# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-physikalischen Classe

der

## k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XVIII. Jahrgang 1888.



München
Verlag der K. Akademie
1889.

In Commission bei G. Franz.

## Ueber allgemeinere Invarianten-Systeme.

Von Dr. Ludwig Maurer in Strassburg.

*(Eingelaufen 3 März.)*

Bei der Begründung der Invariantentheorie kann man entweder von der Eigenschaft der Invarianten einer algebraischen Form ausgehen, dass sie durch ein gewisses System linearer Substitutionen in sich selbst transformirt werden; aus dieser Eigenschaft derselben ergibt sich sofort ihre Definition durch ein System partieller, linearer und homogener Differentialgleichungen, deren Coefficienten lineare und homogene Functionen der Coefficienten der algebraischen Form sind.

Oder man kann, wie dies zuerst Herr Aronhold getan hat,[1]) davon ausgehen, dass sich die Bedingungen, unter denen zwei algebraische Formen äquivalent sind, durch Gleichsetzung ihrer absoluten Invarianten ausdrücken lassen.

Wie man von der letzteren Definition ausgehend die Differentialgleichungen, denen die Invarianten genügen, ableiten kann, hat Herr Aronhold gezeigt. Dagegen ist noch nicht untersucht worden, ob beziehungsweise unter welchen Bedingungen umgekehrt ein System von partiellen Differentialgleichungen der Form

$$(\gamma) \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c^{i}_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_{\lambda}} x_{\mu} = 0 \; (i = 1, 2, \ldots m)$$

das Invariantensystem einer algebraischen Form definirt.

---

1) Crelle B. 62.

Diese Frage steht im engsten Zusammenhang mit der allgemeineren Auffassung des Invariantenbegriffes, welche Herr Christoffel im 19. Bande der mathematischen Annalen (S. 280) dargelegt hat. In dieser Abhandlung gibt Herr Christoffel einen strengen Beweis des Satzes, dass für die Aequivalenz zweier algebraischen Formen die Gleichheit ihrer absoluten Invarianten sowohl erforderlich als auch hinreichend ist. Die Gültigkeit dieses Beweises ist nun keineswegs an die Voraussetzung gebunden, dass die Substitution, welche auf die Variabeln der zu transformirenden Form anzuwenden ist, eine lineare ist; es zeigt sich vielmehr, dass die linearen Substitutionen nur eine specielle Classe der invariantiven Substitutionen bilden, denen Transformationsrelationen entsprechen, welche sich durch Gleichsetzung absoluter Invarianten ausdrücken lassen.

Um den Zusammenhang der Theorie der invariantiven Substitutionen mit dem oben erörterten Problem ersichtlich zu machen, betrachten wir eine Function $F(x|\xi)$ von $x_1\ x_2 \,..\, x_n$ und $\xi_1\ \xi_2 \,..\, \xi_m$, welche linear und homogen in den „Coefficienten“ x und wenigstens rational in den „Variabeln“ $\xi$ ist. An Stelle der Variabeln $\xi$ führen wir neue Variable ein, welche durch die Gleichungen $\xi_\lambda = \varphi_\lambda(\eta|p)$ $(\lambda = 1, 2 \,..\, m)$ definirt sind, wo $\varphi_\lambda$ eine rationale Function von $\eta_1\ \eta_2 \,..\, \eta_m$ und den $m'$ verfügbaren Paramenten $p_1\ p_2 \,..\, p_{m'}$ bedeutet. Die durch die Functionen $\varphi$ definirte Substitution sei der Art, dass durch sie die Function $F(x|\xi)$ in die Function $F(y|\eta)$ transformirt werde. Die Coefficienten der transformirten Function sind lineare und homogene Functionen der Coefficienten der ursprünglichen Function und rationale Functionen der Parameter p, also von der Form

$$\text{(A)} \quad y_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}\, x_\mu \quad (\lambda = 1, 2, \,..\, n)$$

wo die $a_{\lambda\mu}$ rationale Functionen der p sind.

Betrachten wir nun die Coefficienten x und die Coefficienten y als gegeben, dann müssen, wenn es möglich sein soll die Function $F(x|\xi)$ durch die Substitutionen $\xi_\lambda = \varphi_\lambda(\eta|p)$ $(\lambda = 1, 2, .. m)$ in die Function $F(y|\eta)$ zu transformiren, — allgemein zu reden — zwischen den Coefficienten x und y Bedingungsgleichungen stattfinden. Nehmen wir an, diese Aequivalenzbedingungen lassen sich durch eine Anzahl Gleichungen der Form $f((y)) = f((x))$ ausdrücken, wo f eine rationale und homogene Function der angezeigten Argumente bedeutet. Dann haben die Functionen f die Eigenschaft durch die lineare Substitution (A), deren Coefficienten Functionen der variabeln Paramente p sind, in sich selbst transformirt zu werden, und daraus folgt, wie unten gezeigt wird, dass die Functionen f einem System partieller Differentialgleichungen der Form $(\gamma)$ genügen. —

Sollen die Differentialgleichungen $(\gamma)$ ein Invariantensystem in dem eben erläuterten Sinn definiren, so muss sich ihr Integralsystem durch eine Anzahl r a t i o n a l e r Functionen von $x_1\ x_2\ ..\ x_n$ darstellen lassen. Die Bedingungen hiefür werden im Folgenden angegeben werden. Sind dieselben erfüllt, so lässt sich ein System invariantiver Substitutionen nachweisen, denen gegenüber die Integrale der Differentialgleichungen $(\gamma)$ als Invarianten zu betrachten sind.

Das Problem, welches den Gegenstand der folgenden Untersuchung bildet, lässt sich als speciellen Fall des allgemeinen Problems betrachten, das Herr Lie in seinen Abhandlungen über partielle Differentialgleichungen und Berührungstransformationen[1]) behandelt hat. Infolge der Verschiedenheit der maassgebenden Gesichtspuncte sind jedoch die Methoden, die im Folgenden zur Verwendung kommen, wesentlich verschieden von denen, deren sich Herr Lie bedient.

---

1) Mathemat. Annalen B. 8, 9, 11, 16, 25.

I.

## Ueber rationale homogene Functionen mit unendlich vielen linearen Transformationen in sich selbst.

Es wird im Folgenden nachgewiesen werden, dass eine rationale und homogene Function $f((x))$ der Variabeln $x_1\, x_2 \, .. \, x_n$, welche einem System partieller Differentialgleichungen ($\gamma$) genügt, unendlich viele lineare Transformationen in sich selbst zulässt. Vorerst aber werde ich den umgekehrten Weg einschlagen und untersuchen: Welche Bedingungen ergeben sich aus der Annahme, $f((x))$ wurde durch unendlich viele lineare Substitutionen in sich selbst transformirt, einerseits für die Function $f((x))$ und andererseits für die Substitutionscoefficienten?

Nehmen wir also an, $f((x))$ wurde durch die umkehrbare lineare Substitution

$$(A) \quad y_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}\, x_\mu \; (\lambda = 1, 2, .. n)$$

in sich selbst transformirt, d. h. es bestehe für alle Werte der x und alle den Gleichungen (A) genügenden Werte der y die Gleichung $f((y)) = f((x))$.

Diese Gleichung muss also, wenn man die y durch ihre Werte in Function der x ersetzt, in den x identisch werden; sie führt daher zu einem System algebraischer Gleichungen (S), denen die Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ genügen müssen. Ausserdem unterliegen die letzteren der Zusatzbedingung, dass ihre Determinante nicht verschwindet.

Das Gleichungssystem (S) ist entweder selbst irreductibel oder es lässt sich durch eine Anzahl irreductibler Gleichungssysteme ersetzen.[1]) Von diesen irreductiblen Gleichungssystemen sind zunächst diejenigen auszuschliessen, denen nur solche Wertsysteme $a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{nn}$ genügen, deren Determinante verschwindet. Die Gesammtheit der übrig bleibenden Gleichungssysteme bezeichne ich mit (S'). Durch diese Gleichungssysteme seien eine Anzahl irreductibler algebraischer Gebilde der Mannigfaltigkeit m, aber keines von höherer Mannigfaltigkeit bestimmt. Unter diesen irreductiblen Gebilden gibt es mindestens eines, dem das Wertsystem

$$a_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu} \ (\lambda, \mu = 1, 2, .\ \ n)^{2)}$$

angehört.

Dies lässt sich auf folgende Art beweisen: Durch irgend eines der irreductiblen Gebilde der Mannigfaltigkeit m seien die $n^2$ Grössen $a_{\lambda\mu}((p))$ als algebraische Functionen von m variablen Parametern $p_1\ p_2\ .\ .\ p_m$ definirt. Dann wird f durch die Substitution

$$y_\lambda = \sum_\mu a_{\lambda\mu}((p))\, x_\mu \ (\lambda = 1, 2, .\ .\ n)$$

in sich selbst transformirt, wie auch die Werte der p gewählt werden mögen. f wird also auch durch die Substitution

$$y_\lambda = \sum_\mu a_{\lambda\mu}((p'))\, x_\mu \ (\lambda = 1, 2, .\ .\ n)$$

in sich selbst transformirt, wo $p_1'\ p_2'\ .\ .\ p_m'$ ein festes Wertsystem von $p_1\ p_2\ .\ .\ p_m$ bedeutet, und folglich auch durch die Substitution

$$z_\lambda = \sum_\mu b_{\lambda\mu}((p))\, x_\mu \ (\lambda = 1, 2, .\ .\ n)$$

---

1) Vergl. Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen § 10.

2) Das Symbol $\binom{\lambda}{\mu}$ bedeutet 1 oder 0, je nachdem $\lambda$ und $\mu$ gleich oder ungleich sind.

deren Coefficienten durch die Gleichungen

$$\sum_\mu a_{\lambda\mu}((p')) z_\mu = \sum_\mu a_{\lambda\mu}((p)) x_\mu \ (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

bestimmt sind.

Auch die $b_{\lambda\mu}((p))$ constituiren ein algebraisches Gebilde der Mannigfaltigkeit m, denn da man über m von den Functionen $a_{\lambda\mu}((p))$ verfügen kann, kann man bewirken, dass m von den Functionen $b_{\lambda\mu}((p))$ vorgeschriebene Werte annehmen. Dieses Gebilde ist irreductibel, da die $b_{\lambda\mu}((p))$ rationale Functionen der $a_{\lambda\mu}((p))$ sind. Endlich entsprechen dem Wertsystem

$$p_1 = p_1' \quad p_2 = p_2' \ldots p_m = p_m'$$

die Werte $b_{\lambda\mu}((p')) = \binom{\lambda}{\mu} \ (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$.

Es gibt somit mindestens ein algebraisches Gebilde der verlangten Art; es wird sich zeigen, dass es auch nur ein solches gibt.

Die durch dieses irreductible Gebilde bestimmten Substitutionen bilden den Gegenstand der folgenden Untersuchung.

## II.

## Partielle Differentialgleichungen, denen die Function f und die Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ genügen.

Im Folgenden betrachte ich die Substitutionscoefficienten als Functionen von m unabhängig variablen Parametern $p_1\, p_2 \ldots p_m$.

Die Wahl dieser Parameter bleibt vorbehalten; vorerst wird nur vorausgesetzt:

1) man kann den Parametern solche Werte erteilen, dass m von den Substitutionscoefficienten vorgeschriebene Werte erhalten;

2) man kann von jedem beliebigen Wertsystem der $a_{\lambda\mu}$ zu jedem anderen gelangen, indem man die Parameter geeignete Wege beschreiben lässt;

3) es gibt ein Wertsystem $p'$ der Parameter, das den $n^2$ Gleichungen

$$a_{\lambda\mu}((p')) = \binom{\lambda}{\mu} \; (\lambda, \mu = 1, 2, .. n)$$

genügt.

