Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1927. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1927
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Elementare Extremalprobleme über nichtnegative trigonometrische Polynome.

Von **Otto Szász** in Frankfurt a. Main.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 15. Juni 1927.

1. Die Resultate dieser Arbeit sind vor einer Reihe von Jahren entstanden, anschließend an frühere Veröffentlichungen und an eine mit Herrn v. Egerváry verfaßte ältere, erst jetzt erscheinende Arbeit[1]). Es werden im Folgenden einige Sätze auf kürzerem Wege abgeleitet und einige neue hinzugefügt. Der Ideengang ist eng verwandt mit dem in meiner Arbeit[2]): „Über nichtnegative trigonometrische Polynome" befolgten.

Es handelt sich allgemein darum, im Bereiche der nichtnegativen trigonometrischen Polynome n-ter Ordnung mit dem konstanten Gliede 1

$$\tau(t) = 1 + \alpha_1 \cos t + \beta_1 \sin t + \ldots + \alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt$$

die extremen Werte gewisser Ausdrücke in den Koeffizienten und die zugehörigen $\tau(t)$ zu bestimmen. Das wesentliche Hilfsmittel ist dabei eine von den Herren L. Fejér und F. Riesz herrührende Parameterdarstellung der nichtnegativen trigonometrischen Polynome; darnach ist $\tau(t)$ in der Form darstellbar

$$(1) \qquad \tau(t) = |u_0 + u_1 e^{it} + \ldots + u_n e^{int}|^2.$$

---

[1]) Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome. Math. Zeitschr.

[2]) Sitzungsber. d. Akademie München 1917, S. 307—320.

Setzt man

$$\alpha_0 = 1,\ \beta_0 = 0,\ \alpha_\nu - i\beta_\nu = \gamma_\nu,\ \nu = 0, 1, \ldots n,$$

so besagt (1), daß die γ_ν die Darstellung besitzen:

$$(2) \qquad \gamma_\varkappa = 2\sum_{\nu=0}^{n-\varkappa} u_{\nu+\varkappa}\bar{u}_\nu,\ 1 = \sum_{\nu=0}^{n} |u_\nu|^2,\ \varkappa = 1, 2, \ldots n;$$

hierdurch geht ein Ausdruck in den γ_ν, $\bar{\gamma}_\nu$ über in eine Funktion der Variabeln u_ν, $\bar{u}_\nu$.

2. Ich gebe zunächst eine neue einfache Bestimmung des Maximums von $|\gamma_1|$ und der zugehörigen $\tau(t)$. Nach (2) ist

$$|\gamma_1| = 2\left|\sum_{\nu=0}^{n-1} u_{\nu+1}\bar{u}_\nu\right|;$$

setzt man

$$u_\nu = x_\nu e^{i\varphi_\nu},\ x_\nu \geqq 0,\ \nu = 0, 1, \ldots n,$$

so wird

$$|\gamma_1| \leqq 2(x_0 x_1 + x_1 x_2 + \ldots + x_{n-1} x_n);$$

Gleichheit gilt nur, falls

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1 = \ldots = \varphi_n - \varphi_{n-1}.$$

Wegen (1) können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\varphi_0 = 0$ setzen; schreiben wir φ statt φ_1, so wird $\varphi_2 = 2\varphi, \ldots, \varphi_n = n\varphi$.

Wir haben nun das Maximum der quadratischen Form $\sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu-1} x_\nu$ unter der Bedingung $\sum_{\nu=0}^{n} x_\nu^2 = 1$ zu bestimmen. In bekannter Weise erhält man für die x_ν und für das Maximum λ das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{r} -\lambda x_0 + x_1 \qquad\qquad = 0 \\ x_0 - \lambda x_1 + x_2 \qquad = 0 \\ - \quad - \quad - \quad - \qquad \\ x_{n-2} - \lambda x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} - \lambda x_n \qquad = 0 \end{array}\right\}.$$

