Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XVIII. Jahrgang 1888.

München
Verlag der K. Akademie
1889.

In Commission bei G. Franz.

Ueber die Verteilung der Biegungselasticität in dreifach symmetrischen Krystallen.

Von S. Finsterwalder.

(Mit Tafel II.)

(Eingelaufen 5. Mai.)

Die Abhängigkeit des für die Biegung oder Dehnung eines dünnen Stäbchens aus Krystallsubstanz massgebenden Elasticitätscoëfficienten von der Orientierung der Längsdimension desselben in Bezug auf die Axen des Krystalles hat Herr W. Voigt durch eine allgemeine Formel ausgedrückt[1]). Gehört der Krystall einem dreifach symmetrischen Systeme an, so gilt nachstehende vereinfachte Beziehung zwischen dem Elasticitätscoefficienten ϱ und den Richtungscosinus α, β, γ, welche die Lage der Längsdimension des Stäbchens zu dem (in diesem Falle rechtwinkeligen) Axensystem bestimmen:

$$\varrho = a_{11}\,\alpha^4 + a_{22}\,\beta^4 + a_{33}\,\gamma^4 + 2\,(a_{12}\,\alpha\beta + a_{13}\,\alpha\gamma + a_{23}\,\beta\gamma) \quad 1)$$

Hiebei stellen die Coefficienten $a_{11}\,\ldots\,a_{23}$ gewisse Aggregate der 9 Elasticitätsconstanten solcher Systeme dar.

Die in dieser Relation enthaltene Abhängigkeit lässt sich auf einfache Weise durch eine Fläche F veranschaulichen, die dadurch definiert ist, dass man in obiger Gleichung (1) ϱ, α, β, γ als räumliche Polarcoordinaten deutet.

1) Wiedemanns Annalen Bd. 16. pg. 404.

α, β, γ erfüllen natürlich immer die Bedingung:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

In den folgenden Zeilen soll versucht werden, auf geometrischem Wege durch Abbildung der Fläche in eine Ebene die Verteilung der grössten und kleinsten Werte des Elasticitätscoefficienten übersichtlich darzustellen.

Schreiben wir zunächst die Gleichung (1) vermöge der Substitutionen: $x = \varrho \cdot \alpha$, $y = \varrho \cdot \beta$, $z = \varrho \cdot \gamma$ in rechtwinklige Coordinaten um, so lautet sie:

$$\varrho^5 = a_{11}\, x^4 + a_{22}\, y^4 + a_{33}\, z^4 + 2\,(a_{12}\, xy + a_{13}\, xz + a_{23}\, yz) \quad 2)$$

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad 3)$$

Um zur Kenntnis der **Maxima** und **Minima** des Radiusvectors ϱ der Fläche zu gelangen, denken wir uns dieselbe durch eine Schar concentrischer Kugeln mit dem Ursprung als Mittelpunkt geschnitten. Man kann sich die Fläche dann auch erzeugt denken durch die Schnitte der vermöge des Parameters ϱ zusammengehörigen Flächen 2) und Kugeln 3). Jedem Werte von ϱ entspricht eine sphärische Curve auf der Fläche und alle diese Curven wollen wir vom Ursprung aus auf eine Kugel S vom Radius 1 projicieren. Das so auf der Kugel S erhaltene Curvensystem ist dann für die Verteilung der gesuchten Maxima und Minima in der Art massgebend, dass jedem Doppelpunkt mit conjugiert-imaginären Zweigen, eines von beiden entspricht, jedem gewöhnlichen Knotenpunkt dagegen ein intermediärer Wert, der gleichzeitig den Uebergang zwischen zwei Maxima und zwei Minima vermittelt.

Zur bequemen Discussion des Curvensystemes denken wir uns zunächst den Raum der x, y, z dadurch in einen zweiten der X, Y, Z abgebildet, dass wir $x^2 = X$, $y^2 = Y$, $z^2 = Z$ setzen. Hiebei gehen die concentrischen Kugeln:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2 \quad \ldots \quad 3)$$

in die Parallelebenen: $X + Y + Z = \varrho^2 \quad \ldots \quad 4)$ über.

