Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XVIII. Jahrgang 1888.

München
Verlag der K. Akademie
1889.

In Commission bei G. Franz.

Sitzung vom 3. März 1888.

1. Das correspondirende Mitglied Herr A. Brill in Tübingen hat eine Abhandlung: „Ueber die Multiplicität der Schnittpunkte von zwei ebenen Curven“ eingeschickt.

2. Herr A. Voss spricht: „über diejenigen Flächen, auf denen zwei Schaaren geodätischer Linien ein conjugirtes System bilden“.

3. Herr W. v. Gümbel demonstrirt „zwei neue Blätter seiner geognostischen Karte von Bayern“.

4. Herr G. Bauer überreicht eine Arbeit des Herrn Dr. Ludwig Maurer in Strassburg: „über allgemeinere Invarianten-Systeme“.

5. Herr M. v. Pettenkofer legt eine Mittheilung des Herrn Professor Dr. K. B. Lehmann in Würzburg: „über die Wirkung des Schwefelkohlenstoffs auf den thierischen Organismus“ vor.

Ueber die Multiplicität der Schnittpunkte von zwei ebenen Curven.

Von A. Brill in Tübingen.

(Eingelaufen 29. Februar.)

Die Frage, wie vielfach ein Schnittpunkt zweier Curven zu rechnen ist, in welchem dieselben sich mit Zweigen von beliebiger Beschaffenheit durchsetzen oder berühren, wird von Cayley, Halphen, H. J. S. Smith und in eingehender Weise von Herrn Stolz[1]) mit Hilfe von Reihen

1) Mathematische Annalen, Bd. 15.

beantwortet, nach welchen in jedem Punkt einer Curve die eine Coordinate in aufsteigenden Potenzen der anderen entwickelbar ist. Das Produkt der Differenzen dieser Entwicklungen, gebildet für die eine und die andere Curve, beginnt mit einer ganzen Potenz derjenigen Variabeln, nach welcher entwickelt wurde. Diese giebt die „Multiplicität" des Schnittpunktes an.

Man kann gegen dieses Verfahren den Einwand erheben, dass durch die irrationale Operation der Entwicklung ein Ueberfluss an Hilfsmitteln in Bewegung gesetzt wird, etwa vergleichbar dem, welchen die Bildung der Resultante von zwei Gleichungen mit sich brächte, wenn man dieselbe vermittelst des Produkts der Differenzen der Wurzeln wirklich darstellen wollte. Es muss auch in dem vorliegenden Falle einen Weg geben, auf welchem nur von rationalen Operationen Gebrauch gemacht wird.

Zwar hat man dieses Bedürfniss auch von anderer Seite schon anerkannt und rationale Processe angegeben, welche die Multiplicität eines Schnittpunktes definiren. Dass dieselben in theoretischen Erörterungen gute Dienste leisten, geht aus der erwähnten Abhandlung von Herrn Stolz hervor. Aber Niemand wird daran denken, die dort angegebenen algebraischen Umformungen zur wirklichen Bestimmung der Vielfachheit in einem vorliegenden Falle zu verwenden.

Es sei mir gestattet, im Nachfolgenden ein Verfahren vorzulegen, welches, wie ich glaube, das Gewünschte ohne Weitläufigkeit leistet.

1.

Der zu untersuchende Schnittpunkt der Curven φ und f befinde sich in dem Ursprung O eines Cartesischen Coordinatensystems, in Bezug auf welches die Gleichungen dieser Curven, nach aufsteigenden Potenzen von x und y geordnet, wie folgt lauten:

$$\varphi(xy) = o = \varphi_i + \varphi_{i+1} + \varphi_{i+2} + \dots\dots + \varphi_m$$
$$f(xy) = o = f_k + f_{k+1} + f_{k+2} + \dots\dots + f_n,$$

wo φ_i, φ_{i+1}, ... f_k, f_{k+1}, ... ganze homogene Functionen von x, y von bez. den Dimensionen i, i + 1, ... k, k + 1, ... sind. Wir machen die Voraussetzungen:

1. Dass die Functionen φ und f einen gemeinsamen Theiler nicht besitzen (unter „Theiler" wird hier wie im Folgenden eine ganze Function der Variabeln x, y verstanden).

2. Dass keiner der Linearfactoren von φ_i zugleich Factor von allen folgenden Gliedern φ_{i+1}, ... φ_m ist, und eine ähnliche Voraussetzung bezüglich f_k. — Dann ist wegen der ersten Annahme die Multiplicität des Schnittpunkts O von φ und f jedenfalls eine endliche Zahl.