Wegen $2x_{\nu-1}x_\nu \leqq x_{\nu-1}^2 + x_\nu^2$ ist offenbar $\lambda \leqq 2$; wir können also

$$\lambda = 2\cos\vartheta = e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}$$

setzen. Das Gleichungssystem kann nun so geschrieben werden: $x_1 - e^{i\vartheta}x_0 = e^{-i\vartheta}x_0$, $x_2 - e^{i\vartheta}x_1 = e^{-i\vartheta}(x_1 - e^{i\vartheta}x_0), \ldots,$ $x_n - e^{i\vartheta}x_{n-1} = e^{-i\vartheta}(x_{n-1} - e^{i\vartheta}x_{n-2})$, $x_{n-1} - e^{-i\vartheta}x_n = e^{i\vartheta}x_n$;

hieraus folgt

$$x_\nu - e^{i\vartheta}\, x_{\nu-1} = x_0\, e^{-i\nu\vartheta}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n;$$
$$x_n - e^{i\vartheta}\, x_{n-1} = -\, e^{2i\vartheta}\, x_n.$$

Hierfür können wir schreiben:

$$e^{-i\nu\vartheta}\, x_\nu - e^{-i(\nu-1)\vartheta}\, x_{\nu-1} = e^{-2i\nu\vartheta}\, x_0, \; \nu = 1, 2, \ldots, n;$$
$$-\, e^{2i\vartheta}\, x_n = e^{-in\vartheta}\, x_0;$$

aus diesen Gleichungen ergibt sich sofort

$$e^{-i\nu\vartheta}\, x_\nu = x_0\,(1 + e^{-2i\vartheta} + \ldots + e^{-2i\nu\vartheta}), \; \nu = 1, 2, \ldots, n;$$
$$x_n = -\, e^{-i(n+2)\vartheta}\, x_0.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt (da $x_0 \neq 0$)

$$1 + e^{-2i\vartheta} + \ldots + e^{-2in\vartheta} = -\, e^{-i(2n+2)\vartheta},$$

dies ist nur eine andere Gestalt der charakteristischen Gleichung unseres homogenen Gleichungssystems; hieraus folgt

$$\vartheta = \frac{\pi}{n+2},$$

also das gesuchte Maximum

$$\lambda = 2 \cos \frac{\pi}{n+2}.$$

Ferner ist

$$x_\nu = x_0\, e^{i\nu\vartheta}\, \frac{1 - e^{-2i\vartheta(\nu+1)}}{1 - e^{-2i\vartheta}} = x_0\, \frac{e^{i(\nu+1)\vartheta} - e^{-i(\nu+1)\vartheta}}{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}$$
$$= x_0\, \frac{\sin \dfrac{(\nu+1)\pi}{n+2}}{\sin \dfrac{\pi}{n+2}},$$

und schließlich

$$\tau(t) = a \left| \sum_{\nu=0}^{n} \sin (\nu+1) \frac{\pi}{n+2}\, e^{i\nu(t+\varphi)} \right|^2,$$

wobei

$$\frac{1}{a} = \sum_{\nu=0}^{n} \sin^2 (\nu+1) \frac{\pi}{n+2} = \frac{n+2}{2}.$$

Eine einfache Rechnung ergibt weiter

$$(3) \quad \tau(t) = 1 + \frac{2}{n+2} \sum_{\nu=1}^{n} \left[(n-\nu+1) \cos \frac{\nu\pi}{n+2} + \frac{\sin \dfrac{(\nu+1)\pi}{n+2}}{\sin \dfrac{\pi}{n+2}} \right] \cdot \cos \nu\,(t+\varphi).$$

Zusammenfassend erhalten wir den

Satz I. Aus $\tau(t) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu \cos \nu t + \beta_\nu \sin \nu t) \geq 0$ folgt

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \leq 2 \cos \frac{\pi}{n+2};$$

Gleichheit gilt nur im Falle (3).[1])

3. Zur Bestimmung des Maximums von $|\gamma_\varkappa|$ für irgend ein $\varkappa \geq 2$ seien $\omega_1, \ldots, \omega_\varkappa$ die $\varkappa$-ten Einheitswurzeln; wegen

$$\tau(t) = \Re \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu e^{i\nu t} \geq 0$$

ist auch

$$\frac{1}{\varkappa} \Re \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu e^{i\nu t} \omega_\mu^\nu \geq 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots \varkappa, \quad \omega_\mu = e^{\frac{2\mu\pi i}{\varkappa}}.$$

