XIV.

Ueber die
Auflösung aller sphärischen und geradlinigen Dreyecke durch eine einzige Grundformel.

Abgelesen in einer Versammlung der math. physikalischen Klasse der königl. Akademie d. Wissenschaften

von

ANTON VON STEFENELLI.

Adjunkt der Akademie.

1.

Die Grundformel, aus welcher blos durch algebraische Substitution alle Formeln der Trigonometrie entwickelt werden, entspringt aus der Auflösung folgender Aufgabe:

Aus den gegebenen drey Seiten a, b, c eines sphärischen Dreyeckes den einen der drey Winkel A, B, C zu finden. Obwohl diese Aufgabe schon von andern blos unter der Voraussetzung der Formeln für geradlinig-rechtwinklige Dreyecke aufgelöst worden,

den, so hielt ich den folgenden Beweis seiner Neuheit und Einfachheit wegen nicht für überflüssig.

2.

Das gegebene sphärische Dreyeck sey ABC, in welchem aus den drey Seiten $AB=c$, $BC=a$, und $AC=b$ der Winkel A gefunden werden soll. Man verlängere die Bogen AB, AC zu Quadranten bis in E und D, und ziehe den Bogen DE eines gröfsten Kreises, so sind in dem sphärischen Trapez DECB die drey Bogen DC, EB, und CB bekannt, aus welchen der Bogen DE als das Maafs des Winkels A bestimmt werden kann. Zu diesem Ende sey P der Mittelpunkt der Kugel, man ziehe EP, DP, und auf diese die Senkrechten CN, BM, verbinde MN, und CB durch gerade Linien, so findet in dem geradlinigen Trapez folgende Gleichung statt

$$\overline{MN}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{BM}^2 + 2\,BM.\,CN - \overline{CN}^2$$

Nun ist

$$CB = \text{Ch. Arc. } CB = 2 \sin. \tfrac{1}{2} a$$
$$BM = \sin. BE = \cos. c$$
$$CN = \sin. DC = \cos. b$$

also

$$\overline{MN}^2 = 4 \sin.^2 \tfrac{1}{2} a - \cos.^2 c + 2 \cos. c. \cos. b - \cos.^2 b.$$

Theilt man das Dreyeck MNP durch die Senkrechte MQ in zwey bey Q rechtwinklichte Dreyecke, so erhält man

$$\overline{MQ}^2 = \overline{MP}^2 - PQ^2$$
$$\overline{MQ}^2 = \overline{MN}^2 - PN^2 + 2\,PN.\,PQ - \overline{PQ}^2$$

folglich

$$PQ = \frac{\overline{MP}^2 + \overline{PN}^2 - \overline{MN}^2}{2\,PN}$$

Es

Es ist aber

$$PQ = MP \times \cos. P$$
$$PN = \cos. CD = \sin. b$$
$$PM = \cos. BE = \sin. c$$

also

$$\cos. P = \frac{\sin.^2 c + \sin.^2 b - \overline{MN}^2}{2 \sin. b \sin. c}$$

Und durch Substitution des oben für $\overline{MN}^2$ gefundenen Werthes

$$\text{I.} \quad \cos. P = \cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. b \sin. c}$$

Und durch Verwechslung der Buchstaben

$$\cos. B = \frac{\cos. b - \cos. a \cos. c}{\sin. a \sin. c}$$

$$\cos. C = \frac{\cos. c - \cos. a \cos. b}{\sin. a \sin. b}$$

Aus diesen drey Formeln, welche aus einem einzigen Satze entspringen, lassen sich nun alle Formeln der sphärischen sowohl als geradlinigen Dreyecke ableiten. Und zwar

3.

Verwandle man die Formel für cos. A in die für $\sin.^2 A$ setze dabey

$$\cos. a \cos. b \cos. c = m$$
$$-\cos.^2 a - \cos.^2 b - \cos.^2 c = n$$

so ist

$$\sin.^2 A = \frac{1 - n + 2m}{\sin.^2 b \sin.^2 c}$$

Eben so

$$\sin.^2 B = \frac{1 - n + 2m}{\sin.^2 a \sin.^2 c}$$

 folg-

folglich

$$\sin.^2 A \sin.^2 b \sin.^2 c = \sin.^2 B \sin.^2 a \sin.^2 c$$

und

$$\text{II.} \quad \sin. A = \sin. B \frac{\sin. a}{\sin. b}$$

und durch Verwechslung der Buchstaben

$$\sin. B = \sin. C \frac{\sin. b}{\sin. c}$$

$$\sin. C = \sin. A \frac{\sin. c}{\sin. a}$$

4.

