′ II′) zusammen und folglich liegen die vier Punkte Q in einer Ebene. Sind mithin die Bedingungen (b) für 1, 2, 3, 4 Kanten des A-Tetraeders (von denen nicht drei durch eine Ecke gehen) erfüllt, so rücken diese Kanten auf die Fläche und man kann so Flächen mit 4 Knoten und resp. 11, 12, 13, 14 Gerade erzeugen. Andernfalls werden neue Knotenpunkte hinzutreten. Sind endlich die sechs Bedingungen (b) sämmtlich erfüllt, so enthält die Fläche F ausser dem C-Tetraeder auch das A-Tetraeder vollständig; die Ecken des letzteren werden neue Knotenpunkte derselben und die Fläche F hat also

dann 8 Knoten und 16 Gerade.[1]) Die Gleichung dieser Fläche nimmt, wenn man in (I) die Determinante in den Horizontalreihen mit α_1, β_2, γ_3, δ_4 resp. dividirt und der Kürze halber

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \varkappa_{12}, \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \varkappa_{31}, \quad \frac{\alpha_4}{\alpha_1} = \varkappa_{14}$$
$$\frac{\beta_3}{\beta_2} = \varkappa_{23}, \quad \frac{\beta_4}{\beta_2} = \varkappa_{24}, \quad \frac{\gamma_4}{\gamma_3} = \varkappa_{34}$$

(wobei β_2 und γ_3 aus dem Schema (4) entnommen werden können), ferner

$$\varkappa_{12}x_1 - x_2 = X_{12}, \quad \varkappa_{31}x_3 - x_1 = X_{31}, \quad \varkappa_{14}x_1 - x_4 = X_{14}$$
$$\varkappa_{34}x_3 - x_4 = X_{34}, \quad \varkappa_{24}x_2 - x_4 = X_{24}, \quad \varkappa_{23}x_2 - x_3 = X_{23}$$

setzt, vermöge der Relationen (1) folgende Form an

$$F \equiv \begin{vmatrix} 0 & X_{12} & -\frac{1}{\varkappa_{31}}X_{31} & X_{14} \\ -\frac{1}{\varkappa_{12}}X_{12} & 0 & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & -\frac{1}{\varkappa_{23}}X_{23} & 0 & X_{34} \\ -\frac{1}{\varkappa_{14}}X_{14} & -\frac{1}{\varkappa_{24}}X_{24} & -\frac{1}{\varkappa_{34}}X_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

oder entwickelt, wenn

$$X_{12}X_{34} = Z_1, \quad X_{31}X_{24} = Z_2, \quad X_{14}X_{23} = Z_3,$$

$$\frac{1}{\varkappa_{34}} + \frac{1}{\varkappa_{12}\varkappa_{31}\varkappa_{24}} = \lambda_{12}, \quad \frac{1}{\varkappa_{14}} + \frac{1}{\varkappa_{12}\varkappa_{23}\varkappa_{34}} = \lambda_{13}, \quad \frac{1}{\varkappa_{24}} + \frac{1}{\varkappa_{31}\varkappa_{14}\varkappa_{23}} = \lambda_{23},$$

---

1) Man bemerke, dass sich diese Fläche wesentlich unterscheidet von der in Nr. 4 erwähnten Fläche mit 8 Knoten, nicht nur durch die Anzahl der Geraden, sondern auch durch die Lage der Knoten, da bei letzterer Fläche alle Knoten auf den Kanten des C-Tetraeders liegen.

$$F = \frac{1}{\varkappa_{12}\varkappa_{34}} Z_1^2 + \frac{1}{\varkappa_{31}\varkappa_{24}} Z_2^2 + \frac{1}{\varkappa_{14}\varkappa_{23}} Z_3^2 \\ + \lambda_{12} Z_1 Z_2 + \lambda_{13} Z_1 Z_3 + \lambda_{23} Z_2 Z_3 = 0. \tag{5'}$$

Die Fläche ist mithin ein spezieller Fall einer Fläche 4. Ordnung, deren Gleichung aus den Gleichungen dreier Flächen 2. Ordnung quadratisch zusammengesetzt ist und welche demnach die 8 Schnittpunkte der drei Flächen 2. Ordnung zu Doppelpunkten hat.[1]) Diese Flächen 2. Ordnung zerfallen in unserem Falle in Ebenenpaare.