Und hieraus durch Addition

$$\frac{1}{\varkappa} \sum_{\mu=1}^{\varkappa} \tau\left(t + \frac{2\mu\pi}{\varkappa}\right) = 1 + \Re\,(\gamma_\varkappa e^{\varkappa t i} + \gamma_{2\varkappa} e^{2\varkappa t i} + \ldots$$
$$+ \gamma_{\lambda\varkappa} e^{\lambda\varkappa t i}) \geq 0;$$

hierbei ist

$$\lambda\varkappa \leq n < (\lambda + 1)\varkappa \quad \text{oder} \quad \lambda = \left[\frac{n}{\varkappa}\right].$$

Setzt man $\varkappa t = \vartheta$ so wird

$$1 + \Re \sum_{\nu=1}^{\lambda} \gamma_{\nu\varkappa} e^{\nu\vartheta i} \geq 0; \tag{4}$$

aus Satz I folgt somit

$$|\gamma_\varkappa| \leq 2 \cos \frac{\pi}{\lambda + 2} = 2 \cos \frac{\pi}{\left[\frac{n}{\varkappa}\right] + 2}.$$

Hier gilt Gleichheit, falls

$$1 + \Re \sum_{\nu=1}^{\lambda} \gamma_{\nu\varkappa} e^{\nu\varkappa t i} = \frac{2}{\lambda + 2} \left| \sum_{\nu=0}^{\lambda} \sin \frac{(\nu+1)\pi}{\lambda + 2} e^{i\nu(\varkappa t + \varphi)} \right|^2.$$

---

[1]) Vgl. L. Fejér, Über trigonometrische Polynome, Journ. f. Math. 146 (1915), S. 53—82; insb. S. 79—80; ferner O. Szász, Über harmonische Funktionen und L-Formen, Mathem. Zeitschrift 1 (1918), S. 149—162. Vgl. auch G. Szegö, Koeffizientenabschätzungen ..., Math. Ann. 96, 1927, S. 601—632; insb. S. 621—629.

Nun ist leicht zu sehen, daß das Polynom $\sum_{\nu=0}^{\lambda} \sin \frac{(\nu+1)\pi}{\lambda+2} \cdot z^{\nu}$ die Nullstellen hat

$$e^{-i\frac{2\nu+1}{\lambda+2}\pi}, \nu = 1, 2, \ldots \lambda;$$

es ist also

$$1 + \Re \sum_{\nu=1}^{\lambda} \gamma_{\nu\varkappa} e^{\nu\varkappa t i} = 0 \text{ für } t = -\frac{\varphi + \frac{2\nu+1}{\lambda+2}\pi}{\varkappa} = t_{\nu}, \nu = 1, 2, \ldots \lambda.$$

Oder auch

$$\sum_{\mu=1}^{\varkappa} \tau\left(t + \frac{2\mu\pi}{\varkappa}\right) = 0 \text{ für } t = t_{\nu},\ \nu = 1, 2, \ldots \lambda;$$

da aber $\tau \geq 0$ ist, so folgt hieraus, daß die Glieder der letzten Summe einzeln verschwinden; insbesondere ist $\tau(t) = 0$ für $t = t_{\nu}$.

Also ist

$$(5)\quad \tau(t) = \frac{2}{\lambda+2}\left|\sum_{\nu=0}^{\lambda} \sin\frac{(\nu+1)\pi}{\lambda+2} \cdot e^{i\nu(\varkappa t+\varphi)}\right|^2 \cdot \psi(t),\quad \lambda = \left[\frac{n}{\varkappa}\right],$$

wobei $\psi(t)$ ein beliebiges nichtnegatives trigonometrisches Polynom $(n - \varkappa\lambda)$-ter Ordnung mit dem konstanten Gliede 1 ist. Somit gilt der[1])

Satz II. Aus

$$(6)\qquad \tau(t) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_{\nu} \cos \nu t + \beta_{\nu} \sin \nu t) \geq 0$$

folgt

$$|\alpha_{\varkappa} - i\beta_{\varkappa}| \leq 2 \cos \frac{\pi}{\left[\frac{n}{\varkappa}\right] + 2};$$

Gleichheit gilt nur im Falle (5).