Ein dritter Fall, welcher sich bey Auflösung der sphärischen Dreyecke ergiebt, ist die Bestimmung eines Winkels aus zwey Seiten und einem Winkel. Diese Formel kann aus der Verbindung folgender zwey gefunden werden

$$\cos. B = \frac{\cos. b - \cos. a \cos. c}{\sin. a \sin. c}$$

$$\sin. B = \frac{\sin. b \sin. A}{\sin. a}$$

Daraus erhält man unmittelbar

$$\text{tg. } B = \frac{\sin. b \sin. A \sin. c}{\cos. b - \cos. a \cos. c}$$

Da nun aus I

$\cos. a = \sin. c \sin. b \cos. A + \cos. b \cos. c$ ist, so erhält man

$$\text{III.} \quad \text{tg. } B = \frac{\sin. A}{\sin. c \text{ cotg. } b - \cos. c \cos. A}$$

und durch Verwechslung der Buchstaben

$$\text{tg. } C = \frac{\sin. A}{\sin. b \text{ cotg. } c - \cos. b \cos. A}$$

5.

Da

$$\sin. c \text{ cotg. } b = \frac{\sin. C \cos. b}{\sin B}$$

so folgt aus III

$$\sin. C \cos. b - \cos. c \cos. A \sin B = \sin. A \cos. B$$

Eben so

$$\sin. B \cos. c - \cos. b \cos. A \sin. C = \sin. A \cos. C$$

und daraus

$$\sin. B \cos. c = \sin. A \cos. C + \cos. b \cos. A \sin. C$$

$$= \frac{\sin. C \cos. b - \sin. A \cos. B}{\cos. A}$$

endlich

$$\text{IV.} \quad \cos b = \frac{\cos. B + \cos. A \cos. C}{\sin. A \sin. C}$$

6.

Diese vier Formeln reichen hin alle Fälle der sphärischen schiefwinkligen Dreyecke aufzulösen. Da meine Absicht blofs ist die Möglichkeit zu zeigen, wie aus einer einzigen Formel die übrigen können abgeleitet werden, so übergehe ich hier die Verwandlung dieser Formeln zum logarithmischen Gebrauch, eine Verwandlung, die schon seit Napier's Zeiten, dem wir hierin den meisten Dank schuldig sind, so vortheilhaft vorgenommen worden, dafs nichts mehr zu wünschen übrig bleibt.

7.

Auf rechtwinklige sphärische Dreyecke werden diese vier Formeln durch die Voraussetzung angewendet, dafs Ein Winkel $= 90°$ sey. Demnach erhält man aus der Formel I

$$\text{V.} \quad \cos. a = \cos. b \cos. c$$

wenn man $A = 90°$ folglich $\cos. A = 0$ setzt. Diese Formel dient, um aus zwey gegebenen Seiten eines rechtwinkligen sphärischen Dreyeckes die dritte zu finden.

8.

Aus $\sin. A = \sin. B \dfrac{\sin. a}{\sin. b}$

 folgt

folgt wenn $A = 90$,

$$\text{VI.}\quad \sin. b = \sin. a \sin. B$$

9.

Die dritte Formel

$$\text{tg. } B = \frac{\sin. A}{\sin. c \text{ cotg. } b - \cos. c \cos A}$$

giebt

$$\text{VII.}\quad \text{tg. } b = \sin. c \text{ tg. } B$$

10.

Und endlich die vierte Formel

$$\cos. a = \frac{\cos. A + \cos. B \cos. C}{\sin. B \sin. C}$$

verwandelt sich in

$$\text{VIII.}\quad \cos. a = \text{cotg. } B \text{ cotg. } C.$$

11.