Unser Problem fordert:

Wenn die Grössen $y_1 \, y_2 \, .. \, y_n$ durch die Gleichungen

$$\text{(A)} \quad y_\lambda = \sum_\mu a_{\lambda\mu} x_\mu \; (\lambda = 1, 2, .. n)$$

als Functionen der x und der p definirt werden, so muss die Gleichung

$$f((y)) = f((x))$$

bestehen für alle Werte der unabhängig Variabeln x und für alle Werte der unabhängig Variabeln p. Infolge der über die $a_{\lambda\mu}$ gemachten Voraussetzungen lässt sich diese Forderung durch die beiden folgenden ersetzen:

1) Es soll

$$\frac{\partial f((y))}{\partial p_i} = 0 \; (i = 1, 2, \ldots m)$$

sein für alle Werte der x und alle Werte der p, und

2) es soll

$$f((y)) = f((x))$$

sein für alle Werte der x und ein bestimmtes, im übrigen beliebig zu wählendes, Wertsystem der $a_{\lambda\mu}$.

Die zweite Forderung ist jedenfalls erfüllt, wenn wir für das feste Wertsystem der $a_{\lambda\mu}$ das Wertsystem $a_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu}$ wählen.

Die Gleichung $f((y)) = f((x))$ wird somit vollständig vertreten durch die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial f((y))}{\partial p_i} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial f((y))}{\partial y_\lambda} \frac{\partial y_\lambda}{\partial p_i} = 0 \; (i = 1, 2, .. m)$$

Nun ist, weil f homogene Function ist

$$\frac{\partial f((x))}{\partial x_\lambda} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\lambda} \frac{\partial f((y))}{\partial y_\mu}$$

und ferner

$$\frac{\partial y_\lambda}{\partial p_i} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_i} x_\mu$$

Führt man die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werte der Differentialquotienten $\frac{\partial f((y))}{\partial y_\lambda}$ und $\frac{\partial y_\lambda}{\partial p_i}$ in die obigen Gleichungen ein, so erhalten dieselben die Form

$$(\gamma') \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} C^i_{\lambda\mu} \frac{\partial f((x))}{\partial x_\lambda} x_\mu = 0 \; (i = 1, 2, .. m)$$

wo die Grössen $C^i_{\lambda\mu}$ durch die Gleichungen

$$(\alpha) \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu} C^i_{\nu\mu} = \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_i} \begin{pmatrix} \lambda, \mu = 1, 2, \,.\,.\, n \\ i = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix}$$

als Functionen der p bestimmt sind. Es genügt somit einerseits $f((x))$ einem System von m partiellen Differentialgleichungen, und andererseits genügen die Substitutionscoefficienten als Functionen der Parameter p betrachtet einem

System von $n^2 m$ partiellen Differentialgleichungen. Das letztere System hat eine bemerkenswerte Eigenschaft. Gibt man dem Index $\mu$ der Reihe nach die Werte 1, 2, . . n und dem Index i der Reihe nach die Werte 1, 2, . . m, hält dagegen den Index $\lambda$ fest, so erkennt man, dass die Substitutionscoefficienten einer Zeile

$$a_{\lambda 1} \quad a_{\lambda 2} \quad . \quad . \quad a_{\lambda n}$$

ein System particulärer Lösungen der Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial p_i} = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu C^i_{\nu\mu} \; (\mu = 1, 2, . . n; \; i = 1, 2, . . m)$$

bilden.

Die Grössen $C^i_{\lambda\mu}$ sind Functionen der p. Bildet das Wertsystem $p_i = q_i$ weder eine Verzweigungs- noch eine Unstetigkeitsstelle dieser Functionen, so lassen sich dieselben für hinreichend kleine Werte von Mod $(p_i - q_i)$ nach Potenzen von $p_i - q_i$ $(i = 1, 2, . . . m)$ entwickeln. Da die Gleichungen $(\gamma')$ für alle Werte der p gelten, so müssen in dieser Entwicklung die Coefficienten der einzelnen Potenzen und Producte der $p_i - q_i$ verschwinden. Die Function $f((x))$ genügt daher einer Anzahl von Differentialgleichungen der Form

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = 0$$

wo die $c_{\lambda\mu}$ von den x und den p unabhängige Constante bedeuten.

Die Anzahl der Differentialgleichungen dieser Art, welche von einander unabhängig sind, muss jedenfalls kleiner als n sein. Für die vorliegende Untersuchung ist aber nicht sowohl die Anzahl der in diesem Sinne unabhängigen Differentialgleichungen von Wichtigkeit, als vielmehr die Anzahl der „linear unabhängigen" d h. die Anzahl der Differentialgleichungen, zwischen deren Coefficienten keine Relation der Form

$$\alpha_1 \overset{1}{c}_{\lambda\mu} + \alpha_2 \overset{2}{c}_{\lambda\mu} + \alpha_3 \overset{3}{c}_{\lambda\mu} + \ldots = 0 \ (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

besteht.

Die Anzahl der linear unabhängigen Differentialgleichungen, denen eine Function genügt, muss offenbar kleiner sein als $n^2$, sie kann aber grösser sein als n. So genügt z. B. die quadratische Form

$$f((x)) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2$$

den $\frac{1}{2}$ n (n — 1) Differentialgleichungen

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \ (k = 1, 2, 3, \ldots i - 1; \ i = 2, 3, \ldots n)$$

Diese Differentialgleichungen sind allerdings nur den n — 1 unabhängigen Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial x_2} : \frac{\partial f}{\partial x_3} \ldots : \frac{\partial f}{\partial x_n} = x_1 : x_2 : x_3 \ldots : x_n$$

äquivalent, aber in dem eben erläuterten Sinn, sind sie als linear unabhängig zu bezeichnen.

Die Differentialgleichungen ($\gamma'$) lassen sich durch eine gewisse — vorläufig nicht näher zu bestimmende — Anzahl von linear unabhängigen Differentialgleichungen

$$(\gamma) \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \overset{i}{c}_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = 0 \ (i = 1, 2, \ldots m')$$

ersetzen, wo die $\overset{i}{c}_{\lambda\mu}$ Constante bedeuten.

Jede Function, welche diesen m' Differentialgleichungen genügt, genügt auch den Differentialgleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(c^{i}_{\lambda\nu}\,c^{k}_{\nu\mu}-c^{k}_{\lambda\nu}\,c^{i}_{\nu\mu}\right)\frac{\partial f}{\partial x_{\lambda}}\,x_{\mu}=0\;(i,k=1,2,\ldots m')$$

welche sich aus den Differentialgleichungen $(\gamma)$ durch Differentiation und Elimination der höheren Derivirten ergeben. Wir dürfen voraussetzen, dass jede dieser letzteren Differentialgleichungen von den Gleichungen $(\gamma)$ linear abhängig ist, dass also

$$(\varepsilon)\;\sum_{\nu=1}^{n}\left(c^{i}_{\lambda\nu}\,c^{k}_{\nu\mu}-c^{k}_{\lambda\nu}\,c^{i}_{\nu\mu}\right)=\sum_{j=1}^{m'}\varepsilon^{ik}_{j}\,c^{j}_{\lambda\mu}\;\begin{pmatrix}\lambda,\mu=1,2,\ldots n\\ i,k=1,2,\ldots m'\end{pmatrix}$$

ist. Unter dieser Voraussetzung bilden die Differentialgleichungen $(\gamma)$ ein „vollständiges System linear unabhängiger Differentialgleichungen" oder nach der kürzeren Bezeichnungsweise des Herrn Lie eine „Gruppe".[1])

Aus dem Verfahren, mittelst dessen wir zu den Differentialgleichungen $(\gamma)$ gelangt sind, folgt unmittelbar, dass sich die Grössen $C^{i}_{\lambda\mu}$ darstellen lassen in der Form

$$(\pi)\;C^{i}_{\lambda\mu}=\sum_{j=1}^{m'}P^{i}_{j}\,c^{j}_{\lambda\mu}\;\begin{pmatrix}\lambda,\mu=1,2,\ldots n\\ i=1,2,\ldots m\end{pmatrix}$$

wo die $P^{i}_{j}$ Functionen der p sind.

Aus der ersten unserer Voraussetzungen über die Grössen $a_{\lambda\mu}$ ergeben sich gewisse Beschränkungen, denen die Functionen $P^{i}_{j}$ unterliegen. Danach sollten m von den Grössen $a_{\lambda\mu}$ bei geeigneter Wahl der p vorgeschriebene Werte erhalten können. Man muss demnach durch geeignete Wahl der Differentiale $d\,p_1$ $d\,p_2$, . $d\,p_m$ über m von den vollständigen Differentialen $d\,a_{\lambda\mu}$ verfügen können.

1) Mathem. Annalen B. 25. S. 71.

Nun ergeben die Gleichungen ($\alpha$) und ($\pi$) für diese Differentiale die Werte

$$da_{\lambda\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{j=1}^{m'} \left\{ \sum_{i=1}^{m} P_j^i \, dp_i \right\} a_{\lambda\nu} \, c_{\nu\mu}^j \, (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

Es darf daher erstens m′ nicht kleiner sein als m und zweitens dürfen nicht alle aus m Verticalreihen des Systems

$$\begin{matrix} P_1^1 & P_2^1 & P_3^1 & \ldots\ldots & P_{m'}^1 \\ P_1^2 & P_2^2 & P_3^2 & \ldots\ldots & P_{m'}^2 \\ P_1^3 & P_2^3 & P_3^3 & \ldots\ldots & P_{m'}^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ P_1^m & P_2^m & P_3^m & \ldots\ldots & P_{m'}^m \end{matrix}$$

gebildeten Determinanten identisch, d. h. für alle Werte der p verschwinden. Wie man sich leicht überzeugt, sind diese Bedingungen nicht nur notwendig sondern auch hinreichend, damit m von den Differentialen $da_{\lambda\mu}$ vorgeschriebene Werte erhalten können.

Die Gleichungen ($\gamma$), ($\alpha$) und ($\pi$) ersetzen die Gleichungen

$$\frac{\partial f((y))}{\partial p_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

vollständig. Diese Gleichungen, zusammen mit den für die $a_{\lambda\mu}$ geltenden Anfangsbedingungen

$$a_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu} \text{ für } p_i = p_i' \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n;\; i = 1, 2, \ldots m)$$

drücken daher vollständig die Bedingungen aus, damit f durch die Substitution (A) in sich selbst transformirt wird

Insbesondere gilt der Satz:

Genügt f der Differentialgleichung

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = 0$$

genügen ferner die Grössen $b_{\lambda\mu}$ den Differentialgleichungen

$$\frac{d\,b_{\lambda\mu}}{dp} = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\lambda\nu}\, c_{\nu\mu}\ (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

und den Anfangsbedingungen

$$b_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu} \text{ für } p = p'\ (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

so wird f durch die Substitution

$$(B)\ y_\lambda = \sum_\mu b_{\lambda\mu}\, x_\mu\ (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

in sich selbst transformirt.

Eine derartige Substitution B, deren Coefficienten nur von einem Parameter abhängen, nenne ich eine elementare.

Es wird sich zeigen, dass die Substitution A aus m elementaren Substitutionen zusammengesetzt werden kann.

## III.

### Integrabilitätsbedingungen für die Differentialgleichungen ($\alpha$).

Die Functionen $P_j^i$ sind der Natur der Sache nach nicht vollständig bestimmt, da sie von der Wahl des Parametersystems abhängen. Die Bedingungsgleichungen, denen sie genügen müssen, ergeben sich aus den Integrabilitätsbedingungen für die Gleichungen ($\alpha$).

