Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1927. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1927
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Zur Erklärung der Planetoidenlücken im Sonnensystem.

Von **Alexander Wilkens.**

Vorgetragen in der Sitzung am 2. Juli 1927.

Mangels exakter Erklärungen für die im System der Planetoiden des Sonnensystems bestehenden Lücken in Bezug auf die großen Achsen der Bahnen dieser Himmelskörper an den Stellen, die einer Kommensurabilität der mittleren Bewegung zu der des großen Planeten Jupiter entsprechen, hat man sich beinahe daran gewöhnt, die Existenz der Lücken kosmogonischen Ursachen, die aber noch unbekannt sind, zuzuschreiben. Seit Newcombs Erklärung (Astron. Nachr. 2617), daß einem Körper, der sich exakt oder sehr nahe an einer Kommensurabilitätsstelle in Bezug auf Jupiter befindet, in Bezug auf die Störungen seiner Bewegung nichts Ungewöhnliches passieren würde als mehr oder weniger irreguläre Schwankungen und daß sich dabei das Gleichgewicht unaufhörlich wieder herstellen würde, glaubte man, daß an den Kommensurabilitätsstellen, weil sich zur Zeit dort keine Körper vorfinden, dort niemals Körper vorhanden gewesen sind, und deshalb eine kosmogonische Ursache die Lücken verursacht haben müsse. Andererseits weiß man nach wie vor, daß die Störungen der Bahnelemente und Koordinaten in der Nähe der Kommensurabilitätsstellen infolge der Wirkungen der kleinen Divisoren in den Integralausdrücken hohe Beträge auch schon für kleine Zwischenzeiten erreichen, so daß die strenge analytische Darstellung der Bewegung kommensurabelnaher Körper auch nur für wenige Jahrzehnte eine Unmöglichkeit ist, trotz der vielen Versuche, die von Gyldén, Bohlin, Harzer, Brendel, Zeipel und anderen unternommen worden sind, die Differentialgleichungen so strenge als nur möglich zu integrieren; nur in dem Ausnahmefalle einer periodischen Lösung ist bisher eine

strenge Lösung gelungen und zwar nach Potenzen der störenden Masse, was aber bei den allgemeinen Bahnen der nahekommensurablen Körper von vorneweg ausgeschlossen ist. Deshalb war von der analytischen Darstellung der Bewegung der kritischen Planeten, zumal die Konvergenz der angewandten Reihen zweifelhaft oder nichtig ist, eine Antwort auf die Frage nach der Ursache der Lückenentstehung nicht möglich. Hirayama hat die Lücken unter Heranziehung eines widerstehenden Mittels erklären wollen, Klose durch die Instabilität der periodischen Lösungen an verschiedenen Lücken außer der Hecubalücke, weil hier keine periodischen Lösungen 1. Sorte existieren, aber das widerstehende Mittel wie auch die Voraussetzung einer ursprünglich periodischen Lösung sind bis heute unbewiesene Hypothesen.

Bei der unabweisbaren Beziehung der großen Störungen der kommensurabelnahen Körper zur Anziehung des Jupiter ist es nun auffallend, daß man nach dem Mißerfolge der analytischen Untersuchung der Lücken auf Grund des Gravitationsgesetzes noch nicht den einzig möglichen Weg zur Entscheidung herangezogen hat, die Differentialgleichungen der Bewegung mittels mechanischer Quadratur zu integrieren. Wenn diese Methode auch langwierig ist und große Ansprüche an die Geduld stellt, so führt diese Methode aber doch bei jeder vorgelegten Genauigkeit zum Ziel und zur Zeit ist sie unter den vorhandenen Umständen der Unmöglichkeit der exakten Integrierbarkeit der Differentialgleichungen die einzige Methode, die zur Entscheidung der immer noch offenen Frage, ob die Lücken gravitationstheoretischen Ursprungs sind oder nicht, herangezogen werden kann. Hinzu kommt noch die Tatsache, daß der Hecubatypus, bei dem die mittlere Bewegung des Planetoiden nahezu das Doppelte der des Jupiter beträgt, analytisch bekanntlich der schwierigste Fall des Problems der Kommensurabilitäten ist.

Als zu integrierende Differentialgleichungen wurden die der Variation der oskulierenden Elemente gewählt, um sofort den Verlauf der Störungen dieser die Frage entscheidenden Größen zu erlangen. Bei der zunächst vorgenommenen Rechnung diente als vereinfachende Annahme die Voraussetzung, daß Jupiter und Hecuba, wie der gestörte Körper verschwindender Masse abkürzend bezeichnet werden soll, sich in derselben Ebene bewegen.