4. In meiner a. S. 185 unter 2 zitierten Arbeit hatte ich den Satz bewiesen: aus (6) folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_{\nu} + i\beta_{\nu}| \leq n,$$

[1]) Vgl. auch v. Egerváry und Szász a. S. 185 a. O. 1. — Szegö a. S. 188 a. O. 1, S. 624—626. — Für $\varkappa > \frac{n}{2}$ und reine Kosinuspolynome zuerst bei Fejér a. S. 188 a. O. 1; für beliebige trigonometrische Polynome Szász a. S. 185 a. O. 2. — Zu dieser kurzen Herleitung der Sätze II und III wurde ich durch eine mündliche Bemerkung des frühverstorbenen F. Lukács im März 1918 angeregt. Einen anderen Beweis des Satzes II hat mir später (im Juni 1919) Herr M. Krafft mitgeteilt.

und Gleichheit gilt nur für

$$(F)\qquad \tau(t) = 1 + 2\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{n-\nu}{n+1} \cos(\nu+1)(t+\varphi)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}(t+\varphi)}{\sin\frac{1}{2}(t+\varphi)}\right)^2.$$

Wendet man diesen Satz auf das trigonometrische Polynom (4) an, so wird

$$\sum_{\nu=1}^{\lambda} |\gamma_{\nu\varkappa}| \leqq \lambda;$$

Gleichheit gilt nur für

$$1 + \Re\sum_{\nu=1}^{\lambda} \gamma_{\nu\varkappa}\, e^{\nu\varkappa t i} = \frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{\sin\frac{\lambda+1}{2}(\varkappa t+\varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\varkappa t+\varphi)}\right)^2, \quad \lambda = \left[\frac{n}{\varkappa}\right],$$

Wie vorhin schließen wir, daß an den Nullstellen dieses trigonometrischen Polynoms auch $\tau(t)$ verschwindet; daher ist

$$(7)\qquad \tau(t) = \frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{\sin\frac{\lambda+1}{2}(\varkappa t+\varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\varkappa t+\varphi)}\right)^2 \psi(t),$$

wobei $\psi(t)$ ein beliebiges nichtnegatives trigonometrisches Polynom von der Ordnung $n - \varkappa\lambda \leqq \varkappa - 1$ mit dem konstanten Gliede 1 ist. Somit gilt der[1])

Satz III. Aus (6) folgt

$$|\alpha_\varkappa + i\beta_\varkappa| + |\alpha_{2\varkappa} + i\beta_{2\varkappa}| + \cdots \leqq \lambda = \left[\frac{n}{\varkappa}\right];$$

Gleichheit gilt nur im Falle (7).

Ähnlich läßt sich die Ungleichung[2])

$$|\gamma_1| + |\gamma_3| + \cdots \leqq \begin{cases} \mu + 1 & \text{für } n = 2\mu + 1, \\ \sqrt{\mu(\mu+1)} & \text{für } n = 2\mu, \end{cases}$$

verallgemeinern.

5. Aus (2) folgt

$$(8)\qquad |\gamma_\varkappa| + |\gamma_{n-\varkappa+1}| \leqq 2(x_0 x_\varkappa + x_1 x_{\varkappa+1} + \cdots + x_{n-\varkappa} x_n$$
$$+ x_{n-\varkappa+1} x_0 + \cdots + x_n x_{\varkappa-1});$$

---

[1]) Für $\varkappa = 2$ schon in meiner a. S. 185 unter 2 zitierten Arbeit.

[2]) Vgl. meine Arbeit a. S. 185 a. O. 2.

Gleichheit gilt hier nur, falls

$$(9)\qquad \varphi_\varkappa - \varphi_0 = \varphi_{\varkappa+1} - \varphi_1 = \cdots = \varphi_n - \varphi_{n-\varkappa},$$
$$\varphi_{n-\varkappa+1} - \varphi_0 = \cdots = \varphi_n - \varphi_{\varkappa-1}.$$

Aus (8) folgt weiter wegen $2ab \leqq a^2 + b^2$

$$|\lambda_\varkappa| + |\lambda_{n-\varkappa+1}| \leqq 2\sum_{\nu=0}^{n} x_\nu^2 = 2;$$

hier gilt Gleichheit nur für

$$(10)\ x_0 = x_\varkappa,\ x_1 = x_{\varkappa+1}, \cdots x_{n-\varkappa} = x_n,\ x_0 = x_{n-\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa-1} = x_n.$$

Dies ergibt den

Satz IV. Aus (6) folgt[1])

$$(11)\qquad |\alpha_\varkappa + i\beta_\varkappa| + |\alpha_{n-\varkappa+1} + i\beta_{n-\varkappa+1}| \leqq 2;$$

die Fälle der Gleichheit lassen sich aus (9) und (10) bestimmen.