Die Flächen (2) bilden sich in folgendes System von Flächen 2. Ordnung ab:

$$a_{11}X^2+a_{22}Y^2+a_{33}Z^2+2(a_{12}XY+a_{13}XZ+a_{23}YZ)=\varrho^5 \quad 5)$$

Letztere haben alle den gemeinsamen Asymptotenkegel:

$$a_{11}X^2+a_{22}Y^2+a_{33}Z^2+2(a_{12}XY+a_{13}XZ+a_{23}YZ)=0 \quad 6)$$

Sie sind daher einander ähnlich und liegen ähnlich und ihre Schnitte mit den Parallelebenen (4) geben Curven 2. Ordnung von derselben Eigenschaft.

Da durch die Transformation: $x^2=X$, $y^2=Y$, $z^2=Z$ die Eigenschaft der Punkte, auf Geraden durch den Ursprung zu liegen nicht geändert wird, so kann man das Bild der Curvenschar der Kugel S einfach erhalten, indem man die ähnlichen Kegelschnitte der Ebenen (4) vom Ursprung aus auf die Ebene $P: X+Y+Z=1$, das Bild von S, projiciert. Da ferner die Mittelpunkte aller Kegelschnitte auf einer Geraden durch den Ursprung (der conjugierten zur Schnittlinie der Ebenen (4) in Bezug auf die Flächen (5)) liegen, so werden ihre Projectionen auf P ein gemeinsames Centrum haben und, da sie ausserdem bei der Projection ähnlich und in ähnlicher Lage bleiben, wird das System der Kegelschnitte, welches das Bild der Curvenschar auf der Kugel S darstellt, ein solches mit gemeinsamen (reellen oder imaginären) Asymptoten.

Die Fläche F lässt sich demnach auf die Ebene P so abbilden, dass ihren Schnitten mit concentrischen Kugeln um den Ursprung ein System von Kegelschnitten mit gemeinsamen Asymptoten entspricht.

Diese Abbildung ist keineswegs eindeutig; es wird vielmehr der reelle Teil der Kugel S und, da die Fläche F eindeutig auf die Kugel bezogen ist, auch der reelle Teil der Fläche auf das Dreieck der Ebene P, das von den drei Coordinatenebenen begrenzt wird, derart bezogen, dass einem

Punkt innerhalb des Dreieckes 8 symmetrisch auf die Oktanten der Kugel S oder der Fläche F verteilte Punkte entsprechen. Für Punkte von P ausserhalb des Dreieckes existieren nur imaginäre zugehörige Punkte von S uud F. Den Seiten des Dreieckes entsprechen die durch die Coordinatenebenen ausgeschnittenen grössten Kreise auf der Kugel.

Mit Ausnahme der Seiten und Ecken des Dreieckes ist die Abbildung stetig; wie sie sich in der Nähe derselben verhält, lässt sich unschwer zeigen.

Einer Geraden der Ebene P, die durch die Gleichung $aX + bY + cZ = 0$ bestimmt ist, entspricht auf der Kugel der sphärische Kegelschnitt, den der Kegel

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \text{ ausschneidet.}$$

Während die Gerade die Seiten des Dreieckes unter beliebigen Winkeln schneidet. durchsetzt der sphärische Kegelschnitt die drei entsprechenden Kreise der Kugel (seine Hauptschnitte) stets unter rechtem Winkel. Ein Büschel von Geraden, das sein Centrum auf dem Dreiecksumfange liegen hat, bildet sich demnach in ein Büschel von Kegelschnitten ab, die sich in den Endpunkten einer Axe berühren. Was über das Verhalten des Bildes einer Geraden in der Nähe einer Dreiecksseite ausgesagt wurde, lässt sich im Allgemeinen auf eine beliebige Curve übertragen, welche die Gerade in ihrem Schnittpunkt mit der Dreieckseite berührt. Durch die Abbildung werden also Winkel, welche Curven mit einer Seite des Dreieckes der Ebene P einschliessen, stets in rechte Winkel auf der Kugel S verwandelt[1]). Dieser Satz erleidet eine Ausnahme, wenn der erstgenannte Winkel gleich 0 ist, d. h. die Curve eine Seite des Dreiecks berührt. Was in diesem Falle geschieht, lässt sich wieder an einem speciellen Beispiel einsehen. Wie vorhin an Stelle der Curve die berührende

1) Vergl. Fig. I u. II.