Ferner wurde in Bezug auf die Exzentrizität des Jupiter die einfachste Voraussetzung getroffen, nämlich $e' = 0$ angenommen; ebenso wurde angenommen, daß die Exzentrizität der Hecuba im Momente $t = 0$ der Opposition, von welchem Zeitpunkt ab die Bewegung untersucht wird, verschwindend ist. Als Jupitermasse diente die tatsächlich im Sonnensystem stattfindende Masse $m' = 1 : 1047.35$, um den engstmöglichen Anschluß an die Verhältnisse im Sonnensystem zu erreichen. Als Variable dienten die mittlere Bewegung n, die mittlere Länge l, und die Exzentrizitätsvariablen $\xi = e \sin \varpi$ und $\eta = e \cos \varpi$, wo e die Exzentrizität und ϖ die Perihellänge. Als Kontrolle der umfangreichen Rechnungen, bei denen ich von den Herren Dr. Heß und Schembor tatkräftigst unterstützt worden bin, diente außer der dauernd scharfen Prüfung der Differenzen als Generalkontrolle für alle Variablen das einzige im vorliegenden Falle des restringierten Dreikörperproblems existierende Jacobische Integral: $\frac{k^2}{2a} + kn'\sqrt{p} + m'\Omega = C$, wo p = Parameter der oskulierenden Ellipse, n' = mittlere Bewegung des Jupiter, Ω = Störungsfunktion und C die Jacobische Konstante. Als Integrationsintervall wurde die einer Jupiterbewegung um 4^0 in Länge entsprechende Zeit gewählt, d. h. 48.139 Tage, so daß der Jupiterumlauf in 90 Teile geteilt ist. Der Anfang der Integration wurde mehrfach mit immer erneuten Werten wiederholt, bis die Integration keine Änderung der Ausgangswerte mehr ergab und alsdann von Schritt zu Schritt schon in der ersten Rechnung eine sehr genaue Extrapolation der Störungen vorgenommen. Nach jedem Umlaufe des Jupiter fand der Übergang zu neuen Elementen statt. Bis jetzt wurde über 19 Umläufe des Jupiter, d. h. zeitlich über 2 Jahrhunderte integriert, resp. über 36 Umläufe von Hecuba.

Das Ergebnis der Untersuchung ist nun aus den beifolgenden Tabellen abzulesen (s. S. 200 u. 201). Da das Integrationsintervall $\omega = 4^0$ beträgt, so ist mit Rücksicht auf die Formeln der mechanischen Quadratur der Zeitpunkt der Epoche $= -\frac{1}{2}\omega$, sodaß die Argumente $90\,\omega$, $180\,\omega$ etc. den Moment der Vollendung des 1., 2. Umlaufes des Jupiter, also des 2., 4. Umlaufes etc. von Hecuba, vermehrt um die dem Intervall $\frac{1}{2}\omega$ entsprechende Zeit fixieren. In Bezug auf die mittlere Bewegung n sind hier nur die besonders interessie-

Minima der mittleren Bewegung.

Zeit	n		
$-1/2\omega$	598".26		
		+0".07	
$+89\omega$	.33		+0.15
		22	
+178	.55		0.15
		37	
267	.92		0.15
		52	
356	599.44		0.14
		66	
445	600.10		0.13
		79	
534	600.89		0.09
		88	
622	601.77		0.10
		98	
710	602.75		0.04
		1.02	
801	603.77		0.01
		1.03	
886	604.80		+0.04
		1.07	
973	605.87		−0.21
		0.86	
1061	606.73		−0.04
		0.82	
1148	607.55		−0.15
		0.67	
1235	608.22		−0.18
		0.49	
1322	608.71		−0.18
		0.31	
1409	609.02		−0.21
		+ 0.10	
1496	609.12		−0.19
		−0.09	
1583	609.03		

Längenstörung (mittlere Länge)

Zeit	$l-l_0$					
$-1/2\omega$	0°	0'.0				
			+2°	5'.6		
$+90\omega$	+2	5.6			+	11.8
			2	17.4		
180	4	23.0			+	21.3
			2	38.7		
270	7	1.7			+	32.2
			3	10.9		
360	10	12.6			+	43.0
			3	53.9		
450	14	6.5			+	51.9
			4	45.8		
540	18	52.3			+1°	0.6
			5	46.4		
630	24	38.7			+1	7.1
			6	53.5		
720	31	32.2			+1	11.5
			8	5.0		
810	39	37.2			+1	12.5
			9	17.5		
900	48	54.7			+1	10.9
			10	28.4		
990	59	23.1			+1	5.7
			11	34.1		
1080	70	57.2			+0	57.9
			12	32.0		
1170	83	29.2			+0	47.4
			13	19.4		
1260	96	48.6			+0	35.3
			13	54.7		
1350	110	43.3			+0	22.1
			14	16.8		
1440	125	0.1			+0	8.3
			14	**25.1**		
1530	139	25.2			−0	5.8
			14	**19.3**		
1620	153	44.5				