Speziell für $\varkappa = 1$ wird

$$|\alpha_1 + i\beta_1| + |\alpha_n + i\beta_n| \leqq 2;$$

Gleichheit gilt hier nach (9) und (10) falls

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1 = \cdots = \varphi_n - \varphi_{n-1},\quad x_0 = x_1 = \cdots = x_n;$$

also

$$\tau(t) = \frac{1}{n+1}\left|1 + e^{i(t+\varphi)} + \cdots + e^{in(t+\varphi)}\right|^2$$
$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}(t+\varphi)}{\sin\frac{1}{2}(t+\varphi)}\right)^2.\ ^{2)}$$

Durch Anwendung der Formel (4) erhält man jetzt

$$|\gamma_\varkappa| + |\gamma_{\lambda\varkappa}| \leqq 2,\ \lambda = \left[\frac{n}{\varkappa}\right];$$

und allgemeiner

$$|\gamma_{\nu\varkappa}| + |\gamma_{(\lambda-\nu+1)\varkappa}| \leqq 2,\ \nu < \lambda = \left[\frac{n}{\varkappa}\right].$$

Die Fälle der Gleichheit lassen sich leicht bestimmen.

---

[1]) Vgl. auch v. Egerváry und Szász a. S. 185 a. O. 1.

[2]) Bei diesem trigonometrischen Polynom ist auch für jedes $\varkappa$: $|\gamma_\varkappa| + |\gamma_{n-\varkappa+1}| = 2$.

Es ist leicht zu sehen, daß allgemein für $\sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu |\gamma_\nu|$, $\varrho_\nu \geqq 0$ das Extremum schon durch reine Kosinuspolynome erreicht wird.

6. Es sei jetzt

$$T(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t + \cdots + a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

ein trigonometrisches Polynom n-ter Ordnung mit dem konstanten Gliede Null; sein Maximum sei M, sein Minimum $-m$. Die positiven Zahlen M, m geben die höchste Steigung bzw. die tiefste Senkung von T.

Offenbar ist

$$\frac{T(t)+m}{m} = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{a_\nu}{m} \cos \nu t + \frac{b_\nu}{m} \sin \nu t \right) \geqq 0,$$

also nach (11)

$$|a_k - i b_k| + |a_{n-k+1} - i b_{n-k+1}| \leqq 2m.$$

Ebenso folgt aus $\dfrac{M - T(t)}{M} \geqq 0$ die Ungleichung

$$|a_k - i b_k| + |a_{n-k+1} - i b_{n-k+1}| \leqq 2M;$$

oder

$$(12) \qquad \left.\begin{matrix} m \\ M \end{matrix}\right\} \geqq \frac{|a_k - i b_k| + |a_{n-k+1} - i b_{n-k+1}|}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Dies gibt den

Satz V. *Die höchste Steigung und die tiefste Senkung von $T(t)$ ist mindestens so groß wie das arithmetische Mittel der Amplituden zweier zur Mitte symmetrisch gelegener Glieder.*

Durch Addition für $k = 1, \ldots n$ folgt aus (12)

$$\left.\begin{matrix} m \\ M \end{matrix}\right\} \geqq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k - i b_k| \,{}^{1)}.$$

7. Es seien n reelle Zahlen gegeben: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, und

$$|a_\nu| = 1, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Aus (2) folgt

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \beta_k = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k (\bar{\gamma}_k - \gamma_k) = i \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \sum_{\nu=0}^{n-k} (u_{\nu+k} \bar{u}_\nu - \bar{u}_{\nu+k} u_\nu) \right]$$

[1]) Vgl. meine auf a. S. 185 unter 2) zitierte Arbeit.

und hieraus

$$(13) \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \beta_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{n-k} \left|u_{\nu+k}\bar{u}_\nu - \bar{u}_{\nu+k} u_\nu\right|.$$