Durch Differentiation nach $p_k$ ergibt sich aus ($\alpha$):

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a_{\lambda\nu}}{\partial p_k} C^i_{\nu\mu} + \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu} \frac{\partial C^i_{\nu\mu}}{\partial p_k} = \frac{\partial^2 a_{\lambda\mu}}{\partial p_i\, \partial p_k} \begin{pmatrix} \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n \\ i, k = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix}$$

oder da

$$\frac{\partial a_{\lambda\nu}}{\partial p_k} = \sum_{\varrho=1}^{n} a_{\lambda\varrho} C^k_{\varrho\nu} \text{ ist}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu} \left\{ \sum_{\varrho=1}^{n} C^i_{\varrho\mu} C^k_{\nu\varrho} + \frac{\partial C^i_{\nu\mu}}{\partial p_k} \right\} = \frac{\partial^2 a_{\lambda\mu}}{\partial p_i \partial p_k}$$

Subtrahirt man von dieser Gleichung diejenige, welche sich aus ihr durch Vertauschung der Indices i und k ergibt, so folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu} \left\{ \sum_{\varrho=1}^{n} (C^k_{\nu\varrho} C^i_{\varrho\mu} - C^i_{\nu\varrho} C^k_{\varrho\mu}) + \frac{\partial C^i_{\nu\mu}}{\partial p_k} - \frac{\partial C^k_{\nu\mu}}{\partial p_i} \right\} = 0$$

Die Determinante der $a_{\lambda\mu}$ verschwindet nicht, also muss

$$\sum_{\varrho=1}^{n} (C^k_{\nu\varrho} C^i_{\varrho\mu} - C^i_{\nu\varrho} C^k_{\varrho\mu}) + \frac{\partial C^i_{\nu\mu}}{\partial p_k} - \frac{\partial C^k_{\nu\mu}}{\partial p_i} = 0$$

sein für $\nu, \mu = 1, 2, \ldots n$; $i, k = 1, 2, \ldots m$.

Nun ist nach ($\pi$)

$$C^i_{\nu\varrho} = \sum_{j=1}^{m'} P^i_j c^j_{\nu\varrho}$$

also

$$\sum_{\varrho=1}^{n} (C^k_{\nu\varrho} C^i_{\varrho\mu} - C^i_{\nu\varrho} C^k_{\varrho\mu}) = \sum_{\varrho=1}^{n} \begin{vmatrix} \sum_{h=1}^{m'} P^k_h c^h_{\nu\varrho} & \sum_{j=1}^{m'} P^i_j c^j_{\nu\varrho} \\ \sum_{h=1}^{m'} P^k_h c^h_{\varrho\mu} & \sum_{j=1}^{m'} P^i_j c^j_{\varrho\mu} \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^{n} \sum_{h=1}^{m'} \sum_{j=1}^{m'} (P^k_h P^i_j - P^k_j P^i_h)(c^h_{\nu\varrho} c^j_{\varrho\mu} - c^j_{\nu\varrho} c^h_{\varrho\mu})$$

Ersetzt man in dieser Gleichung $\sum\limits_{\varrho=1}^{n} (c^h_{\nu\varrho} c^j_{\varrho\mu} - c^j_{\nu\varrho} c^h_{\varrho\mu})$

durch den aus ($\varepsilon$) folgenden Wert und beachtet, dass $\varepsilon_r^{hj} = -\varepsilon_r^{jh}$ ist, so folgt:

$$\sum_{\varrho=1}^{n} (C_{\nu\varrho}^{k} C_{\varrho\mu}^{i} - C_{\nu\varrho}^{i} C_{\varrho\mu}^{k}) = \sum_{h=1}^{m'} \sum_{j=1}^{m'} \sum_{r=1}^{m'} P_h^k P_j^i \varepsilon_r^{hj} c_{\nu\mu}^r$$

Diesen Wert führen wir in die oben gefundene Gleichung ein und ersetzen zugleich

$$\frac{\partial C_{\nu\mu}^i}{\partial p_k} - \frac{\partial C_{\nu\mu}^k}{\partial p_i} \text{ durch } \sum_{r=1}^{m'} \left(\frac{\partial P_r^i}{\partial p_k} - \frac{\partial P_r^k}{\partial p_i}\right) c_{\nu\mu}^r$$

Wir erhalten eine Gleichung der Form

$$\alpha_1 c_{\nu\mu}^1 + \alpha_2 c_{\nu\mu}^2 + \ldots \alpha_{m'} c_{\nu\mu}^{m'} = 0 \; (\nu, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

Da die $m'$ Differentialgleichungen ($\gamma$) der Voraussetzung nach linear unabhängig sind, so folgt hieraus $\alpha_1 = 0 \; \alpha_2 = 0 \; \ldots \; \alpha_{m'} = 0$.

Wir erhalten somit das System von partiellen Differentialgleichungen

$$(J) \quad \frac{\partial P_r^i}{\partial p_k} - \frac{\partial P_r^k}{\partial p_i} + \sum_{h=1}^{m'} \sum_{j=1}^{m'} \varepsilon_r^{hj} P_h^k P_j^i = 0$$

für $i, k = 1, 2, \ldots m$; $r = 1, 2, \ldots m'$.

Diese Gleichungen geben die notwendigen Bedingungen, damit das System der Differentialgleichungen ($\alpha$) überhaupt ein Lösungssystem $a_{\lambda\mu}$ mit nicht verschwindender Determinante zulässt. Aber diese Bedingungen sind, wie Herr Bouquet nachgewiesen hat, auch hinreichend.[1])

Die Functionen $P_j^i$ sind daher nur an die beiden Bedingungen gebunden, dass sie erstens den Gleichungen (J) genügen, und dass zweitens das durch sie bestimmte Deter-

1) Bulletin des Sciences mathématiques t. III. p. 265.

minantensystem nicht identisch verschwindet. Im übrigen können sie beliebig gewählt werden.

In den Gleichungen (J) kommen nur die Constanten $\varepsilon_j^{ik}$, aber nicht die Grössen $c_{\lambda\mu}^i$ selbst vor. Alle „gleichzusammengesetzten" Systeme von Differentialgleichungen der Form $(\gamma)$, für welche die Constanten $\varepsilon_j^{ik}$ dieselben Werte haben, führen daher zu demselben System von Differentialgleichungen (J), also zu denselben Functionen $P_j^i$.

Im Folgenden wird nachgewiesen werden, dass $m' = m$ ist, wenn die Function $f((x))$ durch keine Substitution mit mehr als m verfügbaren Coefficienten in sich selbst transformirt werden kann.

Setzen wir dies einstweilen voraus, so kann man die Gleichungen (J) in bemerkenswerter Weise umformen.

Da die Determinante der $P_j^i$ nicht identisch verschwindet, so kann man $m^2$ Functionen der p durch die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{m} P_j^i Q_i^k = \binom{k}{j} \quad (j, k = 1, 2, \ldots m)$$

bestimmen. Multiplicirt man die Gleichung (J) mit $Q_i^s Q_k^t$ und addirt nach i, k, so folgt, da

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P_r^i}{\partial p_k} Q_i^s = - \sum_{i=1}^{m} P_r^i \frac{\partial Q_i^s}{\partial p_k} \quad \text{und}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial P_r^k}{\partial p_i} Q_k^t = - \sum_{k=1}^{m} P_r^k \frac{\partial Q_k^t}{\partial p_i} \quad \text{ist,}$$

$$- \sum_{i=1}^{m} P_r^i \left\{ \sum_{k=1}^{m} \left( Q_k^t \frac{\partial Q_i^s}{\partial p_k} - Q_k^s \frac{\partial Q_i^t}{\partial p_k} \right) \right\} + \varepsilon_r^{ts} = 0$$

und hieraus ergibt sich:

$$(J') \quad \sum_{k=1}^{m} \left( Q_k^t \frac{\partial Q_r^s}{\partial p_k} - Q_k^s \frac{\partial Q_r^t}{\partial p_k} \right) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{ts} Q_r^j$$

für r, s, t = 1, 2, . . m.

Diese Gleichungen geben zusammen mit den Gleichungen ($\varepsilon$) die notwendigen und ausreichenden Bedingungen, damit die Differentialgleichungen

$$(\Gamma)\quad \sum_{k=1}^{m} Q_k^i \frac{\partial F}{\partial p_k} - \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^i \frac{\partial F}{\partial x_\lambda} x_\mu = 0 \; (i = 1, 2, \ldots m)$$

ein „vollständiges System“ bilden, also n von einander unabhängige Lösungen zulassen.[1])

Diesen Gleichungen ($\Gamma$) genügen die n Functionen der x und p

$$y_\nu = \sum_\mu a_{\nu\mu} x_\mu \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

Ersetzt man nämlich in den Gleichungen ($\Gamma$) F durch $y_\nu$ und beachtet, dass die so entstehenden Gleichungen in den x identisch sein müssen, so folgt aus denselben

$$(\alpha')\quad \sum_{k=1}^{m} Q_k^i \frac{\partial a_{\nu\mu}}{\partial p_k} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\mu} c_{\lambda\mu}^i \begin{pmatrix} \nu, \mu = 1, 2, \ldots n \\ i = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix}$$

Aber diese Gleichungen sind nur eine Umformung der Gleichungen ($\alpha$).

Die Gleichungen ($\Gamma$) bringen zum Ausdruck, dass jede Lösung der $m' = m$ Differentialgleichungen ($\gamma$) eine Function von $y_1\, y_2 \ldots y_n$ sein muss, welche nur von den Werten der x aber nicht von den Werten der p abhängt.

## IV.

## Ueber die Coefficienten der Differentialgleichungen ($\gamma$).

Bei der Ableitung der Gleichungen ($\gamma$) haben wir nicht zum Ausdruck gebracht, dass $f((x))$ rationale Function

1) Den Beweis dieses Satzes hat Clebsch gegeben. (Crelles Journal B. 65.)

der Argumente ist. Es ist daher noch zu untersuchen, welche Bedingungen für die Coefficienten $c^i_{\lambda\mu}$ sich aus dieser Eigenschaft von f ergeben. Zu diesem Zweck gehen wir von dem am Schlusse des zweiten Abschnittes bewiesenen Satz aus:

Genügt f((x)) der partiellen Differentialgleichung

$$(1) \quad \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = 0$$

und werden die Substitutionscoefficienten $b_{\lambda\mu}$ durch die Differentialgleichungen

$$(2) \quad \frac{d b_{\lambda\mu}}{d p} = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\lambda\nu} c_{\nu\mu} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

und die Anfangsbedingungen

$$b_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu} \text{ für } p = 0$$

bestimmt, so wird f durch die elementare Substitution

$$y_\lambda = \sum_{\mu} b_{\lambda\mu} x_\mu \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

in sich selbst transformirt.

Die Integration der Differentialgleichungen (2) lässt sich mit Hülfe eines Satzes, den ich in meiner Inauguraldissertation bewiesen habe, leicht ausführen.

Dieser Satz lautet:

Hat die „Fundamentaldeterminante" der $c_{\lambda\mu}$

$$\begin{vmatrix} c_{11}-r & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-r & c_{23} & \ldots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33}-r & \ldots & c_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \ldots & c_{nn}-r \end{vmatrix}$$

die Elementarteiler[1])

$$(r_\varkappa - r)^{e_0^\varkappa} (r_\varkappa - r)^{e_1^\varkappa} \ldots\ldots (r_\varkappa - r)^{e_{l_\varkappa}^\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n')$$

so lassen sich $n^2$ Grössen $[g\,h\,\lambda]_\varkappa$ mit nicht verschwindender Determinante der Art bestimmen, dass

$$(3) \qquad \begin{aligned} r_\varkappa [g\,h\,\lambda]_\varkappa + [g-1\,h\,\lambda]_\varkappa &= \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu} [g\,h\,\mu]_\varkappa \\ r_\varkappa [1\,h\,\lambda]_\varkappa &= \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu} [1\,h\,\mu]_\varkappa \text{ ist} \end{aligned}$$

für $\lambda = 1, 2, \ldots n$; $g = 2, 3, \ldots e_h^\varkappa$; $h = 0, 1, 2, \ldots l_\varkappa$; $\varkappa = 1, 2, \ldots n'$.

Die Substitutionscoefficienten $b_{\lambda\mu}$ lassen sich in zwei Fällen als r a t i o n a l e Functionen eines Parameters darstellen; nämlich dann, wenn entweder die Fundamentaldeterminante der $c_{\lambda\mu}$ gleich $r^n$ ist, oder wenn sie nur Elementarteiler erster Ordnung hat und wenn ausserdem die Werte $r_1\, r_2 \ldots r_{n'}$, für welche sie verschwindet, ganze Zahlen sind.

Je nachdem der erste oder der zweite von diesen Fällen, oder keiner von beiden eintritt, nenne ich das Coefficientensystem der $c_{\lambda\mu}$ ein System erster, zweiter oder dritter Art. Diese Bezeichnung übertrage ich auch auf die entsprechenden Differentialgleichungen und elementaren Substitutionen.