Gerade substituiert wurde, können wir nun irgend einen, die Curve in Berührpunkt osculierenden Kegelschnitt betrachten, dem wir noch die Bedingung auferlegen wollen, dass er die beiden anderen Seiten des Dreieckes berühre. Ein solcher berührt dann alle drei Seiten des Dreieckes und wird durch eine Gleichung von folgender Form ausgedrückt:

$$a^2 X^2 + b^2 Y^2 + c^2 Z^2 - 2\,(ab\,XY + ac\,XZ + bc\,YZ) = 0 \qquad 7)$$

Das entsprechende Gebilde auf der Kugel hat zur Gleichung:

$$a^2 x^4 + b^2 y^4 + c^2 z^4 - 2\,(ab\,x^2 y^2 + ac\,x^2 z^2 + bc\,y^2 z^2) = 0 \qquad 8)$$

oder:

$$((x\sqrt{a} + y\sqrt{b} + z\sqrt{c})\,(x\sqrt{a} - y\sqrt{b} - z\sqrt{c}) \cdot$$
$$(-x\sqrt{a} + y\sqrt{b} - z\sqrt{z})\,(-x\sqrt{a} - y\sqrt{b} + z\sqrt{c}) = 0 \qquad 9)$$

Es sind das 4 grösste Kreise auf der Kugel, von denen je 3 in jedem Octanten ein Dreieck einschliessen, dessen Ecken den Berührpunkten des Kegelschnitts mit den Seiten des Dreieckes der Ebene P entsprechen. Daher: *Berührt eine Curve der Ebene P eine Seite des Dreiecks, so hat die entsprechende Curve auf der Kugel einen Doppelpunkt*[1]. Der Doppelpunkt hat *reelle Zweige*, wenn die Curve von *innen* (im Sinne des Dreieckes) berührt, und ist *isoliert*, wenn die Berührung von *aussen* stattfindet.

Geht endlich die Curve in der Ebene P durch eine Ecke des Dreieckes, verhält sie sich also in der Nähe wie die Gerade $aX + bY = 0$, so *entspricht ihr auf der Kugel S eine Curve $ax^2 + by^2 = 0$ mit Doppelpunkt*, der wieder *reelle* Tangenten hat, falls die erste Curve durch den eigentlichen Winkel des Dreieckes geht, aber *isoliert* ist, wenn dieselbe im Aussenwinkel des Dreieckes verläuft.

---

1) Vergl. Fig. IV u. V.

Da die Abbildung ausserhalb des Dreiecksumfanges unverzweigt ist, so werden allen Doppelpunkten des Curvensystemes der Ebene auch Doppelpunkte des Curvensystemes auf der Kugel entsprechen. Es kommen aber auf der Kugel solche neu hinzu, so oft eine Curve der Ebene eine Seite des Dreieckes berührt oder durch eine Ecke desselben geht.