Ich lege nun den folgenden Satz zu Grunde: Wenn in der angegebenen Darstellung der Curvengleichungen $\varphi = o$, $f = o$ die Resultante aus den binären Formen niedrigster Ordnung φ_i und f_k nicht verschwindet, so sind in dem Ursprung O des Coordinatensystems genau $i \cdot k$ Schnittpunkte von φ und f vereinigt (die „Multiplicität" von O ist gleich $i \cdot k$).

Den Beweis dieses Satzes übergehe ich, da derselbe in strenger Form bereits von anderer Seite geführt worden ist (Nöther, „Rationale Ausführung u. s. w." Math. Annalen Bd. 23, Seite 320; und Voss, „Ueber den Fundamentalsatz u. s. w." ibid. Bd. 28, S. 533).

Man kann nun auf diesen Fall auch denjenigen zurückführen, wo die Resultante aus φ_i und f_k verschwindet, wo also diese Functionen einen oder mehrere Linienfactoren gemeinsam haben. Eine der Functionen φ, f, etwa φ, lässt sich durch eine andere ersetzen. welche hinsichtlich ihres Verhaltens gegenüber f in dem Punkt O sich von φ nicht oder doch in angebbarer Weise unterscheidet. Durch Multiplication nämlich von φ und f mit passend gewählten Functionen λ und ϱ von x und y — was, wie man sehen wird, noch verschiedene Möglichkeiten zulässt — bildet man einen Ausdruck:

$$\Phi = \lambda\,\varphi + \varrho\,f = \Phi_p + \Phi_{p+1} + \ldots, \qquad \ldots\ldots (1)$$

für welchen das Glied niederster Dimension Φ_p mit f_k keine Linearfactoren gemeinsam hat, für welchen also bei Berechnung der Multiplicität der Schnittpunkte von f und Φ wieder der obige Satz zur Geltung gelangt. Bezeichnet man dann die Multiplicität von O für $f = o$ und $\varphi = o$ mit (φf) oder $(f\varphi)$; ebenso für die Curven $\lambda = o$ und $f = o$ mit (λf) oder $(f\lambda)$, u. s. w., so bestimmt sich (φf) mit Hilfe der Relation:

$$(\Phi f) = (\varphi f) + (\lambda f).$$

Die Resultante nämlich aus Φ und f, hinsichtlich x oder auch y gebildet, ist gleich derjenigen von $\lambda \cdot \varphi$ und f, und demnach auch die Anzahl der dem Punkt O zugehörigen Wurzeln für beide dieselbe. Da nun:

$$(\Phi f) = p \cdot k$$

ist, so handelt es sich, wenn man (φf) kennen will, nur noch um die Bestimmung von (λf).

Diese Zahl lässt sich zunächst immer dann leicht ermitteln, wenn λ eine homogene Function:

$$\lambda = \lambda_l$$

von x und y ist. Denn sei etwa λ_1 ein Linearfactor derselben, und verschwindet für den aus:

$$\lambda_1 = o$$

zu entnehmenden Wert von $\frac{y}{x}$ die Function f_k nicht, so ist die Anzahl der Schnittpunkte der Linie $\lambda_1 = o$ mit $f = o$, welche in O fallen:

$$(\lambda_1 f) = k.$$

Verschwindet aber für jenes $\frac{y}{x}$ f_k, und ausserdem etwa noch $f_{k+1}, \dots f_{k+\mu-1}$, dagegen $f_{k+\mu}$ nicht — sämmtliche f können nach der Annahme 2. nicht verschwinden — so ist, weil die Resultante aus λ_l und f etwa hinsichtlich x in dem vorliegenden Fall die $(k+\mu)^{te}$ Potenz von x als Factor ausscheidet:

$$(\lambda_l f) = k + \mu.$$

Bestimmt man die entsprechende Zahl für jeden Linearfactor von λ_l, so ist $(\lambda_l f)$ gleich der Summe dieser Zahlen. — Uebrigens bedarf es gar nicht der Auflösung von λ_l in Factoren, wenn man den grössten gemeinsamen Theiler ermittelt zuerst von λ_l und f_k, wobei sich etwa $\lambda_{l'}$ ergeben möge, dann von $\lambda_{l'}$ und f_{k+1}, wobei $\lambda_{l''}$ herauskommen möge, u. s. w. Es ist dann:

$$(\lambda_l f) = k(l - l') + (k+1)(l' - l'') + \dots$$

durch Ausführung bloss rationaler Processe bestimmt.