Nehmen wir zunächst an, das System der $c_{\lambda\mu}$ sei von der ersten Art.

In diesem Fall ist in den Gleichungen (3) $n' = 1$ und $r_1 = 0$ zu setzen. Diese Gleichungen erhalten also die Form

1) Den Begriff der Elementarteiler hat H. Weierstrass eingeführt (Monatsberichte der Berliner Akademie 1868).

$$\sum_\mu c_{\lambda\mu}[1\,h\,\mu] = 0 \qquad \lambda = 1, 2, \dots n$$
$$\sum_\mu c_{\lambda\mu}[g\,h\,\mu] = [g-1\,h\,\lambda] \qquad g = 1, 2, \dots e_h \quad h = 0, 1, 2, \dots l$$

Die Differentialgleichungen (2) lassen sich nun durch die folgenden ersetzen:

$$\frac{d}{dp}\sum_\mu b_{\lambda\mu}[1\,h\,\mu] = 0$$

$$\frac{d}{dp}\sum_\mu b_{\lambda\mu}[g\,h\,\mu] = \sum_\mu b_{\lambda\mu}[g-1\,h\,\mu]$$

wo die Indices g, h, $\lambda$ die eben angegebenen Wertsysteme zu durchlaufen haben.

Mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen $b_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu}$ für $p = 0$ folgt aus diesen Gleichungen:

$$\sum_\mu b_{\lambda\mu}[1\,h\,\mu] = [1\,h\,\lambda]$$

$$\sum_\mu b_{\lambda\mu}[g\,h\,\mu] = [g\,h\,\lambda] + \frac{p}{1}[g-1\,h\,\lambda] + \frac{p^2}{1\cdot 2}[g-2\,h\,\lambda]$$
$$+ \frac{p^3}{1\cdot 2\cdot 3}[g-3\,h\,\lambda] + \dots\dots \frac{p^{g-1}}{1\cdot 2\cdots(g-1)}[1\,h\,\lambda]$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die $b_{\lambda\mu}$ als ganze Functionen von p. Die Determinante der $b_{\lambda\mu}$ ist gleich 1.

Nehmen wir nun an, das System der $c_{\lambda\mu}$ sei von der zweiten Art. In diesem Fall ist in den Gleichungen (3) für den Index g nur der Wert $g = 1$ zulässig. Dieselben erhalten, wenn man $[h\,\lambda]_\varkappa$ statt $[1\,h\,\lambda]_\varkappa$ schreibt, die Form

$$\sum_\mu c_{\lambda\mu}[h\,\mu]_\varkappa = [h\,\lambda]_\varkappa \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \dots n \\ h = 0, 1, 2, \dots l_\varkappa;\ \varkappa = 1, 2, \dots n' \end{pmatrix}$$

und die Differentialgleichungen (2) lassen sich durch folgende ersetzen:

$$\frac{d}{dp} \sum_{\mu} b_{\lambda\mu} [h\,\mu]_{\varkappa} = r_{\varkappa} \sum_{\mu} b_{\lambda\mu} [h\,\mu]_{\varkappa}$$

Die Integration dieser Gleichungen gibt mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen

$$\sum_{\mu} b_{\lambda\mu} [h\,\mu]_{\varkappa} = e^{r_{\varkappa} p} [h\,\lambda]_{\varkappa}$$

Führt man an Stelle des Parameters p den Parameter $q = e^p$ ein, so werden auch in diesem Fall die Substitutionscoefficienten rationale Functionen des Parameters, da ja der Voraussetzung nach die Grössen $r_{\varkappa}$ ganze Zahlen sind. Die Substitutionsdeterminante ist gleich 1 oder gleich einer ganzen Potenz von q.

Von dem eben behandelten nicht wesentlich verschieden ist der Fall, dass die Fundamentaldeterminante der $c_{\lambda\mu}$ nur Elementarteiler erster Ordnung hat, und dass zwar nicht die Grössen $r_1\, r_2 \ldots$ selbst ganze Zahlen sind, aber wenigstens ihre Verhältnisse sich durch ganze Zahlen ausdrücken lassen. Ist nämlich $r_{\varkappa} = \varrho\, r_{\varkappa}'$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots n')$, wo $n_{\varkappa}'$ eine ganze Zahl bedeutet, so hat man nur an Stelle des Parameters p den Parameter $q' = e^{\varrho p} = q^{\varrho}$ einzuführen, um die $b_{\lambda\mu}$ als rationale Functionen eines Parameters darzustellen.

Auf die beiden eben erledigten Fälle lässt sich die Integration der Differentialgleichungen (2) auch in dem Fall zurückführen, dass das Coefficientensystem der $c_{\lambda\mu}$ ein System dritter Art ist. Zu diesem Zwecke zeige ich zunächst, dass sich stets ein System erster Art $c^0_{\lambda\mu}$ und eine gewisse Anzahl $\beta$ von Systemen zweiter Art $c^1_{\lambda\mu}\; c^2_{\lambda\mu} \ldots$ so bestimmen lassen, dass $c_{\lambda\mu} = \overset{0}{c}_{\lambda\mu} + \varrho_1 \overset{1}{c}_{\lambda\mu} + \varrho_2 \overset{2}{c}_{\lambda\mu} + \ldots \varrho_\beta \overset{\beta}{c}_{\lambda\mu}$ ist, für $\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$.

Bestimmt man nämlich die Grössen $\overset{0}{c}_{\lambda\mu}$ und $k_{\lambda\mu}$ durch die beiden Gleichungssysteme

$$\sum_\mu \overset{0}{c}_{\lambda\mu} [1\,h\,\mu]_\varkappa = 0$$

$$(4) \qquad \sum_\mu \overset{0}{c}_{\lambda\mu} [g\,h\,\mu]_\varkappa = [g-1\,h\,\lambda]_\varkappa$$

$$\text{und} \quad \sum_\mu k_{\lambda\mu} [g\,h\,\mu]_\varkappa = r_\varkappa [g\,h\,\lambda]_\varkappa$$

wo die Indices $\lambda$, g, h, $\varkappa$ die unter (3) angegebenen Werte zu durchlaufen haben, so ist offenbar

$$c_{\lambda\mu} = \overset{0}{c}_{\lambda\mu} + k_{\lambda\mu} \; (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n).$$

Die $\overset{0}{c}_{\lambda\mu}$ bilden ein System erster Art. Sind die Grössen $r_1\, r_2 \ldots r_{n'}$ alle ganze Zahlen, so bilden die $k_{\lambda\mu}$ ein System zweiter Art und die Aufgabe ist gelöst. Ist dies nicht der Fall, so lassen sich die Grössen $r_1\, r_2 \ldots r_{n'}$ als lineare homogene Functionen einer Anzahl Grössen $\varrho_1\, \varrho_2 \ldots \varrho_\beta$, von denen höchstens eine eine rationale Zahl ist, mit ganzzahligen Coefficienten darstellen.

Man kann also

$$r_\varkappa = \overset{1}{r}_\varkappa \varrho_1 + \overset{2}{r}_\varkappa \varrho_2 \ldots + \overset{\beta}{r}_\varkappa \varrho_\beta \; (\varkappa = 1, 2, \ldots n')$$

setzen und hier bedeuten die $\overset{i}{r}_\varkappa$ ganze Zahlen, die $\varrho_i$ Grössen, zwischen denen keine Relation der Form

$$\alpha_1 \varrho_1 + \alpha_2 \varrho_2 \ldots + \alpha_\beta \varrho_\beta = 0$$

mit ganzzahligen Coefficienten $\alpha_i$ stattfindet.

Ich bestimme nun die Grössen $c^i_{\lambda\mu}$ durch die Gleichungen

$$\sum_\mu c^i_{\lambda\mu}\,[g\,h\,\mu]_\varkappa = r^i_\varkappa\,[g\,h\,\lambda]_\varkappa$$

wo für die Indices $\lambda$, g, h, $\varkappa$ die unter (3) angegebenen Werte und für i die Zahlen 1, 2, . . $\beta$ zu setzen sind.

Die Coefficientensysteme $c^i_{\lambda\mu}$ sind offenbar Systeme zweiter Art und sie genügen den Gleichungen

$$\varrho_1\,c^1_{\lambda\mu} + \varrho_2\,c^2_{\lambda\mu} \ldots + \varrho_\beta\,c^\beta_{\lambda\mu} = k_{\lambda\mu} = c_{\lambda\mu} - c^0_{\lambda\mu} (\lambda,\mu = 1,2,..n)$$

Die Differentialgleichungen (2) lassen sich nun durch ein System von Differentialgleichungen derselben Form ersetzen, in denen an Stelle der Grössen $c_{\lambda\mu}$ die Grössen $c^0_{\lambda\mu}$ $c^1_{\lambda\mu} \ldots c^\beta_{\lambda\mu}$ treten.

Ersetzt man in (2) $c_{\lambda\mu}$ durch $c^0_{\lambda\mu} + k_{\lambda\mu}$ und gleichzeitig $b_{\lambda\mu}$ durch $\sum\limits_{\nu=1}^{n} b^0_{\lambda\nu}\,t_{\nu\mu}$, wo $b^0_{\lambda\mu}$ und $t_{\lambda\mu}$ noch näher zu bestimmende Functionen von p bedeuten, so gehen diese Gleichungen über in:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left\{\frac{d\,b^0_{\lambda\nu}}{d\,p} - \sum_{\varkappa=1}^{n} b^0_{\lambda\varkappa}\,c^0_{\varkappa\nu}\right\} t_{\nu\mu} + \sum_{\nu=1}^{n}\left\{\frac{d\,t_{\nu\mu}}{d\,p} - \sum_{\varkappa=1}^{n} t_{\nu\varkappa}\,k_{\varkappa\mu}\right\} b^0_{\lambda\nu}$$

$$+ \sum_{\varkappa=1}^{n} b^0_{\lambda\varkappa}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}(c^0_{\varkappa\nu}\,t_{\nu\mu} - t_{\varkappa\nu}\,c^0_{\nu\mu})\right\} = 0.$$

Ich behaupte, dieses Gleichungssystem lässt sich durch die beiden folgenden ersetzen:

$$\frac{d\,b^0_{\lambda\mu}}{d\,p} = \sum_\varkappa b^0_{\lambda\varkappa}\,c^0_{\varkappa\mu} \text{ und } \frac{d\,t_{\lambda\mu}}{d\,p} = \sum_\varkappa t_{\lambda\varkappa}\,k_{\varkappa\mu}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$b^0_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu} \quad t_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu} \text{ für } p = 0 \ (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

Zum Beweise hat man nur zu zeigen, dass, wenn man die $t_{\lambda\mu}$ durch das zweite dieser Gleichungssysteme bestimmt,

$$s_{\lambda\mu} = \sum_\nu (c^0_{\lambda\nu}\, t_{\nu\mu} - t_{\lambda\nu}\, c^0_{\nu\mu}) = 0 \text{ ist für } \lambda, \mu = 1, 2, .\, n$$

Nun ergeben aber diese Differentialgleichungen mit Rücksicht auf (4)

$$\sum_\mu t_{\lambda\mu}\,[g\,h\,\mu]_\varkappa = e^{r_\varkappa p}\,[g\,h\,\lambda]_\varkappa$$

Aus dieser Gleichung und aus (4) folgt

$$\sum_\mu s_{\lambda\mu}\,[g\,h\,\mu]_\varkappa = 0$$

für alle unter (3) angegebenen Werte der Indices $\lambda$, g, h, $\varkappa$.

Da die Determinante der $[g\,h\,\mu]_\varkappa$ nicht verschwindet, hat dies zur Folge, dass $s_{\lambda\mu} = 0$ ist, für $\lambda, \mu = 1, 2 \ldots n$.