Das Curvensystem der Ebene P, das wir zu betrachten haben, besteht aus Kegelschnitten mit gemeinsamen Asymptoten und hat also nur einen Doppelpunkt, den Schnitt der beiden Asymptoten. Ihm entsprechen 8 symmetrisch auf die Kugeloctanten verteilte Doppelpunkte der Curvenschar auf S. Jede Seite des Dreieckes wird von einer Curve des Systemes berührt; durch jede Ecke desselben geht eine solche. Den 3 Berührpunkten gehören 12 Doppelpunkte auf den 3 grössten Kreisen der Kugel, in welche sich die Seiten des Dreieckes abbilden, zu, den 3 Eckpunkten 6 Doppelpunkte in den Schnittpunkten dieser grössten Kreise. Wie viele von den 26 Doppelpunkten imaginär oder reell und von den letzteren wieder Knotenpunkte und isolierte Punkte sind, lässt sich durch Discussion der Lage des durch seine Asymptoten bestimmten Kegelschnittsystems gegen das Dreieck leicht entscheiden. Ohne alle möglichen Fälle, die bei verschiedener Wahl der Coefffcienten $a_{11} \ldots a_{23}$ eintreten und auf die Combination eines reellen oder conjugiert-imaginären Linienpaares mit einem gleichseitigen Dreieck hinauskommen, aufzählen zu wollen, beschränken wir uns hier auf die kurze Charakterisierung der vier dreifach-symmetrischen Krystallsysteme und die Besprechung zweier in der Natur vorkommenden Beispiele.

A. Rhombisches System. Für dasselbe gilt die ganz allgemeine Formel (1) ohne weitere Beziehung zwischen den Coefficienten. Zur Exemplificierung diene die dem Baryt entsprechende, für welche Herr W. Voigt[1]) die Constanten

1) W. Voigt: Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Baryt und Topas. Göttinger Nachrichten 1887. pg. 624.

durch sorgfältige und umfassende Versuche bestimmt hat. Sie lautet demnach:

$$\varrho = [16{,}13\,\alpha^4 + 18{,}51\,\beta^4 + 10{,}42\,\gamma^4 + 2\,(8{,}88\,\alpha^2\,\beta^2 + \\ + 15{,}21\,\alpha^2\,\gamma^2 + 38{,}79\,\beta^2\,\gamma^2)] \cdot 10^{-8}$$

Das zu untersuchende Kegelschnittsystem hat die folgende Gleichungen:

$$16{,}13\,X^2 + 18{,}51\,Y^2 + 10{,}42\,Z^2 + 2\,[8{,}88\,XY + \\ + 15{,}21\,XZ + 38{,}79\,YZ] = \varrho;\ X + Y + Z = 1$$

Der Mittelpunkt desselben hat die Coordinaten: $X = 0{,}7388$, $Y = 0{,}0557$, $Z = 0{,}2054$ entsprechend den Winkeln $\alpha = 30^0\,44'$, $\beta = 76^0\,21'$, $\gamma = 63^0\,3'$.

Die Asymptoten sind reell und haben gegen das Dreieck die in Fig. I angegebene Lage. Wir haben es also in diesem speciellen Fall mit einem Hyperbelsystem zu thun. Den Asymptoten selbst entspricht der Parameter:

$$\varrho = 15{,}54 \cdot 10^{-8}.$$

Für $\varrho = 10{,}84 \cdot 10^{-8}$ berührt eine Hyperbel die Seite $Z = 0$ und zwar von aussen. Für $\varrho = 10{,}42 \cdot 10^{-8}$ geht eine solche durch den Punkt $X = 0$, $Y = 0$ und zwar durch den Aussenwinkel des Dreieckes.

Aehnliches gilt für $\varrho = 16{,}13 \cdot 10^{-8}$ und den Punkt $Y = 0$, $Z = 0$. Setzt man dagegen $\varrho = 18{,}51 \cdot 10^{-8}$ so geht die Hyperbel durch den Punkt $X = 0$, $Z = 0$, aber durch den eigentlichen Winkel des Dreieckes.

Für $\varrho = 26{,}93 \cdot 10^{-8}$ endlich findet Berührung der entsprechenden Hyperbel mit der Seite $X = 0$ von aussen statt. Die Seite $Y = 0$ wird innerhalb des Dreiecks von keiner Hyperbel berührt. (Vergl. Fig. I.)