Es entsteht nun die Aufgabe, auf den vorstehend behandelten Fall auch den allgemeinen zurückzuführen, wo sich keine homogene Function λ finden lässt, welche der Gleichung (1) genügt.

Bevor dies in allgemeiner Weise geschieht, sei mir gestattet, die Natur des eingeschlagenen Verfahrens durch Voranschicken eines Falles darzulegen, den ich an einer anderen Stelle bereits behandelt habe, des Falles nämlich, wo die Zahl $k = 1$ ist, und die Functionen λ und ϱ sich in eindeutiger Weise ergeben.

2.

Die nach Dimensionen von x, y geordneten Functionen f und φ seien:

$$\varphi = \varphi_i + \varphi_{i+1} + \dots + \varphi_m$$
$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_n,$$

wo $i \geqq 1$, und die Functionen niederster Dimension f_1 und φ_i von Null verschieden seien.

Ist f_1 nicht Factor von φ_i, so haben die Curven f und φ keine Berührung in dem Punkte O, und die Multiplicität von O ist gleich i.

Ist aber f_1 Theiler von φ_i, ist also etwa identisch:

$$\varphi_i = f_1\,\varrho_{i-1},$$

so bilde man den Ausdruck:

$$\psi = \varphi - \varrho_{i-1}\,f = (\varphi_{i+1} - \varrho_{i-1}\,f_2) + (\varphi_{i+2} - \varrho_{i-1}\,f_3) + \dots$$
$$= \psi_{i+1} + \psi_{i+2} + \dots$$

Ist f_1 nicht Theiler von ψ_{i+1}, so ist die Anzahl (ψf) der Schnittpunkte von $\psi = o$ mit $f = o$ gleich $i + 1$, und folglich auch:

$$(\varphi f) = i + 1.$$

Ist aber f_1 Theiler auch von ψ_{i+1}, bestehen also die Gleichungen:

$$\varphi_i \quad = f_1\,\varrho_{i-1}$$
$$\varphi_{i+1} = f_2\,\varrho_{i-1} + f_1\,\varrho_i,$$

so setze man wieder:

$$\chi = \psi - \varrho_i\,f = \varphi - (\varrho_{i-1} + \varrho_i)\,f = \chi_{i+2} + \chi_{i+3} + \dots,$$

und untersuche die Theilbarkeit von χ_{i+2} durch f_1. In dieser Weise fahre man fort. Da sich die Vielfachheit des

Punktes, den die Curven φ, ψ, χ, ... der Reihe nach in O besitzen, bei jedem Schritt um mindestens eins erhöht, so muss der Fall eintreten, dass dieselbe gleich der Multiplicität des Schnittpunkts von f und φ wird. Ist dies etwa nach $(\beta - \mathrm{i})$-maliger Wiederholung der Fall, verschwinden also in:

$$\Phi = \varphi - \varrho\,\mathrm{f} = \Phi_\beta + \Phi_{\beta+1} + \ldots,$$

wo:

$$\varrho = \varrho_{i-1} + \varrho_i + \varrho_{i+1} + \ldots + \varrho_{\beta-2}$$

ist, die Glieder bis herauf zur $(\beta - 1)^{\text{ten}}$ Dimension einschliesslich identisch, während Φ_β von Null verschieden ist, so hat die Curve:

$$\Phi = 0$$

im Ursprung einen β-fachen Punkt, dessen Zweige sämmtlich die Curve f nicht berühren. Φ besitzt alsdann β Schnittpunkte mit f an dieser Stelle. Die Functionen ϱ_{i-1}, ϱ_i, ... $\varrho_{\beta-2}$ bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_i &= \varrho_{i-1}\,\mathrm{f}_1 \\
\varphi_{i+1} &= \varrho_{i-1}\,\mathrm{f}_2 + \varrho_i\,\mathrm{f}_1 \\
\varphi_{i+2} &= \varrho_{i-1}\,\mathrm{f}_3 + \varrho_i\,\mathrm{f}_2 + \varrho_{i+1}\,\mathrm{f}_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_{\beta-1} &= \varrho_{i-1}\,\mathrm{f}_{\beta-i} + \varrho_i\,\mathrm{f}_{\beta-i-1} + \ldots + \varrho_{\beta-2}\,\mathrm{f}_1,
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

welche sich nicht durch Nullsetzen der Glieder niederster Dimension von φ ergeben.