Indem man der Reihe nach

$$t_{\lambda\mu} = \sum_\nu b^1_{\lambda\nu}\, t^1_{\nu\mu} \quad t^1_{\lambda\mu} = \sum_\nu b^2_{\lambda\nu}\, t^2_{\nu\mu} \text{ u. s. w. } (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

setzt, überzeugt man sich, dass sich die Differentialgleichungen (2) mit den Anfangsbedingungen $b_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu}$ für $p = 0$ ersetzen lassen durch die folgenden:

$$\frac{d b^0_{\lambda\mu}}{dp} = \sum_\nu b^0_{\lambda\nu} c^0_{\nu\mu}$$

$$\frac{d b^1_{\lambda\mu}}{dp} = \sum_\nu b^1_{\lambda\nu} c^1_{\nu\mu}$$

$$\frac{d b^2_{\lambda\mu}}{dp} = \sum_\nu b^2_{\lambda\nu} c^2_{\nu\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{d b^\beta_{\lambda\mu}}{dp} = \sum_\nu b^\beta_{\lambda\nu} c^\beta_{\nu\mu}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$b^i_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu} \text{ für } p = 0 \quad (i = 0, 1. 2, \ldots \beta)$$

Durch Integration dieser Differentialgleichungen erhält man die $b^0_{\lambda\mu}$ als ganze Functionen von p, und die $b^i_{\lambda\mu}$ als rationale Functionen von $q_i = e^{\varrho_i p}$ $(i = 1, 2, \ldots \beta)$.

Die Substitutionscoefficienten $b_{\lambda\mu}$ sind ganze Functionen der $b^0_{\lambda\mu}$ $b^1_{\lambda\mu} \ldots b^\beta_{\lambda\mu}$ also rationale Functionen von p, $q_1$, $q_2$ .. $q_\beta$. Nun sollte die Gleichung $f((y)) = f((x))$, wenn man in derselben $y_\lambda = \sum_\mu b_{\lambda\mu} x_\mu$ setzt, für alle Werte der x und für alle Werte von p bestehen. Da aber infolge der über die Grössen $\varrho_i$ gemachten Voraussetzung zwischen p und den transcendenten Functionen $q_1$ $q_2$ .. $q_\beta$ von p keine algebraische Beziehung bestehen kann, so muss die Gleichung $f((y)) = f((x))$ auch dann noch erfüllt sein, wenn man die Grössen $q_1$ $q_2$ .. $q_\beta$ als unabhängig variabel betrachtet. f wird also durch jede der Substitutionen

$$y_\lambda = \sum_\mu b^i_{\lambda\mu} x_\mu \quad (i = 0, 1, 2, \ldots \beta)$$

in sich selbst transformirt und genügt folglich den $\beta + 1$ Differentialgleichungen

$$\sum_\lambda \sum_\mu c^i_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \ldots \beta)$$

Wir haben also den Satz:

Genügt eine rationale und homogene Function $f((x))$ den m partiellen Differentialgleichungen

$$\sum_\lambda \sum_\mu c^i_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

aber keiner weiteren, von diesen linear unabhängigen derselben Form, so kann man, indem man nötigen Falls diese Gleichungen durch lineare Combinationen derselben ersetzt, stets bewirken, dass die Fundamentaldeterminante jedes der Coefficientensysteme $c^i_{\lambda\mu}$ entweder durch $r^n$ teilbar ist, oder nur Elementarteiler erster Ordnung besitzt und nur für ganzzahlige Werte von r verschwindet.

## V.

### Integration der Differentialgleichungen ($\alpha$).

Der bisherigen Untersuchung lag die Annahme zu Grund, dass die Function f durch eine lineare Substitution mit m verfügbaren Coefficienten in sich selbst transformirt werde. Es ergab sich, dass f einer gewissen Anzahl von linear unabhängigen Differentialgleichungen der Form

$$\sum_\lambda \sum_\mu c_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = 0$$

genügen muss. Von der Zahl $m'$ dieser Differentialgleichungen konnten wir nur nachweisen, dass sie nicht kleiner als m sein kann.

Wir nehmen nunmehr an, die homogene Function f genüge den m linear unabhängigen Differentialgleichungen

$$(\gamma) \quad \sum_\lambda \sum_\mu c^i_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = 0 \quad (i = 1, 2, .. m)$$

aber keiner weiteren von diesen linear unabhängigen derselben Form. Die Annahme, diese Differentialgleichungen seien linear unabhängig, schliesst nicht aus, dass eine Anzahl dieser Differentialgleichungen eine Folge der übrigen sein kann.

Wir setzen ausserdem voraus, jedes der Coefficientensysteme $c^i_{\lambda\mu}$ sei von der ersten oder von der zweiten Art.

Diese Coefficienten $c^i_{\lambda\mu}$ genügen einem Gleichungssystem der Form:

$$(\varepsilon) \quad \sum_{\nu=1}^{n} (c^i_{\lambda\nu} c^k_{\nu\mu} - c^i_{\nu\mu} c^k_{\lambda\nu}) = \sum_{\gamma=1}^{m} \varepsilon^{ik}_\gamma c^\gamma_{\lambda\mu}$$
$$(\lambda, \mu = 1, 2, .. n;\ i, k = 1, 2, .. m)$$

Es lassen sich nun sofort m elementare Substitutionen $B_i$ angeben, welche f in sich selbst transformiren.

Bilden die $c^i_{\lambda\mu}$ ein System erster Art, so bestimme ich die Substitutionscoefficienten $b^i_{\lambda\mu}$ durch die Differentialgleichungen

$$\frac{d b^i_{\lambda\mu}}{d p_i} = \sum_{\nu=1}^{n} b^i_{\lambda\nu} c^i_{\nu\mu} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, .. n)$$

und die Anfangswerte $b^i_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu}$ für $p_i = 0$. Bilden die $c^i_{\lambda\mu}$ ein System der zweiten Art, so ist in den vorstehenden Gleichungen $p_i$ durch $\log p_i$ zu ersetzen.

Je nachdem der eine oder der andere Fall eintritt nenne ich $p_i$ einen Parameter erster oder zweiter Art und den Wert $p_i = 0$ beziehungsweise $p_i = 1$ seinen Anfangswert.

Die Function f wird nun durch jede der Substitutionen

$$
\begin{array}{lll}
B_1 & y_\lambda = \sum\limits_\mu b^1_{\lambda\mu}\, y^1_\mu & \\
B_2 & y^1_\lambda = \sum\limits_\mu b^2_{\lambda\mu}\, y^2_\mu & \\
B_3 & y^2_\lambda = \sum\limits_\mu b^3_{\lambda\mu}\, y^3_\mu & \lambda = 1, 2, \ldots n \\
\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\
B_{m-1} & y^{m-2}_\lambda = \sum\limits_\mu b^{m-1}_{\lambda\mu}\, y^{m-1}_\mu & \\
B_m & y^{m-1}_\lambda = \sum\limits_\mu b^m_{\lambda\mu}\, x_\mu &
\end{array}
$$

folglich auch durch die aus diesen Substitutionen zusammengesetzte Substitution

$$(A) \quad y_\lambda = \sum_\mu a_{\lambda\mu}\, x_\mu$$

in sich selbst transformirt.

Die Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ sind ganze Functionen der Parameter erster Art und wenigstens rationale Functionen der Parameter zweiter Art. Unstetig können sie nur werden, wenn einer der Parameter zweiter Art verschwindet oder für unendlich grosse Werte der Parameter. Den Anfangswerten der Parameter entsprechen die Werte $a_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu}$.

Die Determinante der $a_{\lambda\mu}$ ist gleich dem Producte der Determinanten der elementaren Substitutionen $B_i$, also gleich einem Producte aus ganzen Potenzen der Parameter zweiter Art, da die Determinante einer elementaren Substitution erster

Art gleich 1 und die Determinante einer elementaren Substitution zweiter Art gleich einer ganzen Potenz des entsprechenden Parameters ist.

Man kann auf dem im zweiten Abschnitt eingeschlagenen Wege beweisen, dass die Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ einem System von Differentialgleichungen der Form

$$(\alpha)\quad \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_i} = \sum_\nu a_{\lambda\nu} C^i_{\nu\mu}\ (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n;\ i = 1, 2, \ldots m)$$

genügen, wo

$$(\pi)\quad C^i_{\lambda\mu} = \sum_{j=1}^{m} P^i_j c^j_{\lambda\mu}$$

ist und die Grössen $P^i_j$ rationale Functionen der Parameter p sind. Ich will jedoch im folgenden für diese Gleichungen einen Beweis erbringen, der sich nur auf die Definition der Substitution A durch die elementaren Substitutionen $B_i$ und auf die durch die Gleichungen ($\varepsilon$) ausgedrückten Eigenschaften der Coefficienten $c^i_{\lambda\mu}$ stützt.

Dieser Beweis beruht auf folgendem Hülfssatz:

Die $n^2$ durch die Gleichungen

$$\sum_\nu c^h_{\lambda\nu} b^i_{\nu\mu} = \sum_\nu b^i_{\lambda\nu} q_{\nu\mu}\ (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

definirten rationalen Functionen $q_{\lambda\mu}$ von $p_i$ lassen sich darstellen in der Form

$$q_{\lambda\mu} = s_1 c^1_{\lambda\mu} + s_2 c^2_{\lambda\mu} \ldots + s_m c^m_{\lambda\mu}\ (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

wo $s_1\ s_2 \ldots s_m$ rationale Functionen von $p_i$ sind.

Beim Beweise ist zu unterscheiden, ob die elementare Substitution $B_i$ erster oder zweiter Art ist. Im ersteren Fall lässt sich $q_{\lambda\mu}$ nach dem Maclaurin'schen Satze entwickeln.

Für $p_i = 0$ ist $b^i_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu}$ also $q_{\lambda\mu} = c^h_{\lambda\mu}$.

Zur Berechnung der Differentialquotienten von $q_{\lambda\mu}$ erhält man zunächst die Gleichung

$$\sum_\nu \left( c^h_{\lambda\nu} \frac{d b^i_{\nu\mu}}{d p_i} - \frac{d b^i_{\lambda\nu}}{d p_i} q_{\nu\mu} \right) - \sum_\nu b^i_{\lambda\nu} \frac{d q_{\nu\mu}}{d p_i} = 0 \ (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

Nun ist $\dfrac{d b^i_{\nu\mu}}{d p_i} = \sum\limits_\varkappa b^i_{\nu\varkappa} c^i_{\varkappa\mu}$ folglich

$$\sum_\nu c^h_{\lambda\nu} \frac{d b^i_{\nu\mu}}{d p_i} = \sum_\varkappa \left\{ \sum_\nu c^h_{\lambda\nu} b^i_{\nu\varkappa} \right\} c^i_{\varkappa\mu} = \sum_\varkappa \left\{ \sum_\nu b^i_{\lambda\nu} q_{\nu\varkappa} \right\} c^i_{\varkappa\mu}$$

Nach Substitution dieser Werte erhalten die obigen Gleichungen die Form

$$\sum_\nu b^i_{\lambda\nu} \left\{ \sum_\varkappa (q_{\nu\varkappa} c^i_{\varkappa\mu} - c^i_{\nu\varkappa} q_{\varkappa\mu}) - \frac{d q_{\nu\mu}}{d p_i} \right\} = 0 \ (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

Da die Determinante der $b^i_{\lambda\mu}$ nicht verschwindet, so folgt aus diesen Gleichungen

$$\frac{d q_{\nu\mu}}{d p_i} = \sum_\varkappa (q_{\nu\varkappa} c^i_{\varkappa\mu} - c^i_{\nu\varkappa} q_{\varkappa\mu}) \ (\nu, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

Für $p_i = 0$ wird

$$\left( \frac{d q_{\nu\mu}}{d p_i} \right)_{p_i = 0} = \sum_\varkappa (c^h_{\nu\varkappa} c^i_{\varkappa\mu} - c^i_{\nu\varkappa} c^h_{\varkappa\mu}) = \sum_{j=1}^m \varepsilon^{hi}_j c^j_{\nu\mu}$$

Die Gleichung

$$\frac{d^2 q_{\nu\mu}}{d p_i^2} = \sum_\varkappa \left( \frac{d q_{\nu\varkappa}}{d p_i} c^i_{\varkappa\mu} - c^i_{\nu\varkappa} \frac{d q_{\varkappa\mu}}{d p_i} \right)$$

zeigt, dass sich auch $\left( \dfrac{d^2 q_{\nu\mu}}{d p_i^2} \right)_{p_i = 0}$ als lineare und homogene Function von $\overset{1}{c}_{\nu\mu}\,\overset{2}{c}_{\nu\mu}\ldots\overset{m}{c}_{\nu\mu}$ darstellen lässt, und dasselbe gilt für alle höheren Differentialquotienten. Daraus folgt, dass sich $q_{\nu\mu}$ in der Form

$$q_{\nu\mu} = s_1\,\overset{1}{c}_{\nu\mu} + s_2\,\overset{2}{c}_{\nu\mu} \ldots + s_m\,\overset{m}{c}_{\nu\mu}\;(\nu, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

darstellen lässt, wo $s_1\, s_2 \ldots s_m$ Functionen von $p_i$ sind.