Die Abbildung des Dreieckes auf einen Octanten der Kugel S ist durch Fig. II in stereographischer Projection dargestellt. Den beiden Asymptoten entsprechen nach Gleichung (5) zwei sphärische Kegelschnitte, den Hyperbeln sphärische Raumcurven 8. Ordnung. Den Zusammenhang der Singularitäten der beiden Curvensysteme auf P und S sowie der Fläche F macht folgende Tabelle anschaulich:

	$\varrho \cdot 10^8$	Ebene P 1)	Kugel S	Fläche F
a	10,42	H. g. d. $X = 0$ $Y = 0$ v. a.	2 isol. P.	2 Minima
b	10,84	H. berührt $Z = 0$ v. a.	4 isol. P.	4 Minima
c	15,54	H. zerf. i. Asympt.	8 Knotenp.	8 intermed. P.
d	16,13	H. g. d. $Y = 0$ $Z = 0$ v. a.	2 isol. P.	2 Maxima
e	18,51	H. g. d. $X = 0$ $Z = 0$ v. i.	2 Knotenp.	2 intermed. P.
f	26,93	H. berührt $X = 0$ v. a.	4 isol. P.	4 Maxima

Von den 26 Doppelpunkten auf S sind demnach 22 reell; zwei Paare konjugiert imaginärer folgen aus dem Umstande, dass die Seite $Y = 0$ des Dreieckes von der entsprechenden Hyperbel nur in ihrer Verlängerung berührt wird. Die Unterscheidung der Maxima und Minima des Radiusvector der Fläche F ergibt sich von selbst, da alle Stellen, wo solche oder intermediäre Werte statthaben können, bestimmt und die zugehörigen Parameterwerthe bekannt sind. Namentlich kann es keinem Zweifel unterliegen, dass der Parameterwert $\varrho = 15{,}54 \cdot 10^{-8}$ kein relatives Maximum ist, wie Herr W. Voigt l. c. pg. 625 angibt, sondern ein intermediärer Wert. Bezüglich der Form der Fläche, wie sie aus unserer Discussion folgt, sei auf Fig. III verwiesen, welche ein Bild der Fläche, sammt den Schnitten mit konzentrischen Kugeln in isometrischer Projection gibt.

1) Abgekürzt: H. = Hyperbel, g. d. = geht durch, v. a. = von aussen, v. i. = von innen. Die Buchstaben der ersten Columne beziehen sich auf die Figuren I, II u. III.

B. Quadratisches System. Die Formel für das quadratische System ergibt sich aus der allgemeinen, indem man $a_{11} = a_{22}$ und $a_{13} = a_{23}$ setzt. Dies bewirkt, dass das Kegelschnittsystem der Ebene P symmetrisch gegen die zur Seite $Z = 0$ des Dreiecks gehörige Höhe zu liegen kommt. Infolge dessen hat auch die Fläche F zwei weitere Symmetrieebenen.

C. Hexagonales System. Fügt man zu den Bedingungen für das quadratische System noch die neue $a_{12} = a_{11}$ hinzu, so erhält man die Formel für das hexagonale. Der Asymptotenkegel (6): $a_{11}(X+Y)^2 + a_{33} Z^2 + 2a_{13}(X+Y) = 0$ artet hiebei in ein Ebenenpaar aus:

$$\left(X + Y + \frac{a_{13} + \sqrt{a_{13}^2 - a_{11} a_{33}}}{a_{11}} Z\right) \cdot$$
$$\cdot \left(X + Y + \frac{a_{13} - \sqrt{a_{13}^2 - a_{11} a_{33}}}{a_{11}} Z\right) = 0,$$

die Flächen (5) gehen in Cylinder und das Kegelschnittsystem der Ebene P in eine Schar von Geraden parallel zur Seite $Z = 0$ über. Die Fläche F wird eine Rotationsfläche.