Perihellänge					Exzentrizität ($\varphi = \arcsin e$)				
Zeit	$\overline{\omega}$				Zeit	φ			
$-1/2\omega$	0^0	0'			$-1/2\omega$	0^0	0.0		
								+32.2	
$+90\omega$	267^0	56			$+90\omega$	0^0	32.2		− 0.6
			−1°	53'				+31.6	
180	266	3		− 5'	180	1	3.8		− 0.1
			−1	58				+31.5	
270	264	5		− 6	270	1	35.3		− 0.3
			−2	4				+31.2	
360	262	1		− 9	360	2	6.5		− 0.4
			−2	13				+30.8	
450	259	48		− 9	450	2	37.3		− 0.8
			−2	22				+30.0	
540	257	26		− 8	540	3	7.3		− 1.1
			−2	30				+28.9	
630	254	56		− 8	630	3	36.2		− 1.7
			−2	38				+27.2	
720	252	18		− 7	720	4	3.4		− 2.1
			−2	45				+25.1	
810	249	33		− 8	810	4	28.5		− 2.6
			−2	53				+22.5	
900	246	40		− 7	900	4	51.0		− 2.8
			−3	0				+19.7	
990	243	40		− 4	990	5	10.7		− 3.2
			−3	4				+16.5	
1080	240	36		− 5	1080	5	27.2		− 3.3
			−3	9				+13.2	
1170	237	27		− 4	1170	5	40.4		− 3.3
			−3	13				+ 9.9	
1260	234	14		− 2	1260	5	50.3		− 3.3
			−3	15				+ 6.6	
1350	230	59		− 2	1350	5	56.9		− 3.3
			−3	17				+ 3.3	
1440	227	42		0	1440	6	0.2		− 3.1
			−3	17				+ 0.2	
1530	224	25		0	1530	6	0.4		− 3.2
			−3	17				− 3.0	
1620	221	8			1620	5	57.4		

renden Minima nebst den zugehörigen Argumenten tabuliert; bei der späteren ausführlicheren Publikation werden auch die Werte von n selbst für andere Zeitpunkte tabuliert werden. Die Minima für n treten zunächst immer nach Verlauf eines Intervalles von $89\,\omega$, zum Schluß schon nach $87\,\omega$ auf. Es zeigt sich, daß die Minimalwerte, wie die Werte von n allgemein, dauernd wachsen, bis nach dem 17. Umlaufe, wie die 1. Differenz durch ihr negatives Vorzeichen ankündigt, die mittlere Bewegung wieder abzunehmen beginnt, nachdem die Geschwindigkeit der Zunahme der mittleren Bewegung nach dem 10. Umlaufe zwischen $886\,\omega$ und $973\,\omega$ ihr Maximum erreicht hatte. Der Ausgangswert von $n = 2\,n' = 598''.2568$ ist übrigens das absolute Minimum von n, da, wie das Jacobische Integral zeigt, der Differentialquotient $de/da < 0$ im Beginn der Bewegung ist, so daß, weil $e = 0$ im Momente des Beginns der Bewegung und e deshalb nur positiv wachsen, a nur abnehmen, also n nur wachsen kann. Nach dem 16. Umlaufe ist der asymptotische Verlauf von n beendet und nunmehr, nach einer Gesamtänderung von n um $11''$, beginnt das Zeitalter der durch die Kommensurabilitätsnähe verursachten entsprechend langperiodischen Störungen ohne eine Rückkehr zur Kommensurabilitätsstelle.