Da die Coefficientensysteme $\overset{1}{c}_{\lambda\mu}\,\overset{2}{c}_{\lambda\mu}\ldots\overset{m}{c}_{\lambda\mu}$ linear unabhängig sind, so sind die Functionen s vollkommen bestimmt; sie sind rationale Functionen der $q_{\lambda\mu}$, also auch rationale Functionen von $p_i$.

Ist die elementare Substitution $B_i$ von der zweiten Art, so hat man $q_{\lambda\mu}$ nicht nach Potenzen von $p_i$, sondern nach Potenzen von $p_i - 1$ zu entwickeln; im übrigen ist der Beweis ganz analog zu führen.

Durch wiederholte Anwendung des eben bewiesenen Satzes gelangt man leicht zu der folgenden Verallgemeinerung:

Bestimmt man $n^2$ Grössen $q_{\lambda\mu}$ durch die Gleichungen

$$\sum_\nu \overset{h}{c}_{\lambda\nu}\,\overset{i}{b}_{\nu\mu} = \sum_\nu \overset{i}{b}_{\lambda\nu}\,q_{\nu\mu}$$

hierauf $n^2$ Grössen $q'_{\lambda\mu}$ durch die Gleichungen

$$\sum_\nu q_{\lambda\nu}\,\overset{j}{b}_{\nu\mu} = \sum_\nu \overset{j}{b}_{\lambda\nu}\,q'_{\nu\mu}$$

hierauf $n^2$ Grössen $q''_{\lambda\mu}$ durch die Gleichungen

$$\sum_\nu q'_{\lambda\nu}\,\overset{k}{b}_{\nu\mu} = \sum_\nu \overset{k}{b}_{\lambda\nu}\,q''_{\lambda\mu}$$

u. s. w.

so lassen sich die Grössen $q_{\lambda\mu}\; q'_{\lambda\mu}\; q''_{\lambda\mu}\;\ldots$ darstellen in der Form

$$q_{\lambda\mu} = s_1 \overset{1}{c}_{\lambda\mu} + s_2 \overset{2}{c}_{\lambda\mu} \ldots + s_m \overset{m}{c}_{\lambda\mu}$$

$$q'_{\lambda\mu} = s'_1 \overset{1}{c}_{\lambda\mu} + s'_2 \overset{2}{c}_{\lambda\mu} \ldots + s'_m \overset{m}{c}_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, . n$$

$$q''_{\lambda\mu} = s''_1 \overset{1}{c}_{\lambda\mu} + s''_2 \overset{2}{c}_{\lambda\mu} \ldots + s''_m \overset{m}{c}_{\lambda\mu}$$

u. s. w.

und hier sind die Grössen $s_1\ s_2 \ldots$ rationale Functionen von $p_i$

die Grössen $s'_1\ s'_2 \ldots$ rationale Functionen von $p_i$ und $p_j$

die Grössen $s''_1\ s''_2 \ldots$ rationale Functionen von $p_i$ $p_j$ und $p_k$ u. s. w.

Dieser Satz führt zu einem einfachen Beweis der Gleichungen $(\alpha)$ und $(\pi)$.

Die Gleichungssysteme $B_i$ und $A$ definiren die Grössen $y_\lambda\ \overset{1}{y}_\lambda\ \overset{2}{y}_\lambda \ldots \overset{m-1}{y}_\lambda$ als Functionen der Grössen $x_1\ x_2 \ldots x_n$ und der Parameter $p_1\ p_2 \ldots p_m$, und zwar ist, da der Parameter $p_i$ nur in die Coefficienten der Substitution $B_i$ aber nicht in die Coefficienten der übrigen Substitutionen $B_j$ eingeht

$y_\lambda$ Function von $x_1\ x_2 \ldots x_n$ und $p_1\ p_2\ p_3 \ldots p_m$

$\overset{1}{y}_\lambda$ Function von $x_1\ x_2 \ldots x_n$ und $p_2\ p_3 \ldots p_m$

$\overset{2}{y}_\lambda$ Function von $x_1\ x_2 \ldots x_n$ und $p_3 \ldots p_m$ $\lambda = 1, 2, .. n$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\overset{m-1}{y}_\lambda$ Function von $x_1\ x_2 \ldots x_n$ und $p_m$

Durch partielle Differentiation nach $p_i$ ergibt sich daher:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial y_\lambda}{\partial p_i} = \sum_\mu b^1_{\lambda\mu} \frac{\partial y^1_\mu}{\partial p_i} \\
&\frac{\partial y^1_\lambda}{\partial p_i} = \sum_\mu b^2_{\lambda\mu} \frac{\partial y^2_\mu}{\partial p_i} \\
&\frac{\partial y^2_\lambda}{\partial p_i} = \sum_\mu b^3_{\lambda\mu} \frac{\partial y^3_\mu}{\partial p_i} \\
&\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
(\mathrm{d}) \qquad &\frac{\partial y^{i-2}_\lambda}{\partial p_i} = \sum_\mu b^{i-1}_{\lambda\mu} \frac{\partial y^{i-1}_\mu}{\partial p_i} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n \\
&\frac{\partial y^{i-1}_\lambda}{\partial p_i} = \sum_\mu \frac{d\, b^i_{\lambda\mu}}{d p_i} y^i_\mu \\
&y^i_\lambda = \sum_\mu b^{i+1}_{\lambda\mu} y^{i+1}_\mu \\
&\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&y^{m-1}_\lambda = \sum_\mu b^m_{\lambda\mu} x_\mu
\end{aligned}
$$

Nun ist

$$\frac{d\, b^i_{\lambda\mu}}{d p_i} = \sum_\nu b^i_{\lambda\nu} c^i_{\nu\mu} \text{ oder } = \frac{1}{p_i} \sum_\nu b^i_{\lambda\nu} c^i_{\nu\mu}$$

je nachdem die elementare Substitution $B_i$ von der ersten oder der zweiten Art ist.

Angenommen, es finde der erste Fall statt — der zweite ist ganz analog zu behandeln — dann ist

$$\frac{\partial y^{i-1}_\lambda}{\partial p_i} = \sum_\mu \sum_\nu b^i_{\lambda\nu} c^i_{\nu\mu} y^i_\mu \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich durch die beiden folgenden ersetzen:

$$\frac{\partial y_\lambda^{i-1}}{\partial p_i} = \sum_\mu b_{\lambda\mu}^i z_\mu^i \qquad z_\lambda^i = \sum_\mu c_{\lambda\mu}^i y_\mu^i \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

In dem zweiten Gleichungssystem führe ich für $y_\mu^i$ seinen aus dem $i + 1^{\text{ten}}$ der Gleichungssysteme (d) folgenden Wert und an Stelle der Grössen $c_{\lambda\mu}^i$ die Grössen $q_{\lambda\mu}$ ein, welche aus den Gleichungen

$$\sum_\mu c_{\lambda\mu}^i b_{\mu\nu}^{i+1} = \sum_\mu b_{\lambda\mu}^{i+1} q_{\mu\nu} \quad (\lambda, \nu = 1, 2, \ldots n)$$

zu berechnen sind. Wir erhalten

$$z_\lambda^i = \sum_\mu \sum_\nu c_{\lambda\mu}^i b_{\mu\nu}^{i+1} y_\nu^{i+1} = \sum_\mu \sum_\nu b_{\lambda\mu}^{i+1} q_{\mu\nu} y_\nu^{i+1} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

Dieses Gleichungssystem ersetzen wir durch die beiden folgenden:

$$z_\lambda^i = \sum_\mu b_{\lambda\mu}^{i+1} z_\mu^{i+1} \qquad z_\lambda^{i+1} = \sum_\mu q_{\lambda\mu} y_\mu^{i+1} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

Das zweite von diesen Gleichungssystemen und das $i + 2^{\text{te}}$ der Gleichungssysteme (d) ersetzen wir nun durch

$$z_\lambda^{i+1} = \sum_\mu b_{\lambda\mu}^{i+2} z_\mu^{i+2} \quad \text{und} \quad z_\lambda^{i+2} = \sum_\mu q'_{\lambda\mu} y_\mu^{i+2} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

wo die Grössen $q'_{\lambda\mu}$ durch die Gleichungen

$$\sum_\mu q_{\lambda\mu} b_{\mu\nu}^{i+2} = \sum_\mu b_{\lambda\mu}^{i+2} q'_{\mu\nu} \quad (\lambda, \nu = 1, 2, \ldots n)$$

bestimmt sind.

In dieser Weise fortfahrend erkennt man leicht, dass sich die letzten $m - i + 1$ der Gleichungssysteme (d) ersetzen lassen durch die folgenden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y_\lambda^{i-1}}{\partial p_i} &= \sum_\mu b_{\lambda\mu}^i \; z_\mu^i \\
z_\lambda^i &= \sum_\mu b_{\lambda\mu}^{i+1} \; z_\mu^{i+1} \\
z_\lambda^{i+1} &= \sum_\mu b_{\lambda\pi}^{i+2} \; z_\mu^{i+2} \qquad\qquad \lambda = 1, 2, \ldots n \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
z_\lambda^{m-1} &= \sum_\mu b_{\lambda\mu}^m \; z_\mu^m \\
z_\lambda^m &= \sum_\mu C_{\lambda\mu}^i \; x_\mu
\end{aligned}$$

und nach dem eben bewiesenen Hülfssatz lassen sich die Grössen $C_{\lambda\mu}^i$ darstellen in der Form

$$C_{\lambda\mu}^i = P_1^i \, c_{\lambda\mu}^1 + P_2^i \, c_{\lambda\mu}^2 \ldots + P_m^i \, c_{\lambda\mu}^m \; (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

wo $P_1^i \; P_2^i \ldots P_m^i$ rationale Functionen von $p_1 \; p_2 \ldots p_m$ sind.

Nun ergibt sich aus der Definition der Substitution A, dass

$$\frac{\partial y_\lambda}{\partial p_i} = \sum_\mu a_{\lambda\mu} \, z_\mu^m = \sum_\mu \sum_\nu a_{\lambda\nu} \, C_{\nu\mu}^i \, x_\mu \;\text{ ist,}$$

und da diese Gleichungen für beliebige Werte der x gelten, folgt hieraus

$$\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_i} = \sum_\nu a_{\lambda\nu} \, C_{\nu\mu}^i \quad \text{w. z. b. w.}$$

Für die Anfangswerte der Parameter wird

$$b_{\lambda\mu}^i = \binom{\lambda}{\mu} \;\text{ und }\; \frac{d b_{\lambda\mu}^i}{d p_i} = c_{\lambda\mu}^i \; (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n; \; i = 1, 2, \ldots m).$$

Für diese Werte ergeben daher die Gleichungen (d)

$$\frac{\partial y_\lambda}{\partial p_i} = \sum_\mu c^i_{\lambda\mu} x_\mu \text{ woraus}$$

$$\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_i} = c^i_{\lambda\mu} \text{ folgt.}$$

Für die Anfangswerte der Parameter ist somit $P^i_j = \binom{i}{j}$, also die Determinante der $P^i_j$ gleich 1. Diese Determinante verschwindet also nicht identisch und hieraus folgt, wie im II. Abschnitt gezeigt wurde, dass m von den Substitutions-Coefficienten $a_{\lambda\mu}$ vorgeschriebene Werte erhalten können.

Damit ist der Satz bewiesen:

Wird eine homogene und rationale Function der Variabeln $x_1\ x_2 \ldots x_n$ $f((x))$ durch eine lineare Substitution, von deren Coefficienten m verfügbar bleiben, in sich selbst transformirt, so genügt sie m linear unabhängigen partiellen Differentialgleichungen $(\gamma)$, deren Coefficientensysteme von der ersten oder von der zweiten Art sind.