Nachdem ich nun gezeigt habe, wie die Formeln der sphärischen Trigonometrie aus einem einzigen Satze abgeleitet werden, so bleibt mir noch übrig diese auf geradlinige Dreyecke anzuwenden. Zu diesem Ende bemerke ich mit Boscovich und Anderen vor ihm, dafs ein sphärisches Dreyeck von unendlich kleinen Seiten als ein geradliniges gedacht werden kann, oder vielmehr, dafs der Bogen eines Winkels, als eine continuirliche Gröfse gedacht, an seiner Gränze, nämlich am Anfangspunkte, mit dem Sinus und mit der Tangente dieses Winkels zusammenfalle, und dafs folglich ein sphärisches Dreyeck an der Gränze in ein geradliniges verwandelt werde. Aus diesem ergiebt sich, dafs man die Formeln der sphärischen Dreyecke in solche für geradlinige umwandeln könne, wenn man in den erstern folgende Substitutionen macht:

$$\sin. \text{arc.} = \text{arc.}$$

$$\cos. \text{arc.} = 1$$

tg.

$$\text{tg. arc.} = \text{arc.}$$

$$\text{cotg. arc.} = \frac{1}{\text{tg. arc.}} = \frac{1}{\text{arc.}}$$

Werthe, welche die trigonometrischen Linien der sphärischen Dreyecks-Seiten erlangen, wenn man sie an ihrer Gränze betrachtet, wo sie in gerade Linien übergehen. Jene Formeln, welche Cosinusse mehrerer Winkel enthalten, glaubte man einer solchen Reduktion nicht fähig, weil durch die oben angezeigte Substitution, cos. arc. $= 1$, alle Cofs. der verschiedenen Bogen in einem Dreyecke untereinander gleich werden, welches unmöglich ist. Ich werde aber zeigen, dafs auch diese Formeln durch eine geschickte Substitution einer dem Cofs. gleichgeltenden trigonometrischen Funktion die genannte Reduktion zulassen, und so alle Formeln der geradlinigen Trigonometrie ohne Schwierigkeit aus denen der sphärischen abgeleitet werden können.

12.

Schon die zuerst oben aufgestellte Formel

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. b \sin. c}$$

bietet ein Product mehrerer Cofs. dar. Man setze für die Cofs. der Bogen den bekannten Werth von

$$\cos. \text{arc.} = 1 - 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} \text{arc.}$$

so wird

$$\cos. b \cos. c = (1 - 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} b)(1 - 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} c)$$
$$= 1 - 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} c - 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} b + 4 \sin.^2 \tfrac{1}{2} b \sin.^2 \tfrac{1}{2} c$$

An der Gränze, welche $\sin.^2 \frac{1}{2} c$ und $\sin.^2 \frac{1}{2} b$ durch beständiges Abnehmen erreichen, verschwindet das letzte Glied als ein Product der zwey abnehmenden Gröfsen; da überdiefs an der Gränze

sin. arc. $=$ arc. ist, so hat man

$$\cos. b \cos. c = 1 - \tfrac{1}{2} b^2 - \tfrac{1}{2} c^2$$

Ferner ist auch

$$\cos. a = 1 - \tfrac{1}{2} a^2$$

also

also

$$\cos. A = \frac{1 - \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} c^2 - 1}{2 bc}$$

$$\text{IX.} \quad \cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 bc}$$

Die bekannte Formel; um aus drey Seiten eines geradlinigen Dreyeckes einen Winkel zu finden.

13.

Ich will hier einer Substitution erwähnen, wodurch die Formel IX zur logarithmischen Berechnung bequem eingerichtet werden kann, als ein Beyspiel; mit welchem Nutzen ähnliche Substitutionen gebraucht werden können, besonders bey Auflösung der Gleichungen höherer Ordnungen.

Aus der Formel IX folgt

$$\cos. A = \frac{b^2 + (c + a)(c - a)}{2 bc}$$

$$= \frac{b}{2 c} \left(1 + \frac{(c + a)(c - a)}{b^2}\right)$$

Man setze

$$\text{tg.}^2 m = \frac{(c + a)(c - a)}{b^2}$$

so ist

$$\cos.^2 m = \frac{1}{1 + \text{tg.}^2 m} = 1 + \frac{(c + a)(c - a)}{b^2}$$

und

$$\cos. A = \frac{b}{2 c \cos.^2 m.}$$

14.

Aus der Formel II

$$\text{sin.} A = \frac{\text{sin.} B \ \text{sin.} a}{\text{sin.} b}$$

folgt

folgt

$$\text{X.}\quad \sin. A = \frac{a \sin. B}{b}.$$

15.