Setzt man

$$u_\nu = |u_\nu| e^{i\varphi_\nu}, \quad -\pi \leq \varphi_\nu < \pi, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n,$$

so wird

$$u_{\nu+k}\bar{u}_\nu - \bar{u}_{\nu+k} u_\nu = |u_\nu u_{\nu+k}| \cdot 2i \sin(\varphi_{\nu+k} - \varphi_\nu);$$

es ist also

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \beta_k\right| \leq 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{n-k} |u_\nu u_{\nu+k}| \left|\sin(\varphi_{\nu+k} - \varphi_\nu)\right|,$$

und Gleichheit gilt hier nur, wenn für $\varepsilon = 1$ bzw. $\varepsilon = -1$

$$(14) \qquad \begin{gathered} \operatorname{sgn} \sin(\varphi_{\nu+k} - \varphi_\nu) = \varepsilon a_k, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-k; \\ k = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered}$$

Der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{n-k} \left|u_{\nu+k}\bar{u}_\nu - \bar{u}_{\nu+k} u_\nu\right| = 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{n-k} |u_\nu u_{\nu+k}| \left|\sin(\varphi_{\nu+k} - \varphi_\nu)\right|$$

bleibt offenbar ungeändert, wenn die einzelnen φ_ν durch $\varphi_\nu \pm \pi$ ersetzt werden; ich kann daher annehmen, daß

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_\nu < \frac{\pi}{2}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n$$

ist. Gibt man ferner den u_ν eine passende Reihenfolge:

$$v_0, v_1, \ldots, v_n, \quad v_\nu = |v_\nu| e^{i\psi_\nu}, \quad |\psi_\nu| \leq \frac{\pi}{2},$$

so wird

$$\psi_0 \leq \psi_1 \leq \ldots \leq \psi_n.$$

Dann ist aber

$$\sin(\psi_{\nu+k} - \psi_\nu) \geq 0;$$

also

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{n} \left|u_{\nu+k}\bar{u}_\nu - \bar{u}_{\nu+k} u_\nu\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{n-k} v_{\nu+k}\bar{v}_\nu - \bar{v}_{\nu+k} v_\nu\right|,$$

wobei die v_ν bis auf die Reihenfolge mit den u_ν übereinstimmen[1]). Daher ist

$$\operatorname{Max} \sum\sum |u_{\nu+k}\,\bar{u}_\nu - \bar{u}_{\nu+k}\,u_\nu| = \operatorname{Max} \sum\sum (\bar{u}_{\nu+k}\,u_\nu - u_{\nu+k}\,\bar{u}_\nu)\,i,$$
$$\sum |u_\nu|^2 = 1.$$

Für die zugehörigen u_ν und das reelle Maximum λ dieser Hermiteschen Form erhält man in bekannter Weise das Gleichungssystem

$$(15)\quad \begin{cases} -i(u_1 + \cdots + u_n) = \lambda u_0, \; i(u_0 + \cdots + u_{\nu-1}) - i(u_{\nu+1} + \\ \qquad\qquad + \cdots + u_n) = \lambda u_\nu, \\ \nu = 1, 2, \cdots n-1, \; i(u_0 + \ldots + u_{n-1}) = \lambda u_n. \end{cases}$$

Zur Auflösung dieses Gleichungssystems subtrahieren wir die $(\nu+1)$-te Gleichung von der ν-ten, dann wird

$$-i(u_\nu + u_{\nu+1}) = \lambda(u_\nu - u_{\nu+1}), \quad \nu = 0, \ldots n-1$$

oder

$$(\lambda - i)\,u_{\nu+1} = (\lambda + i)\,u_\nu, \quad \nu = 0, \ldots n-1.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar

$$(16)\quad u_1 = \frac{\lambda+i}{\lambda-i}\,u_0, \quad u_2 = \left(\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\right)^2 u_0, \quad \ldots \; u_n = \left(\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\right)^n u_0.$$

Aus (16) folgt nun

$$|u_0| = |u_1| = \cdots = |u_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}};$$

setzt man ferner

$$(17)\quad \frac{\lambda+i}{\lambda-i} = e^{i\vartheta}, \quad \text{also } \lambda = -i\,\frac{1+e^{i\vartheta}}{1-e^{i\vartheta}},$$

so wird aus der ersten Gleichung unter (15)

$$e^{(n+1)\vartheta i} = -1, \quad \text{also } \vartheta = \frac{\pi\cdot\nu}{n+1}, \quad \nu = \pm 1, \pm 3, \ldots,$$

und aus (17) und (16)

$$\lambda = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2(n+1)}, \quad u_\nu = e^{i\frac{\pi\nu}{n+1}}\,u_0, \quad \nu = 1, 2, \ldots n.$$

Entsprechend wird für $-u_\nu$ das Minimum $-\lambda$.