D. Reguläres System. Bei diesem gelten die Bedingungen: $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ und $a_{12} = a_{13} = a_{23}$. Der Asymptotenkegel (6) wird dementsprechend ein Kreiskegel:

$$a_{11}(X^2 + Y^2 + Z^2) + 2\,a_{12}(XY + XZ + YZ) = 0,$$

dessen Axe die Gerade $X = Y = Z$ ist. Die Kegelschnittschar der Ebene P besteht aus concentrischen Kreisen um den Mittelpunkt des Dreieckes (Fig. IV). Einer von ihnen berührt gleichzeitig die 3 Seiten desselben. Ihm entsprechen daher nach Formel (8) und (9) auf der Kugel S und der Fläche F vier Kreise, welche in jedem Octanten ein gleichseitiges sphärisches Dreieck einschliessen (Fig. V). Daraus folgt die bekannte Thatsache, dass in den Ebenen des Octaeders der Elasticitätscoefficient der Biegung nach allen Richtungen hin der gleiche ist. Die Figuren IV, V und VI sind nach den ebenfalls von Herrn W. Voigt [1]) ermittelten Zahlenwerten für Flussspath gezeichnet. Die Grösse des Elasticitätscoefficienten beträgt für die Punkte: a) 0,0717, b) 0,1050, c) 0,1716.

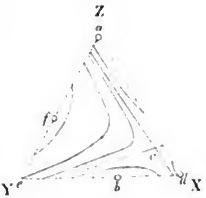
Zum Schlusse sei noch die Frage erledigt, ob die Eigenschaft der regulären Krystalle, in verschiedenen Ebenen einen nach allen Richtungen gleichen Elasticitätscoefficienten zu besitzen, den Krystallen dieses Systemes allein zukommt. Die erwähnte Eigenschaft drückt sich an der Fläche F durch das Vorhandensein von Kreisschnitten durch den Mittelpunkt aus. Sobald ein solcher vorkommt, dessen Ebene die Gleichung $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$ habe, zieht die Symmetrie nach den drei Hauptebenen sofort das Vorhandensein dreier weiterer nach sich, deren Ebenengleichungen lauten: $\lambda x - \mu y - \nu z = 0$, $-\lambda x + \mu y - \nu z = 0$, $-\lambda x - \mu y + \nu z = 0$. Dann aber würde die linke Seite der Gleichung (1) den entsprechenden von (8) und (9) gleich sein, und ein Kegelschnitt des Systemes der Ebene P müsste alle drei Seiten des Dreieckes zugleich berühren. Obwohl dies im Allgemeinen natürlich nicht der Fall ist und speciell beim Baryt nicht zutrifft, besteht doch, geometrisch gesprochen, kein Grund, dass bei einem Krystalle des rhombischen oder quadratischen Systemes diese Besonderheit nicht gelegentlich auftreten könne, welche bei solchen des regulären Systemes immer vorhanden ist. Gegebenen Falles würden sich die drei Systeme immer noch dadurch unterscheiden, dass im Vierkant der vier Kreisschnittebenen beim ersten nur die vier Seiten, beim zweiten noch dazu die vier Winkel einander gleich sind, während beim dritten ausserdem die Seiten gleich $^1/_3\,\pi$ werden.

1) W. Voigt: Neue Bestimmungen der Elasticitätsconstanten von Steinsalz und Flussspath. Sitzungsber. d. k. preuss. Akad. 1884.

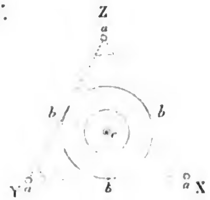
Rhombisches System: Baryt:

Reguläres System: Flussspath:

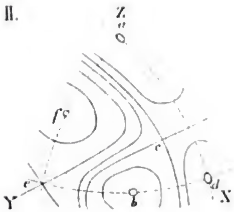
I.



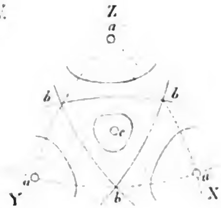
IV.



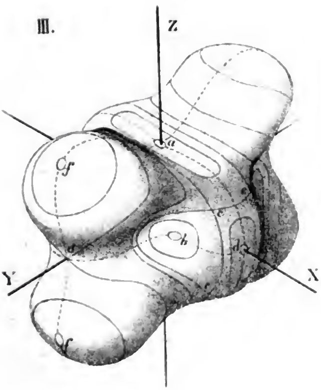
II.



V.



III.



VI.