In dem Falle $k = 1$ lässt sich also die Gleichung einer Curve:

$$\Phi = \varphi - \varrho\,\mathrm{f} = 0$$

bestimmen, welche in O einen vielfachen Punkt besitzt, dessen Zweige f nicht berühren, und für welche der Schnittpunkt mit f in O dieselbe Multiplicität besitzt, wie der von φ mit f.

Ist auch noch $i = 1$, so drücken die Gleichungen (1) im Allgemeinen die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür aus, dass die **Zweige** der **Curven** φ und f in β **consecutiven Punkten übereinstimmen** (eine höhere Berührung eingehen). Denn da die Gleichungen (1) ausdrücken, dass β Schnittpunkte von φ und f in den Punkt O fallen, und da für $k = i = 1$ sowohl f als φ nur je einen einfachen Zweig durch O schickt, so muss die Multiplicität in O von $(\beta - 1)$ punktiger **Berührung** herrühren. Ferner aber unterscheidet sich, wie man leicht bestätigt, die Anzahl der in den Functionen $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{\beta-2}$ befindlichen verfügbaren Constanten (welche in $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{\beta-1}$ eingehen) noch um β Einheiten von der Zahl der in einer allgemeinen Function von der Form:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{\beta-1}$$

verfügbaren Constanten; β Constante kommen also auf die zu erfüllende Bedingung. In der That absorbirt die Festlegung von β Punkten der Curve φ gerade β Constante, wenn man von Ausnahmefällen absieht, auf die wir hier nicht eingehen wollen.

3.

Das in (2) angegebene Verfahren lässt sich mit einer leichten Modification auf die Bestimmung der Multiplicität von O für zwei Curven f und φ von beliebigem Verhalten in O ausdehnen.

Ich gehe wieder aus von den nach Dimensionen von x, y geordneten Gleichungen der Curven:

$$\varphi = \varphi_i + \varphi_{i+1} + \ldots + \varphi_m$$
$$f = f_k + f_{k+1} + \ldots + f_n.$$

Ist die Resultante von φ_i und f_k von Null verschieden, berühren sich also die Zweige von f und φ nicht, so hat φ bereits die gewünschte Form.

Verschwindet aber die Resultante aus φ_i und f_k, so stellt man eine Function, die sich in O gegenüber f ebenso verhält, wie φ, deren Anfangsglied aber mit f_k keinen Linearfactor gemeinsam hat, durch wiederholte Anwendung des folgenden Processes her.

Sei etwa die homogene Function σ der durch rationale Operationen leicht bestimmbare grösste gemeinschaftliche Theiler von φ_i und f_k, also etwa:

$$f_k = \sigma f'$$
$$\varphi_i = \sigma \varphi',$$

wo nun f' und φ' theilerfremde Functionen sind, so bilde man die Differenz:

$$\begin{aligned}\psi = f'\varphi - \varphi' f &= (\varphi_{i+1} f' - f_{k+1}\varphi') + (\varphi_{i+2} f' - f_{k+2}\varphi') + \dots \\ &= \psi_l + \psi_{l+1} + \dots,\end{aligned}$$

geordnet wiederum nach Dimensionen von x und y.

Man bemerkt zunächst, dass die Anzahl der Glieder (verschiedener Dimension) $\psi_l, \psi_{l+1}, \dots$ von ψ um mindestens eine Einheit kleiner ist, als die grösste der beiden Zahlen:

$$m - i + 1, \quad n - k + 1,$$

welche bezw. die Anzahl der Glieder in φ und f angeben.

Nun hat das Glied niedrigster Dimension:

$$\psi_l = \varphi_{i+1} f' - f_{k+1}\varphi'$$

entweder mit f_k einen Factor gemeinsam, oder nicht. Im letzteren Fall ist der Process abgeschlossen. Denn auf dem in § 1 angegebenen Weg bestimmt sich für die homogene Function f' leicht die Multiplicität $(f' f)$ des in O fallenden Schnittpunktes mit f, und um diejenigen (φf) von φ mit f zu finden, hat man nur die Gleichung anzuwenden:

$$(\psi f) = (\varphi f) + (f' f),$$

wo $(\psi f) = k \cdot l$ ist.