---

[1]) Eine ähnliche Überlegung schon bei G. Pick, Über die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen von Schwingungsproblemen. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 2, 1922, S. 353—357.

Es ist also nach (13)

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \right| \leq \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2(n+1)}\text{[1]}; \tag{18}$$

Gleichheit gilt hier nach (14) nur, wenn

$\alpha_k = 1, \ k = 1, 2, \ldots n,$ oder $\alpha_k = -1, \ k = 1, 2, \ldots n,$

und

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \frac{1}{n+1} \left| \sum_{\nu=0}^{n} e^{i\nu\left(\frac{\pi}{n+1} \pm t\right)} \right|^2 = \\ &= 1 + \frac{2}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} (n - \nu + 1) \cos \nu \left(t \pm \frac{\pi}{n+1}\right), \end{aligned} \tag{19}$$

also

$$\beta_\nu = \pm \frac{2}{n+1} (n - \nu + 1) \sin \frac{\nu\pi}{n+1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots n. \tag{19'}$$

Da man $\alpha_k = \operatorname{sgn} \beta_k$ setzen kann, so folgt aus (18)

$$\sum_{k=1}^{n} |\beta_k| \leq \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2(n+1)};$$

auch hier gilt Gleichheit offenbar nur im Falle (19).

Zusammenfassend gilt der

Satz VI. *Aus* $1 + \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu \cos \nu t + \beta_\nu \sin \nu t) \geq 0$ *folgt*

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\beta_\nu| \leq \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2(n+1)}; \tag{20}$$

Gleichheit gilt nur im Falle (19').

Dagegen ist, wie ich schon in § 4 bemerkt habe,

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu - i\beta_\nu| \leq n,$$

und diese Schranke wird auch erreicht. Durch das in § 4 angewandte Verfahren erhält man ferner aus (20)

$$\sum_{\nu=1}^{\lambda} |\beta_{\nu k}| \leq \lambda, \quad \lambda = \left[\frac{n}{k}\right];$$

Gleichheit gilt hier nur für

[1] Für $\alpha_k = 1$ schon in meiner Arbeit a. S. 188 a. O. 1).

$$\tau(t) = \frac{1}{\lambda + 1} \left| \sum_{\nu=0}^{\lambda} e^{i\nu\left(t + \frac{\pi}{\lambda+1}\right)} \right|^2 \psi(t),$$

wobei $\psi(t)$ ein beliebiges nichtnegatives trigonometrisches Polynom von der Ordnung $n - k\lambda$ mit dem konstanten Gliede 1 ist.

Wendet man den Satz VI auf das trigonometrische Polynom (F) an, so ergibt sich

$$\sum_{\nu=1}^{n} (n - \nu + 1) |\sin \nu\varphi| \leqq \frac{n+1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2(n+1)}, \quad -\pi < \varphi \leqq \pi;$$

Gleichheit gilt nur für $\varphi = \pm \frac{\pi}{n+1}$ [1]. Da nun

$$\operatorname{cotg} \frac{\pi}{2(n+1)} < \frac{2(n+1)}{\pi} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{n} \nu |\sin \nu\varphi| \leqq \frac{n(n+1)}{2}$$

ist, so folgt weiter

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\sin \nu\varphi| < \frac{n+1}{\pi} + \frac{n}{2},$$

oder auch

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} |\sin \nu\varphi| < \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

---

[1]) Für die Ungleichungen $\left| \sum_{\nu=1}^{n} (n - \nu + 1) \sin \nu\varphi \right| \leqq \frac{n+1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2(n+1)}$ und $\frac{1}{n+1} \left| \sum_{1}^{n} \sin \nu\varphi \right| < \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}$ vgl. man J. Schur, Bemerkung zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen. Journal für Math. 140, 1911, S. 1—28; insb. S. 22.