9. Indem wir nun einzelne Kantenpaare der beiden Tetraeder den Bedingungen (b) Nr. 7, andere den Bedingungen (a) Nr. 4, welche bei der perspektivischen Lage der beiden Tetraeder gelten, unterwerfen, können wir eine grosse Reihe verschiedener Flächen 4. Ordnung erhalten, indem dadurch theils einzelne Kanten des A-Tetraeder auf die Fläche fallen, andererseits neue Doppelpunkte auf derselben entstehen. Jedoch ist hiebei wohl darauf zu sehen, dass die Bedingungen auch verträglich seien. Hier gilt nun folgender Satz: „Sind 1, 2, 3, 4 die Ecken eines unebenen Vierecks und I′ II′ III′ IV′ die Ebenen eines zweiten unebenen Vierecks und es schneiden die Seiten (12), (23), (34), (41) die aufeinander folgenden Seiten (I′ II′), (II′ III′), . . des anderen, so kann zwar die Diagonale (13) des ersten Vierecks die Diagonale (I′ III′) des zweiten Vierecks schneiden oder die Diagonale (24) kann (II′ IV′) schneiden, oder es kann beides zusammen eintreffen; schneidet aber die Diagonale (13) die Diagonale (II′ IV′), so schneiden sich auch nothwendig die Diagonalen (24) und (I′ III′) der beiden Vierecke.“ Der erste Theil dieses Satzes folgt aus der schon erwähnten Unabhängigkeit der Bedingungen (b), der zweite Theil folgt daraus, dass aus den Gleichungen

1) Cayley „On Quartic Surfaces“. Proc. of the London Math. Soc. Vol. III. p. 19.

$$\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1$$
$$\beta_3\gamma_2 = \gamma_3\beta_2$$
$$\gamma_3\delta_4 = \gamma_4\delta_3$$
$$\alpha_4\delta_1 = \alpha_1\delta_4$$

sofort folgt $\alpha_4\gamma_2\cdot\beta_3\delta_1 = \alpha_2\gamma_4\cdot\beta_1\delta_3$, sodass, wenn $\alpha_4\gamma_2 = \alpha_2\gamma_4$, auch $\beta_3\delta_1 = \beta_1\delta_3$ ist. Dies sind aber (Nr. 4) die Bedingungen, dass (13) und (II' IV'), (24) und (I' III') sich schneiden.

10. Nichts hindert ferner, dass eine oder mehrere Kanten des A-Tetraeders je zwei gegenüberliegende Kanten des C-Tetraeders schneidet, wobei die betreffende Kante des A-Tetraeders zugleich auf die Fläche rückt und einen Knotenpunkt auf derselben veranlasst. Wir können hiedurch die zwei Tetraeder noch in nähere Verbindung bringen, als in den zwei schon betrachteten Fällen, in welchen jede Kante des einen Tetraeders je eine des anderen schneidet. Gehen wir von dem zweiten Falle aus, in welchem die sechs Bedingungen (b) des Nr. 7 gelten, und die zwei Tetraeder ganz auf der Fläche liegen. Es folgt dann sofort aus dem Satze im vorigen Nr., dass wenn eine der Kanten des A-Tetraeders zwei gegenüberliegende Seiten des C-Tetraeders schneidet, dies auch für die gegenüberliegende Kante des A-Tetraeders eintritt. Es tritt mithin hiedurch immer ein Paar von neuen Knotenpunkten auf der Fläche auf.

Nehmen wir z. B. an die Kante (12) schneide nicht nur die Kante (I' II'), sondern zugleich (III' IV') des C-Tetraeders, so kommt die Bedingung $(\alpha_3\beta_4) = o$ hinzu; hiedurch ist $\beta_4 = \frac{\alpha_4\beta_3}{\alpha_3}$ in dem System (4) Nr. 7 der Coordinaten der Ecken des A-Tetraeders zu setzen, und man ersieht, dass dann zugleich $\gamma_1\delta_2 = \gamma_2\delta_1$ wird, also zugleich auch (34) dieselben gegenüberliegenden Kanten (III' IV') und (I' II') schneidet. Die Fläche F hat dann 10 Knotenpunkte und 16 Gerade; indem die zwei Knotenpunkte (12, III' IV') und

(34, I′ II′) hinzugekommen; die Lage der 10 Knotenpunkte ist jedoch ganz wesentlich verschieden von der Lage der 10 Knoten der Hesse'schen Fläche (Nr. 5), bei welcher fünfmal je 6 Knoten in einer Ebene liegen.

Kommt zu den vorigen Bedingungen noch die Bedingung $(\beta_1 \delta_3) = o$ hinzu, so folgt aus den Coordinaten (4) der Ecken des A-Tetraeders

$$\beta_1 \cdot \frac{\alpha_3 \alpha_4 \gamma_1 \delta_1}{\alpha_1^2 \gamma_4} = \beta_3 \delta_1 .$$