Die Formel

$$\text{III.}\quad \text{tg. } B = \frac{\sin. A}{\sin. c.\ \text{cotg. } b - \cos. c \cos. A}.$$

giebt durch die Substitution

$$\sin. c = c$$
$$\text{cotg. } b = \frac{1}{b}$$
$$\cos. c = 1$$

folgende Gleichung

$$\text{XI.}\quad \text{tg. } B = \frac{b \sin. A}{c - b \cos. A}$$

um aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel den einer Seite entgegengesetzten Winkel zu finden.

Durch Verwechslung der Buchstaben giebt obige Gleichung

$$\text{tg. } C = \frac{c \sin. A}{b - c \cos. A}$$

16.

Durch Substitutionen, welche aus dem rein analytischen Theil der Trigonometrie genommen sind, läfst sich aus dieser Formel die bekannte Analogie schliefsen: Die Summe der Seiten, zur Differenz derselben, wie die Tangente der halben Summe der unbekannten Winkel, zur Tangente der halben Differenz dieser Winkel.

Es ist nämlich

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(B + C)\ \text{tg. } \tfrac{1}{2}(B - C) = \frac{\cos. B - \cos. C}{\cos. B + \cos. C}$$

$$\cos.^2 B = \frac{1}{1 + \text{tg.}^2 B} \text{ also}$$

$$\cos. B = \frac{c - b \cos. A}{m}$$

$$\cos. C = \frac{b - c \cos. A}{m}$$

wenn $m^2 = c^2 - 2 bc \cos. A + b^2$ ist.

Daher ist

$$\frac{\cos. B - \cos. C}{\cos. B + \cos. C} = \frac{c - b \cos. A - b + c \cos. A}{c - b \cos. A + b - c \cos. A}$$

$$= \frac{(c - b)(1 + \cos. A)}{(c + b)(1 - \cos. A)}$$

Es ist aber

$$\frac{1 + \cos. A}{1 - \cos. A} = \frac{1}{tg.^2 \frac{1}{2} A}$$

$$A = 180^\circ - (B + C)$$

$$\frac{1}{2} A = 90 - \frac{1}{2}(B + C)$$

$$tg.^2 \frac{1}{2} A = \cot.^2 \frac{1}{2}(B + C)$$

also folgt

$$\frac{tg. \frac{1}{2}(B - C)}{tg. \frac{1}{2}(B + C)} = \frac{c - b}{c + b} \text{ w. z. e. w.}$$

17.

Behandelt man endlich auch die Formel

$$\text{IV.} \quad \cos. a = \frac{\cos. A + \cos. B \cos. C}{\sin. B \sin. C}$$

auf eben diese Art, so folgt

$$\sin. B. \sin. C = \cos. A + \cos. B \cos. C$$

oder

$$\cos. A = - \cos. (B + C)$$

also

$$A = 180^\circ - (B + C)$$

$$A + B + C = 180^\circ.$$

Diese Formel, welche zur Auflösung geradliniger Dreyecke nicht gebraucht werden kann, weil zur Bestimmung eines solchen Dreyeckes wenigstens Eine Seite erfordert wird, giebt zu erkennen

a) dafs

a) daſs die drey Winkel eines geradlinigten Dreyeckes $= 180°$ sind.

b) daſs daher durch drey Winkel ein geradlinigtes Dreyeck nicht bestimmt wird.

18.

Die angeführten eilf Formeln sind hinreichend alle sich ergebenden Fälle der geradlinigten und sphärischen Trigonometrie aufzulösen, obwohl sie zur logarithmischen Berechnung erst durch bekannte Kunstgriffe aus der rein analytischen Trigonometrie geschmeidiger gemacht werden müſsen.

19.

Am Schlusse dieser Abhandlung will ich noch einige Anwendungen der §. 11 aufgestellten Grundsätze auf die Auflösung einiger bey geradlinigten Dreyecken sich ergebenden Aufgaben zeigen.

20.