Und umgekehrt, genügt die homogene Function $f((x))$ m, aber nicht mehr, Differentialgleichungen der angegebenen Art, so wird sie durch eine lineare Substitution, deren Coefficienten sich als rationale Functionen von m unabhängig variablen Parametern darstellen lassen, in sich selbst transformirt.

Diese Darstellung gibt aber nicht notwendig a l l e Substitutionen, durch die $f((x))$ in sich selbst transformirt wird; sie gibt nur diejenigen, welche durch ein irreductibles System algebraischer Gleichungen definirt sind, denen auch die Coefficienten der identischen Substitutionen genügen.

## VI.

## Ueber das Gleichungssystem $a_{\lambda\mu}((\eta)) = \sum_\nu a_{\lambda\nu}((\xi))\, a_{\nu\mu}((p))$.

Wird eine Function durch die Substitutionen

$$y_\lambda = \sum_\mu a_{\lambda\mu}((\xi))\, y'_\mu \quad \text{und} \quad y'_\lambda = \sum_\mu a_{\lambda\mu}((p))\, x_\mu \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

in sich selbst transformirt, so wird sie auch durch die aus diesen beiden Substitutionen zusammengesetzte Substitution

$$y_\lambda = \sum_\mu \left\{ \sum_\nu a_{\lambda\nu}((\xi))\, a_{\nu\mu}((p)) \right\} x_\mu$$

in sich selbst transformirt. Aber es ist nicht von vornherein klar, dass diese Substitution einer Substitution der Form

$$y_\lambda = \sum_\mu a_{\lambda\mu}((\eta))\, x_\mu$$

äquivalent ist. Es soll daher im Folgenden bewiesen werden, dass es eine endliche Anzahl von Wertsystemen $\eta_1\ \eta_2 \ldots \eta_m$ gibt, welche den $n^2$ Gleichungen

$$(1) \quad a_{\lambda\mu}((\eta)) = \sum_\nu a_{\lambda\nu}((\xi))\, a_{\nu\mu}((p)) \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

genügen. Dieser Beweis lässt sich auf den Beweis des folgenden einfacheren Satzes zurückführen:

Es gibt eine endliche Anzahl von Wertsystemen, welche den $n^2$ Gleichungen

$$(2) \quad a_{\lambda\mu}((\eta)) = \sum_\nu a_{\lambda\nu}((\xi))\, b^i_{\nu\mu}(p) \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

genügen.

Setzt man nämlich in den letzteren Gleichungen der Reihe nach

$$
\begin{array}{llll}
i = 1;\ p = p_1; & \eta_1 = \eta_1^1 & \eta_2 = \eta_2^1 & \ldots \eta_m = \eta_m^1 \\
 & \xi_1 = \xi_1 & \xi_2 = \xi_2 & \ldots \xi_m = \xi_m \\
i = 2;\ p = p_2; & \eta_1 = \eta_1^2 & \eta_2 = \eta_2^2 & \ldots \eta_m = \eta_m^2 \\
 & \xi_1 = \eta_1^1 & \xi_2 = \eta_2^1 & \ldots \xi_m = \eta_m^1 \\
i = 3;\ p = p_3; & \eta_1 = \eta_1^3 & \eta_2 = \eta_2^3 & \ldots \eta_m = \eta_m^3 \\
 & \xi_1 = \eta_1^2 & \xi_2 = \eta_2^2 & \ldots \xi_m = \eta_m^2 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
i = m;\ p = p_m; & \eta_1 = \eta_1 & \eta_2 = \eta_2 & \ldots \eta_m = \eta_m \\
 & \xi_1 = \eta_1^{m-1} & \xi_2 = \eta_2^{m-1} & \ldots \xi_m = \eta_m^{m-1}
\end{array}
$$

so genügen die so bestimmten Werte $\eta_1\ \eta_2\ ..\ \eta_m$ den Gleichungen (1).

Nehmen wir zunächst an, die Gleichungen (2) seien erfüllt. Betrachten wir $\xi_1\ \xi_2\ ..\ \xi_m$ als constant, p als variabel, so dass $\eta_1\ \eta_2\ ..\ \eta_m$ algebraische Functionen von p sind. Die Constanten $\xi$ seien der Art, dass keiner der Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}((\xi))$ unendlich ist, dass die Determinante der $a_{\lambda\mu}((\xi))$ nicht verschwindet und dass auch die Determinante der $P_j^i((\xi))$ nicht verschwindet.

Aus den Gleichungen (2) ergibt sich durch Differentiation

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial a_{\lambda\mu}((\eta))}{\partial \eta_j} \frac{d\eta_j}{dp} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}((\xi)) \frac{d b_{\nu\mu}^{i}(p)}{dp}$$

Nun ist

$$\frac{\partial a_{\lambda\mu}((\eta))}{\partial \eta_j} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}((\eta))\, C_{\nu\mu}^{j}((\eta))$$

und — unter der Voraussetzung, dass die elementare Substitution $B_i$ von der ersten Art ist, auf welchen Fall ich mich beschränke, da der Beweis im Falle, dass $B_i$ von der zweiten Art ist, ganz analog zu führen ist —

$$\frac{d b_{\nu\mu}^{i}}{dp} = \sum_{\varkappa=1}^{n} b_{\nu\varkappa}^{i}\, c_{\varkappa\mu}^{i}$$

Mit Rücksicht auf (2) folgt somit

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}((\eta)) \left\{ \sum_{j=1}^{m} C^j_{\nu\mu}((\eta)) \frac{d\eta_j}{dp} - c^i_{\nu\mu} \right\} = 0 \ (\lambda, \mu = 1, 2, .. n)$$

Soll die Determinante der $a_{\lambda\mu}((\eta))$ nicht verschwinden, so muss somit

$$\sum_{j=1}^{m} C^j_{\nu\mu}((\eta)) \frac{d\eta_j}{dp} - c^i_{\nu\mu} = 0 \text{ sein für } \nu, \mu = 1, 2, .. n$$

Hieraus folgt, wenn man $C^j_{\nu\mu}((\eta))$ durch $\sum_{k=1}^{m} P^j_k((\eta)) c^k_{\nu\mu}$ ersetzt und beachtet, dass die $c^k_{\nu\mu}$ linear unabhängig sind:

$$(3) \quad \sum_{j=1}^{m} P^j_k((\eta)) \frac{d\eta_j}{dp} = \binom{k}{i} \ (k = 1, 2, .. m)$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$(4) \quad \frac{d\eta_j}{dp} = Q^i_j((\eta)) \ (j = 1, 2, .. m)$$

wo die Functionen $Q^i_j$ durch die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{m} P^j_k Q^k_h = \binom{h}{j} \ (h, j = 1, 2, .. m)$$

bestimmt sind.

Gibt es also Werte $\eta_1 \eta_2 .. \eta_m$, welche den Gleichungen (2) genügen, so genügen dieselben als Functionen von p betrachtet, den vorstehenden Differentialgleichungen. Ausserdem müssen die dem Wert $p = 0$ entsprechenden Anfangswerte der $\eta$ die Gleichungen

$$a_{\lambda\mu}((\eta)) = a_{\lambda\mu}((\xi)) \ (\lambda, \mu = 1, 2, .. n)$$

befriedigen.

Ich beweise nun, dass auch umgekehrt die Functionen $\eta_1\ \eta_2 \ldots \eta_m$ von p, welche durch die Differentialgleichungen (3) oder (4) und die Anfangswerte $\eta_k = \xi_k$ für $p = 0$ bestimmt sind, den Gleichungen (2) genügen.

Ersetzt man in den Ausdrücken

$$q_{\lambda\mu} = a_{\lambda\mu}((\eta)) - \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}((\xi))\, b^{i}_{\nu\mu}(p) \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

die Grössen $\eta_1\ \eta_2 \ldots \eta_m$ durch ihre Werte in Function von p, so werden die $n^2$ Grössen $q_{\lambda\mu}$ Functionen von p. Durch Differentiation nach p ergibt sich:

$$\frac{dq_{\lambda\mu}}{dp} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial a_{\lambda\mu}((\eta))}{\partial \eta_j} \frac{d\eta_j}{dp} - \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}((\xi)) \frac{d b^{i}_{\nu\mu}(p)}{dp}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}((\eta))\, C^{j}_{\nu\mu}((\eta)) \frac{d\eta_j}{dp} - \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\lambda\nu}((\xi))\, b^{i}_{\nu\varkappa}(p)\, c^{i}_{\varkappa\mu}$$

Da aber $\eta_1\ \eta_2 \ldots \eta_m$ den Differentialgleichungen (2) genügen, so ist

$$\sum_{j=1}^{m} C^{j}_{\nu\mu}((\eta)) \frac{d\eta_j}{dp} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} P^{j}_{k}((\eta)) \frac{d\eta_j}{dp} c^{k}_{\nu\mu} = c^{i}_{\nu\mu}$$

Folglich ist

$$\frac{dq_{\lambda\mu}}{dp} = \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ a_{\lambda\nu}((\eta)) - \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\lambda\varkappa}((\xi))\, b^{i}_{\varkappa\nu}(p) \right\} c^{i}_{\nu\mu}$$

Oder $$\frac{dq_{\lambda\mu}}{dp} = \sum_{\nu=1}^{n} q_{\lambda\nu}\, c^{i}_{\nu\mu} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

Nun ist für $p = 0$ $q_{\lambda\mu} = 0$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$, daher verschwinden für $p = 0$ auch alle Differentialquotienten $\frac{dq_{\lambda\mu}}{dp}$ und ebenso alle höheren Differentialquotienten. Die

$n^2$ Functionen $q_{\lambda\mu}$ sind daher identisch Null, was zu beweisen war.

Damit ist, wie bereits oben ausgeführt wurde, bewiesen, dass es bei beliebig gegebenen Werten von $\xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_m$ und $p_1\ p_2 \ldots p_m$ eine endliche Anzahl von Wertsystemen gibt, welche den Gleichungen (1) genügen. Durch diese Gleichungen sind also m algebraische Functionen der $\xi$ und der p

$$\eta_i = \varphi_i(\xi|p) \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

definirt.

In ganz analoger Weise kann man beweisen, dass es bei beliebig gegebenen Werten von $\eta_1\ \eta_2 \ldots \eta_m$ und $\xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_m$ eine endliche Anzahl von Wertsystemen $p_1\ p_2 \ldots p_m$ gibt, welche den Gleichungen (1) genügen.

Es gibt also insbesondere Werte von $p_1\ p_2 \ldots p_m$, welche den Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}((\xi))\, a_{\nu\mu}((p)) = \binom{\lambda}{\mu} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

genügen. —

Wir haben den Nachweis für die Existenz der Functionen $\varphi$ erbracht, indem wir dieselben durch eine Reihe von Systemen von Differentialgleichungen definirten, in denen immer nur e i n e unabhängige Variable vorkommt. Wir können die Functionen $\varphi$ aber auch durch ein einziges simultanes System von Differentialgleichungen bestimmen.

Betrachten wir in den Gleichungen (1) die Grössen $\xi$ als constant, die Grössen p und $\eta$ als variabel und bilden unter dieser Voraussetzung von beiden Seiten der Gleichung (1) die vollständigen Differentiale.