Diese Bedingung ist identisch mit $(\alpha_2 \gamma_4) = o$; es schneiden dann auch die Kanten (24) und (13) die beiden gegenüberliegenden Kanten (I′ III′) und (II′ IV′) des C-Tetraeder. Die Fläche F hat 12 Doppelpunkte und 16 Gerade. Je zwei gegenüberliegende Kanten des einen und des anderen Tetraeders, nämlich (14), (23) und (I′ IV′), (II′ III′), tragen je zwei Knotenpunkte, die übrigen Kanten je drei. Die Coordinaten der Ecken des A-Tetraeders werden nun

$$\left.\begin{array}{cccc}
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\[1ex]
\beta_1 & \dfrac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1} & \beta_3 & \dfrac{\alpha_4 \beta_3}{\alpha_3} \\[2ex]
\gamma_1 & \dfrac{\alpha_2 \alpha_3 \beta_1 \gamma_1}{\alpha_1^2 \beta_3} & \dfrac{\alpha_3 \gamma_1}{\alpha_1} & \dfrac{\alpha_3 \alpha_4 \beta_1 \gamma_1}{\alpha_1^2 \beta_3} \\[2ex]
\delta_1 & \dfrac{\alpha_2 \alpha_3 \beta_1 \delta_1}{\alpha_1^2 \beta_3} & \dfrac{\beta_3 \delta_1}{\beta_1} & \dfrac{\alpha_4 \delta_1}{\alpha_1}
\end{array}\right\} \quad . \qquad (6)$$

11. Kommt endlich noch die Bedingung hinzu, dass die Kante (14) auch (II′ III′) schneide, so wird $(\alpha_2 \delta_3) = o$. Diese Bedingung in das vorige System (6) der Coordinaten eingeführt, liefert die Gleichung

$$\frac{\alpha_3^2}{\beta_3^2} = \frac{\alpha_1^2}{\beta_1^2}$$

und damit wird dann auch die Bedingung $(\beta_1 \gamma_4) = o$ erfüllt, d. h. die Gerade (23) schneidet auch (I′ IV′). Führt man nun in obiges Schema für $\frac{\alpha_3}{\beta_3}$ den Werth $-\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ ein (für $\frac{\alpha_3}{\beta_3} = +\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, würden die vier Punkte 1, 2, 3, 4 zusammenfallen), so ergeben sich für die Ecken des A-Tetraeders bei dieser engsten Verbindung der beiden Tetraeder die Coordinaten

$$\left.\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1} & -\frac{\alpha_3\beta_1}{\alpha_1} & -\frac{\alpha_4\beta_1}{\alpha_1} \\ \gamma_1 & -\frac{\alpha_2\gamma_1}{\alpha_1} & \frac{\alpha_3\gamma_1}{\alpha_1} & -\frac{\alpha_4\gamma_1}{\alpha_1} \\ \delta_1 & -\frac{\alpha_2\delta_1}{\alpha_1} & -\frac{\alpha_3\delta_1}{\alpha_1} & \frac{\alpha_4\delta_1}{\alpha_1} \end{array}\right\} \qquad (7)$$

oder auch

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 & -\alpha_4 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \alpha_4 \end{array}$$

Man sieht, dass in diesem Falle die besondere Lage der beiden Tetraeder eintritt, welche man auch die „desmische“ benannt hat, und dass diese Lage eben dadurch bedingt ist, dass jede Kante des einen Tetraeders je zwei gegenüberliegende des andern schneidet. Es sind in diesem Falle die zwölf Bedingungen (a) Nr. 4 und (b) Nr. 7 erfüllt; gleichwohl ist, wenn die Lage des einen Tetraeders gegeben ist, die Lage des anderen Tetraeders noch in soweit willkürlich als ein Eckpunkt beliebig gewählt werden kann; die anderen sind dann vollkommen bestimmt. Diess hat eben darin seinen Grund, dass, wie wir (Nr. 9) sahen, wenn die sechs Bedingungen (b) erfüllt sind und noch drei der Bedingungen (a) auch die übrigen erfüllt sind, sodass wenn das C-Tetraeder gegeben ist, die Coordinaten der Ecken des A-Tetraeders nur 9 Bedingungen zu erfüllen haben, damit die desmische Lage der zwei Tetraeder eintrete.

Wir gelangen zu demselben Resultat, wenn wir von der perspektivischen Lage der zwei Tetraeder ausgehend, die Anzahl der Bedingungen aufsuchen, die nöthig sind, damit die desmische Lage eintrete. Man beweist nämlich leicht den Satz: „Wenn von 4 Kanten des einen Tetraeders, die ein unebenes Viereck bilden, z. B. (12), (34), (13), (24), drei je zwei gegenüberliegende Seiten des anderen Tetraeders schneiden, so wird auch die vierte Kante (24), wenn sie eine Kante (I′ III′) schneidet, auch die gegenüberliegende (II′ IV′) schneiden und umgekehrt." Es folgt daraus auch: „Wenn die zwei Tetraeder perspektivisch liegen und drei Kanten durch einen Punkt (oder in einer Ebene) und noch eine vierte Kante des einen Tetraeders schneiden auch noch die gegenüberliegenden Seiten des anderen Tetraeders, so findet dasselbe auch für die zwei übrigen Kanten statt." Es müssen mithin noch vier Bedingungen zu den Bedingungen (a) Nr. 4, welche, wie wir sahen, nur für fünf Bedingungen zählen, hinzutreten, um die desmische Lage der Tetraeder hervorzubringen.