Auch dann ist immer ein Abschluss erreicht, wenn φ_1 mit φ_i keinen Theiler gemeinsam hat, weil man die Beziehung hat:

$$(\psi\,\varphi) = (\mathrm{f}\,\varphi) + (\varphi'\,\varphi).$$

Besitzt aber ψ_1 sowohl mit f_k wie mit φ_i je einen Theiler gemeinsam, so hat man das auf f und φ angewandte Verfahren fortzusetzen, indem man entweder ψ und φ oder ψ und f benutzt. In jedem Fall ist dann für eine so entstandene Function χ, etwa:

$$\chi = \varphi''\,\psi - \psi''\,\varphi = \chi_r + \chi_{r+1} + \ldots\ldots,$$

(wo φ'' und ψ'' durch Division des grössten gemeinsamen Theilers von φ_i und ψ_1 in diese Functionen entstanden sind), die Anzahl der Glieder χ_r, χ_{r+1}, ... um mindestens eins kleiner, als die Anzahl für diejenigen der Functionen ψ, φ, welche die grössere Gliederzahl besitzt. Man prüfe nun wieder das Anfangsglied χ_r auf gemeinschaftliche Factoren mit φ_1, ψ_1. Nur in dem Falle, dass χ_r mit jedem dieser Ausdrücke einen Factor gemeinsam hat, ist das Verfahren fortzusetzen.[1] Unter allen Umständen ergiebt sich aber nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen ein Abschluss, wenn man ausser der zuletzt erhaltenen Function für die Umbildung jedesmal diejenige von den beiden vorhergehenden benutzt, welche die geringste Gliederzahl besitzt. Denn dieses Vorgehen hat eine fortgesetzte Verminderung

1) Wenn ein Factor χ' von χ_r Theiler von χ selbst sein sollte, was vorkommen kann, dann wende man das angegebene Verfahren auf den Quotienten:

$$\frac{\chi}{\chi'} = \mathrm{X}$$

und φ, statt auf χ und φ an, benutze überhaupt allenthalben X statt χ, und bestimme $(\chi\,\varphi)$ aus der Relation:

$$(\mathrm{X}\,\varphi) = (\chi\,\varphi) - (\chi'\,\varphi).$$

der Gliederzahl zur Folge, so dass man zuletzt bei einem einzigen Glied, d. h. einer homogenen Function von x und y anlangt, deren Schnittpunkt mit f in O wieder mit Hilfe des in § 1 angegebenen Verfahrens untersucht wird.

Die Kette von Gleichungen, zu welchen man so geführt wird, sei die folgende:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= f'\varphi - \varphi' f \\ \chi &= \varphi''\psi - \psi''\varphi \\ \vartheta &= \psi'''\chi - \chi'''\psi \\ &\cdots\cdots \\ \tau &= \varrho^{(\nu-1)}\sigma - \sigma^{(\nu-1)}\varrho \\ \omega &= \sigma^{(\nu)}\tau - \tau^{(\nu)}\sigma, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

wo nun ω in lauter Linearfactoren zerfallen möge. Dann berechnet man die Multiplicität des Schnittpunkts O von φ mit f vermöge der Gleichungen:

$$\begin{aligned} (\omega\ \tau) &= (\sigma\ \tau) + (\tau^{(\nu)}\ \tau) \\ (\tau\ \sigma) &= (\varrho\ \sigma) + (\sigma^{(\nu-1)}\ \sigma) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ (\chi\ \psi) &= (\varphi\ \psi) + (\psi''\ \psi) \\ (\psi\ \varphi) &= (f\ \varphi) + (\varphi'\ \varphi), \end{aligned}$$

wo nun die Zahlen $(\omega\,\tau)$, $(\tau^{(\nu)}\,\tau)$, $(\sigma^{(\nu-1)}\,\sigma)$, ... $(\psi''\,\psi)$ $(\varphi'\,\varphi)$ sämmtlich direct bestimmbar sind (§ 1), weil ω, $\tau^{(\nu)}$, $\sigma^{(\nu-1)}$, ... ψ'', φ' homogene Functionen von x und y sind. — Aus der ersten Gleichung bestimmt man $(\sigma\,\tau)$, setzt diesen Werth in die zweite ein, bestimmt aus dieser $(\varrho\,\sigma)$, u. s. w. und gelangt so zuletzt zu $(f\,\varphi)$.