Wir erhalten, da wegen ($\alpha$)

$$d a_{\lambda\mu}((\eta)) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial a_{\lambda\mu}((\eta))}{\partial \eta_i}\, d\eta_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}((\eta))\, C^i_{\nu\mu}((\eta))\, d\eta_i$$

$$\text{und} \quad d\, a_{\lambda\mu}((p)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}((p))\, C^{i}_{\nu\mu}((p))\, d\, p_i \ \text{ist,}$$

mit Rücksicht auf (1)

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}((\eta)) \left\{ \sum_{i=1}^{m} (C^{i}_{\nu\mu}((\eta))\, d\, \eta_i - C^{i}_{\nu\mu}((p))\, d\, p_i) \right\} = 0 \ (\lambda, \mu = 1, 2 \ldots n)$$

und hieraus folgt, da die Determinante der $a_{\lambda\mu}((\eta))$ nicht verschwindet

$$\sum_{i=1}^{m} (C^{i}_{\nu\mu}((\eta))\, d\, \eta_i - C^{i}_{\nu\mu}((p))\, d\, p_i) = 0 \ (\nu, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

Führen wir hier für die Functionen $C^{i}_{\nu\mu}$ ihre durch die Gleichungen ($\pi$) gegebenen Werte ein, so folgt, weil die Coefficientensysteme $\overset{1}{c}_{\lambda\mu}\ \overset{2}{c}_{\lambda\mu} \ldots \overset{m}{c}_{\lambda\mu}$ linear unabhängig sind.

$$(5) \quad \sum_{i=1}^{m} P^{i}_{j}((\eta))\, d\, \eta_i = \sum_{i=1}^{m} P^{i}_{j}((p))\, d\, p_i \ (j = 1, 2, \ldots m)$$

Diese Gleichungen bringen eine merkwürdige Eigenschaft der Functionen $\varphi$ zum Ausdruck. Stellt man nämlich für die vorstehenden Differentialgleichungen die Integrabilitätsbedingungen auf, so kommt man zu einem System partieller Differentialgleichungen von der Form der im III. Abschnitt mit (J) und (J') bezeichneten Systeme.

Durch die Differentialgleichungen (5) sind die Grössen $\eta$ als Functionen der p vollkommen bestimmt, sobald noch die den Anfangswerten der p entsprechenden Werte der $\eta$ gegeben sind.

Wie vielwertig die algebraischen Functionen $\varphi$ sind, hängt wesentlich von der Wahl des Parametersystems, welches zur Darstellung der Grössen $a_{\lambda\mu}$ verwendet wird, oder was dasselbe sagen will, von der Wahl der Functionen $P^{i}_{j}$ ab.

Es lässt sich beweisen, dass bei geeigneter Wahl dieses Parametersystems die Functionen $\varphi$ einwertig, also rational sind. Dieser Beweis lässt sich nur auf Grund einer eingehenden Untersuchung der zwischen den Coefficienten $c^{i}_{\lambda\mu}$ bestehenden Beziehungen erbringen, auf welche hier nicht eingegangen werden soll.

## VI.

### Ueber die Functionen $\varphi$.

Betrachtet man die Grössen $\eta_1\ \eta_2\ ..\ \eta_m$ als die ursprünglichen, die Grössen $\xi_1\ \xi_2\ ..\ \xi_m$ als neue Variable und die Grössen $p_1\ p_2\ ..\ p_m$ als verfügbare Parameter, so ist durch die Gleichungen

$$\eta_i = \varphi_i(\xi|p) \quad (i = 1, 2, ..\ m)$$

ein System von Substitutionen definirt. Es lässt sich zeigen, dass dieses Substitutionensystem ein invariantives ist.

Der Beweis stützt sich auf die beiden folgenden Eigenschaften der Functionen $\varphi$:

$$\begin{array}{lll} 1)\ \text{Ist} & \eta_i = \varphi_i(\xi|p) & \\ \text{so ist auch} & \xi_i = \varphi_i(\eta|q) & \end{array} \quad i = 1, 2, ..\ m$$

und hier sind $q_1\ q_2\ ..\ q_m$ Functionen von $p_1\ p_2\ ..\ p_m$ aber unabhängig von $\xi_1\ \xi_2\ ..\ \xi_m$.

$$\begin{array}{ll} 2)\ \text{Ist} & \eta_i = \varphi_i(\xi|p) \\ \text{und} & \zeta_i = \varphi_i(\eta|q) \\ \text{so ist auch} & \zeta_i = \varphi_i(\xi|r) \end{array} \quad i = 1, 2, ..\ m$$

und hier sind $r_1\ r_2\ ..\ r_m$ Functionen von $p_1\ p_2\ ..\ p_m$ und $q_1\ q_2\ ..\ q_m$ aber unabhängig von $\xi_1\ \xi_2\ ..\ \xi_m$.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den im vorigen Abschnitt bewiesenen Sätzen.

Ist $\eta_i = \varphi_i(\xi|p)$, so ist nach der Definition der Functionen $\varphi$

$$a_{\lambda\mu}((\eta)) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}((\xi))\, a_{\nu\mu}((p)) \quad (\lambda, \mu = 1, 2, .. n)$$

Bestimmt man also die Grössen q durch die Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}((p))\, a_{\mu\varkappa}((q)) = \binom{\nu}{\varkappa} \quad (\nu, \varkappa = 1, 2, .. n)$$

so wird

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((\eta))\, a_{\mu\varkappa}((q)) = a_{\lambda\varkappa}((\xi)) \quad (\lambda, \varkappa = 1, 2, .. n)$$

w. z. b. w.

Ist zweitens

$$\zeta_i = \varphi_i(\eta|q) \text{ und } \eta_i = \varphi_i(\xi|p) \quad (i = 1, 2, .. m)$$

so bestehen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} a_{\lambda\mu}((\zeta)) &= \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}((\eta))\, a_{\nu\mu}((q)) \\ a_{\lambda\mu}((\eta)) &= \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}((\xi))\, a_{\nu\mu}((p)) \end{aligned}\right\} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, .. n)$$

aus denen folgt

$$a_{\lambda\mu}((\zeta)) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\lambda\nu}((\xi))\, a_{\nu\varkappa}((p))\, a_{\varkappa\mu}((q))$$

Bestimmt man nun die Grössen r durch die Gleichungen

$$a_{\nu\mu}((r)) = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\nu\varkappa}((p))\, a_{\varkappa\mu}((q)) \quad (\nu, \mu = 1, 2, .. n)$$

so ist $\zeta_i = \varphi_i(\xi|r)$ $(i = 1, 2, .. m)$ w. z. b. w.

Aus den beiden eben bewiesenen Sätzen geht hervor, dass die Gesammtheit der Substitutionen $\varphi$ eine „continuirliche Gruppe" bildet.

Man kann auf diese Substitutionen $\varphi$ ganz ebenso wie auf die linearen Substitutionen eine Definition der Aequivalenz gründen, indem man eine rationale Function von $\xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_m$ und eine rationale Function von $\eta_1\ \eta_2 \ldots \eta_m$ als äquivalent bezeichnet, wenn die erstere durch eine Substitution $\xi_i = \varphi_i(\eta|p)$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ in die letztere transformirt werden kann. Auch für die auf die Substitutionen $\varphi$ gegründete Aequivalenz gilt der Satz, dass zwei Functionen dann und nur dann äquivalent sind, wenn sie zur selben dritten äquivalent sind.

## VIII.

### Ueber die Integrale der Differentialgleichungen ($\gamma$).

Nunmehr kann der Beweis erbracht werden, dass die Differentialgleichungen ($\gamma$) ein Invariantensystem definiren: sie definiren das Invariantensystem der Formen

$$F_\lambda(x|\xi) = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((\xi))\, x_\mu \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

mit den „Coefficienten" $x_1\ x_2 \ldots x_n$ und den „Variabeln" $\xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_m$.

Führen wir an Stelle der Variabeln $\xi$ neue Variable ein mittelst der Substitutionen

$$\xi_i = \varphi_i(\eta|p) \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

so geht die Form $F_\lambda(x|\xi)$ in die äquivalente Form $F_\lambda(y|\eta)$ über, wo

$$y_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((p))\, x_\mu \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n) \text{ ist.}$$

Denn nach der Definition der Function $\varphi$ ist

$$a_{\lambda\mu}((\xi)) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}((\eta))\, a_{\nu\mu}((p)) \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

Betrachten wir nun die Coefficienten $x_1\, x_2 \ldots x_n$ und die Coefficienten $y_1\, y_2 \ldots y_n$ als gegeben, so lauten die notwendigen und ausreichenden Bedingungen, damit die Formen $F_\lambda(x|\xi)$ und $F_\lambda(y|\eta)$ äquivalent sind:

Es müssen sich Werte $p_1\, p_2 \ldots p_m$ angeben lassen, welche den Gleichungen

$$y_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((p))\, x_\mu \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

genügen.

Da nun, wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, zwei Formen äquivalent sind, wenn sie zur selben dritten äquivalent sind, so lassen sich diese Bedingungen vollständig ersetzen durch die folgenden:

Es muss ein Wertsystem $z_1\, z_2 \ldots z_n$ und Wertsysteme $q_1\, q_2 \ldots q_m$; $r_1\, r_2 \ldots r_m$ geben, welche den beiden Gleichungssystemen

$$\left.\begin{aligned} x_\lambda &= \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((q))\, z_\mu \\ y_\lambda &= \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((r))\, z_\mu \end{aligned}\right\} \quad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

genügen.

Im vorliegenden Fall sind somit die Voraussetzungen erfüllt, auf welche Herr Christoffel seinen Eingangs besprochenen Beweis gestützt hat, dass sich die Aequivalenzbedingungen durch Gleichsetzung von Invarianten ausdrücken lassen. Es gelten demnach für den vorliegenden Fall die von Herrn Christoffel aufgestellten Sätze:

1) Die Aequivalenzbedingungen lassen sich vollständig ausdrücken durch eine Anzahl Gleichungen der Form

$$f_i((y)) = f_i((x)) \quad (i = 1, 2, \ldots n - \sigma + \varrho).$$

Hier bedeutet $\sigma$ „die Ordnung der systematischen Elimination" und $\varrho$ eine positive Zahl, die unter Umständen gleich Null sein kann. Die Zahl $\sigma$ ist gleich der Anzahl der Coefficienten der transformirten Form, welche bei geeigneter Wahl der verfügbaren Parameter p vorgeschriebene Werte erhalten können.

2) Alle Invarianten von $F_\lambda$, d. h. alle rationalen Functionen der y, welche von den Werten der Parameter p unabhängig sind und nur von den Werten der x abhängen, lassen sich als rationale Functionen der $n - \sigma + \varrho$ Invarianten $f_i$ darstellen.

Die Invarianten $f_i$ genügen offenbar den Differentialgleichungen ($\gamma$). Da unter diesen Invarianten $n - \sigma$ von einander unabhängig sind, so haben die Differentialgleichungen ($\gamma$) $n - \sigma$ von einander unabhängige Integrale. Von den m linear unabhängigen Differentialgleichungen ($\gamma$) müssen daher $m - \sigma$ eine Folge der übrigen sein.

Das eben nachgewiesene Invariantensystem bildet ein Invariantensystem für jede der n Formen

$$F_1(x|\xi) \quad F_2(x|\xi) \; . \; . \; . \; F_n(x|\xi).$$

Dies findet sein vollständiges Analogon in der Invariantentheorie im engeren Sinne des Wortes. Das Invariantensystem einer algebraischen Form $F_1(x|\xi^1)$ mit den Coefficienten $x_1\, x_2 \ldots x_n$ und den Variabeln $\xi_1^1\, \xi_2^1 \ldots \xi_\mu^1$ kann nämlich als Invariantensystem jeder der n Formen betrachtet werden, welche durch wiederholte Anwendung der Operation

$$\sum_{\lambda=1}^{\mu} \xi_\lambda^i \frac{\partial F}{\partial \xi_\lambda^1} \quad (i = 1, 2, \ldots \mu)$$

aus $F_1$ hervorgehen, sofern man nur die $\mu$ Variabelnsysteme

$$\begin{matrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 \,.\,.\, \xi_\mu^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 \,.\,.\, \xi_\mu^2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \xi_1^\mu & \xi_2^\mu \,.\,.\, \xi_\mu^\mu \end{matrix}$$

als cogredient betrachtet.

Diese n Formen sind offenbar nichts anderes als die Coefficienten einer algebraischen Form, in welche $F_1$ durch die lineare Substitution

$$\xi_i = \eta_1\, \xi_i^1 + \eta_2\, \xi_i^2 + \eta_3\, \xi_i^3 \ldots + \eta_\mu\, \xi_i^\mu \;\; (i = 1, 2, \ldots \mu)$$

transformirt wird. Auch dies steht in vollkommenem Einklang mit der im Vorangehenden entwickelten allgemeinen Theorie.