12. Die Fläche, welche durch die zwei Tetraeder, wenn sie in desmischer Lage sich befinden, erzeugt wird, hat 14 Knotenpunkte und 16 Gerade. Sie ist, wie sogleich ersichtlich, die Hesse'sche Fläche einer Fläche 3. Ordnung mit vier Knotenpunkten. Das A-Tetraeder bildet das Knotentetraeder der Fläche 3. Ordnung, das C-Tetraeder in Verbindung mit der Ebene des perspektivischen Durchschnitts, d. i. der vier Geraden g, das Pentaeder der Hesse'schen Fläche.

Die Fläche gehört aber auch zu den in Nr. 8 behandelten Flächen; daher kommt es, dass ihre Gleichung, wie bekannt, sowohl in der Form (1) Nr. 5 als auch in der Form (5)

Nr. 8 geschrieben werden kann. Nehmen wir z. B. für die Coordinaten der Ecken des A-Tetraeders (Nr. 11)

$$\begin{array}{rrrr} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

so ergibt sich für die Gleichung der Fläche, als Hesse'sche Fläche (1) Nr. 5

$$x_2 x_3 x_4 z + x_1 x_3 x_4 z + x_1 x_2 x_4 z + x_1 x_2 x_3 z - 4 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0,$$

wo

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4;$$

während sich nach (5) Nr. 8 die Gleichung der Fläche in der Form ergibt

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - 2 Z_1 Z_2 - 2 Z_1 Z_3 - 2 Z_2 Z_3 = 0$$

oder auch

$$\sqrt{Z_1} + \sqrt{Z_2} + \sqrt{Z_3} = 0,$$

wo

$$Z_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4), \quad Z_2 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4), \quad Z_3 = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3).$$

13. Da die beiden Tetraeder mit ihrem perspektivischen Durchschnitt die Fläche F vollkommen bestimmen, so ersieht man, dass, wenn bei der geometrischen Construktion der Fläche die beiden Tetraeder ihre Rolle vertauschen, die Fläche ungeändert bleibt, aber sie ist dann die Hesse'sche Fläche einer anderen Fläche 3. Ordnung, für welche das C-Tetraeder das Tetraeder der Knotenpunkte ist, während das A-Tetraeder nun zum Pentaeder der Hesse'schen Fläche gehört. Die Hesse'sche Fläche einer Fläche 3. Ordnung mit vier Knotenpunkten ist also zugleich Hesse'sche Fläche von zwei solchen Flächen 3. Ordnung.[1]) Diese beiden Flächen 3. Ordnung

1) Dies hat schon Eckardt (Math. Ann. V. S. 41), aus der analytischen Form, in welche er die Gleichung einer solchen Hesse'schen Form gebracht, geschlossen.

haben ihre drei unären Geraden gemeinsam, nämlich die drei Diagonalen des perspektivischen Durchschnitts der zwei Tetraeder, oder also des Vierseits gebildet aus den vier Geraden g.

Wenn nun zwei Tetraeder A und C sich in desmischer Lage befinden, so haben sie, wie bekannt, die merkwürdige Eigenschaft, dass sie in vierfacher Weise perspektivisch liegen. Die vier Centren und die vier zugehörigen Collineationsebenen bilden die Ecken und Seitenflächen eines dritten Tetraeders (es mag das B-Tetraeder heissen), welches mit den beiden Tetraedern A und C im Bunde ist und zu jedem derselben in derselben Weise liegt, wie die beiden ersten zu einander.

Diesen vier perspektivischen Beziehungen entsprechend erhalten wir also bei desmischer Lage der zwei Tetraeder A und C vier solche Flächen 4. Ordnung mit 14 Knotenpunkten, die alle die zwei Tetraeder A und C ganz enthalten, während bei dem Uebergang von der ursprünglichen perspektivischen Beziehung zu einer der drei anderen sich die Ebene des perspektivischen Durchschnitts um je eine der Diagonalen dieses Durchschnitts dreht und eine andere Seite des B-Tetraeders bildet. Zu diesen vier Hesse'schen Flächen gehören sodann acht Flächen 3. Ordnung, von welchen vier das A-Tetraeder, vier das C-Tetraeder zum Knotentetraeder haben und deren unäre Geraden die Kanten des B-Tetraeders bilden, indem die drei in einer Seitenfläche liegenden Kanten als unäre Geraden zu je zweien dieser Flächen 3. Ordnung gehören.