Die Exzentrizität, dargestellt durch $\varphi = \text{arc sin}\, e = \text{arc sin}\, \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ nimmt, wie aus der Tabelle ersichtlich, von vorneweg dauernd zu, ganz unbehelligt durch die periodischen Störungen, aber die Zunahme wird dauernd verlangsamt, bis nach dem 17. Umlaufe eine Abnahme einzutreten beginnt, nachdem sich vorher schon in den unmittelbar vorhergehenden Umläufen, ab $1008\,\omega$, kurze und schwache Oscillationen um den zeitweiligen Säkularwert gezeigt hatten, was auf der kurzen Tabelle nicht zum Ausdruck kommt; allmählich werden diese Oscillationen mit der Entfernung aus der Kommensurabilitätsstelle immer stärker. Bemerkenswert ist, daß die maximale Zunahme von φ pro Umlauf des Jupiter $32'$ beträgt, ein Betrag, der nicht als von der Ordnung der störenden Masse m' zu betrachten ist, ebensowenig wie die übrigen großen Störungsbeträge der anderen Bahnelemente. Der Endwert, um den schließlich die langperiodischen Störungen von e schwanken, entspricht $\varphi = 6^0$ d. h. $e = 0.10$. Das Verhalten von n und e zeigt also, daß die Lösung der Differential-

gleichungen zu einer asymptotischen Bewegung geführt hat und der gestörte Körper auf Dauer nach Ablauf von 2 Jahrhunderten aus der Lücke entfernt wird, womit der gravitationstheoretische Beweis für die Ursache der Lücke erbracht ist.

In Bezug auf die Winkelvariablen, die Perihellänge $\bar{\omega}$ und die Längenstörung $l - l_0$, wo l_0 die ungestörte von der Opposition zur Zeit $t = 0$ $(-\,{}^1/_2\,\omega)$ gezählte Länge, ergibt sich, daß das Perihel, das zur Zeit $t = 0$ die Länge 0 hatte, da hier die Geschwindigkeit von Hecuba auf dem Radiussektor senkrecht steht, kurze Zeit vor der Opposition, wofür die Integration ebenfalls ausgeführt wurde, um die Länge 90^0 schwankt; sofort nach der Opposition springt die Perihellänge aber bei der zuerst minimen Exzentrizität auf $\omega = 270$, also um 180 gegen die Lage kurz vor der Opposition, und nimmt dann dauernd ab, um nach 18 Umläufen den Wert $\omega = 221^0$ zu erreichen, sodaß es den Anschein hat, als wenn das Perihel sich dem Werte $\omega = 180$ als Grenze nähern würde. Das sogenannte kritische Glied der Hecubabewegung $f = l - 21' + \bar{\omega}$ ist dauernd wachsend, sodaß das Glied also keiner Libration unterliegt.

Die Längenstörung $l - l_0$ wächst mit positiver Beschleunigung dauernd an, bis mit dem 17. Umlauf die Beschleunigung negativ wird, nachdem sie bei $810\,\omega = 9$ Umläufen das positive Maximum der Beschleunigung im Betrage von $1^0 12'$ pro Umlauf erreicht hatte.

Allgemein ergibt sich also, daß nach Ablauf von $1530\,\omega = 17$ Umläufen das Ende der asymptotischen Entfernung aus der Kommensurabilitätsstelle erreicht worden ist, sodaß von diesem Zeitpunkt ab die irreguläre Oscillation um die alsdann erreichte Lage stattfindet, ohne daß aber die Kommensurabilitätsstelle wieder erreicht werden könnte.

Zur Ergänzung wäre noch festzustellen, wie die Bewegung derjenigen Körper sich verhält, die im Momente $t = 0$ nicht an der strengen Stelle der Kommensurabilität, sondern in der Nachbarschaft ihre Bewegung beginnen. Deshalb habe ich analoge Rechnungen wie oben an den Stellen, wo $n = 2n' - 1'' = 597.26$ und $n = 2n' - 10''$ etc. begonnen, d. h. bei Lagen, die sich außerhalb der Kommensurabilitätsstelle befinden, weil die innerhalb der Kommensurabilitätsgrenze gelegenen Körper bei $e = 0$ dem Jacobischen Intregal zufolge nur nach innen in Richtung zur Sonne laufen können, also im Gegensatz zu den außerhalb die Bewegung

beginnenden Körpern niemals die Kommensurabilitätsgrenze überschreiten können. Es zeigt sich, daß im 1. Falle, wo $n = 597''.26$, der Körper sich der Kommensurabilitätsstelle nähert und sie von außen nach innen überschreitet. Es bleibt also die Ermittlung derjenigen Stelle resp. mittleren Bewegung, bei der keine Überschreitung der Grenze mehr möglich ist, indem die mittlere Bewegung so weit von der Kommensurabilität entfernt ist, daß jetzt nur noch wesentlich kurzperiodische Störungen auftreten und der Körper sich nicht mehr an die Kommensurabilitätsstelle heranbewegen kann. Dadurch wäre dann die Breite der Lücke fixiert. Die ausführlichere Darstellung und Weiterführung der obigen Ergebnisse bleibt weiteren Mitteilungen vorbehalten.