Die Elimination der Functionen ψ, χ, ϑ, ... σ, τ aus dem System (1) führt zu einer identischen Gleichung von der Form:

$$\omega = \lambda\cdot\varphi + \varrho\cdot f,$$

wo die homogene Function ω keinen der Linearfactoren besitzt, welche die Anfangsglieder φ_i und f_k von φ und f gemeinsam haben. Das Verhalten der — im allgemeinen nicht homogenen — Functionen λ und ϱ gegenüber f in dem Ursprung O des Coordinatensystems bestimmt sich aus den bekannten Zahlen $(\varphi\, f)$, $(\omega\, f)$, $(\omega\, \varphi)$ vermöge der Beziehungen:

$$(\omega\, f) = (\varphi\, f) + (\lambda\, f)$$
$$(\omega\, \varphi) = (f\, \varphi) + (\varrho\, \varphi).$$

Es liegt auf der Hand, dass es für die Bestimmung von $(\varphi\, f)$ ausreicht, anstatt bis zu ω, bis zu einer solchen Curve vorzudringen, welche mit den beiden voraufgehenden gemeinsame Tangenten nicht besitzt. Der Process, der zu einer solchen Function führt, ist im allgemeinen kürzer, als der oben geschilderte, und ist so einzurichten, dass man je mit der zuletzt erzeugten Function diejenige von den beiden zuvor gebildeten combinirt, die bewirkt, dass in der neu zu bildenden Function möglichst wenige Glieder (in stetiger Aufeinanderfolge) Factoren mit dem Anfangsglied gemeinsam haben, welche zugleich Factoren der Anfangsglieder der beiden benutzten Functionen sind.

Ein Beispiel möge dieses Verfahren erläutern:

Sei:
$$f = x\,y + y^2 x + y^2 x^2 + f_5$$
$$\varphi = x\,y + x\,y\,(x + y) + x^2 y^2 + \varphi_5,$$

wo f_5, φ_5 homogene Functionen mit unbestimmten Coefficienten sind. Man bilde der Reihe nach:

$$\psi = f - \varphi = -\,y\,x^2 + f_5 - \varphi_5$$
$$\chi = \psi + \varphi \cdot x = y\,x^2 (x + y) + (x^3 y^2 + f_5 - \varphi_5) + x\,\varphi_5$$
$$\vartheta = \chi + (x + y) \cdot \psi = (x^3 y^2 + f_5 - \varphi_5) + \ldots.$$

Dann ist, wenn $f_5 - \varphi_5$ weder den Factor x, noch den Factor y aussondert, und zugleich $x^3 y^2 + f_5 - \varphi_5$ nicht den Factor $x + y$ besitzt:

$$(\vartheta\, \chi) = 5 \cdot 4 = (\psi\, \chi) + (x + y,\, \chi).$$

Weil für $x + y = o$ die Function χ sich auf Glieder 5^{ter} (und höherer) Dimension reducirt, ist ferner:

$$(\chi, x + y) = 5.$$

Ebenso: $$(\varphi, x) = 5.$$

Daher endlich ist:

$$(f\,\psi) = (\varphi\,\psi) = (\chi\,\psi) - (x\,\psi) = 15 - 5 = 10$$

die Multiplicität des Schnittpunktes der Curven φ und f in dem Ursprung O des Coordinatensystems. — In der That haben die Zweige des Doppelpunkts, welchen φ in O hat, je 4 consecutive Punkte mit den Doppelpunktszweigen von f, die sie berühren, gemeinsam.

Die Durchführung des angegebenen Verfahrens bis zu einer Function hin, welche in lineare Factoren zerfällt, führt augenscheinlich zu einem Bestandtheil derjenigen Resultante der beiden Ausgangsfunctionen f und φ, die durch Elimination einer Variabeln z entsteht, mit deren Hilfe man dieselben in homogene ternäre Formen überführt. Denn diese Resultante, gleich Null gesetzt, repräsentirt, geometrisch zu reden, das Product der Strahlen, die sich von dem Ursprung des Coordinatensystems nach den Schnittpunkten der Curven $f = o$, $\varphi = o$ legen lassen, unter welchen sich denn auch die in den Ursprung selbst gerückten befinden müssen. Die nächste Verallgemeinerung würde nun in der Aufstellung dieses Strahlenproducts für einen beliebigen (nicht in einen Schnittpunkt von f und φ fallenden) Punkt der Ebene bestehen und damit zu denjenigen Gleichungen hinleiten, durch die Clebsch und Herr Kronecker das System der Schnittpunkte zweier Curven definiren, dessen Zerfällung in seine rationalen Bestandtheile die Multiplicität einzelner Schnittpunkte zu ermitteln gestattet.

Ich finde aber, dass für diesen letzteren Zweck der Vorzug des oben mitgetheilten Verfahrens eben in der Beschränkung auf den ersten Schritt in der angegebenen Richtung besteht.