Die Formeln, um aus den drey Seiten eines sphärischen Dreyecks einen Winkel zu finden, nämlich

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{\sin. \tfrac{1}{2}(b + c - a) \sin. \tfrac{1}{2}(b + a - c)}{\sin. c. \sin. a}$$

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{\sin. \tfrac{1}{2}(a + b + c) \sin. \tfrac{1}{2}(a + c - b)}{\sin. c. \sin. a}$$

geben auf geradlinigte Dreyecke gebracht

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{(b + c - a)(b + a - c)}{4\,a\,c}$$

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{(a + b + c)(a + c - b)}{4\,a\,c}$$

 In

In der Geometrie findet man aber den Flächeninhalt eines Dreyeckes

$$M^2 = \frac{(a+b+c)\ (b+c-a)\ (a+c-b)\ (a+b-c)}{16}$$

Also durch Substitution

$$M = a\,c \sin \tfrac{1}{2} B \cos. \tfrac{1}{2} B.$$

Es ist aber

$$\sin \tfrac{1}{2} B \cos. \tfrac{1}{2} B = \tfrac{1}{2} \operatorname{Sin} B$$

folglich

$$M = \tfrac{1}{2}\, a\,c \sin B.$$

Eine sehr geschmeidige Formel den Flächeninhalt eines Dreyeckes zu finden, wenn zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind.

21.

Verbindet man diese Formel mit

$$\operatorname{tg.} C = \frac{c \sin. B}{a - c \cos. B}$$

so folgt

$$M = \frac{a^2}{2\,(\operatorname{cotg.} B + \operatorname{cotg.} C)}$$

der Flächeninhalt eines Dreyeckes, durch Eine Seite und die zwey anliegenden Winkel bestimmt.

22.

Aus I und IV folgt, wenn man setzt

$$m = \sin. B \sin. C$$

$$n = \sin. b \sin. c$$

$$m(1 - \cos. a) = 2 m \sin.^2 \tfrac{1}{2} a = - \cos. (B + C) - \cos A$$

$$m(1 - \cos. A) = 2 n \sin.^2 \tfrac{1}{2} A = \cos. (b - c) - \cos. a$$

Und wenn man überall die halben Winkel nimmt:

$$\frac{m \sin.^2 \frac{1}{2} a}{n \sin.^2 \frac{1}{2} A} = \frac{\sin.^2 \frac{1}{2}(B+C) - \cos.^2 \frac{1}{2} A}{\cos.^2 \frac{1}{2}(b-c) - \cos.^2 \frac{1}{2} a} \ldots \alpha$$

Man hat ferner

$$\frac{\sin. a}{\sin. b} = \frac{\sin. A}{\sin. B}; \quad \frac{\sin. a}{\sin. c} = \frac{\sin. A}{\sin. C}$$

und durch Multiplication

$$m \sin.^2 a = n \sin.^2 A$$

$$\frac{m \sin.^2 \frac{1}{2} a}{n \sin.^2 \frac{1}{2} A} = \frac{\cos.^2 \frac{1}{2} A}{\cos.^2 \frac{1}{2} a}$$

Und durch Substitution in α und Reduction

$$\frac{\cos. \frac{1}{2}(b - c)}{\cos. \frac{1}{2} a} = \frac{\sin. \frac{1}{2}(B + C)}{\cos. \frac{1}{2} A}$$

Auf eine analoge Art findet man

$$\frac{\sin. \frac{1}{2}(b - c)}{\sin. \frac{1}{2} a} = \frac{\sin. \frac{1}{2}(B - C)}{\cos. \frac{1}{2} A}$$

$$\frac{\sin. \frac{1}{2}(b + c)}{\sin. \frac{1}{2} a} = \frac{\cos. \frac{1}{2}(B - C)}{\sin. \frac{1}{2} A}$$

$$\frac{\cos. \frac{1}{2}(b + c)}{\cos. \frac{1}{2} a} = \frac{\cos. \frac{1}{2}(B + C)}{\sin. \frac{1}{2} A}$$

Die drey letzten ergeben sich auch auf eine viel leichtere Art aus der ersten in Verbindung mit den Napier'schen Analogien.

Wen-

Wendet man diese Formeln auf geradlinige Dreyecke an, so folgt daraus die bekannte Analogie, um aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, die übrigen zwey Winkel zu finden. Der Ritter Gauſs hat diese Formeln zuerst bekannt gemacht; da er aber den Beweis nicht angiebt, so hielt ich es nicht für unwichtig, denselben hier aus den Fundamentalformeln für sphärische Dreyecke zu entwickeln.

Tab. XIX.