Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1927. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1927
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über bemerkenswerte Singularitätenbildungen bei gewissen Partialbruchreihen.

Von **Alfred Pringsheim.**

Vorgetragen in der Sitzung am 14. Mai 1927.

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf Partialbruchreihen von der Form $\sum \frac{c_\nu}{x - a_\nu}$, wo die a_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) eine Punktmenge vorstellen, deren Häufungsstellen auf der Begrenzung eines einfach zusammenhängenden, im Inneren von Punkten a_ν freien Bereiches überall dicht liegen. Um das charakteristische der in Frage kommenden Ergebnisse hervortreten zu lassen, genügt es, als jene Begrenzung deren einfachsten Typus, einen Kreis $\mathfrak{K}$ um den Nullpunkt in Betracht zu ziehen, zumal die entsprechende Übertragung auf geschlossene Kurven sehr allgemeiner Natur keine nennenswerten Schwierigkeiten macht. Es handelt sich sodann im wesentlichen um die Beantwortung der Frage, inwieweit jener Kreis $\mathfrak{K}$ für die „Innenfunktion", d. h. die durch die Reihe $\sum \frac{c_\nu}{x - a_\nu}$ im Innern von $\mathfrak{K}$ definierte analytische Funktion, eine singuläre Linie darstellt. Dabei sind zwei grundsätzlich verschiedene Fälle zu trennen, nämlich je nachdem die a_ν bzw. eine Teilmenge der a_ν auf $\mathfrak{K}$ überall dicht liegt, oder die a_ν durchweg außerhalb $\mathfrak{K}$ und nur deren Häufungsstellen auf $\mathfrak{K}$ und zwar überall dicht liegen.

Der erste Fall ist unter der Voraussetzung, daß die Reihe $\sum |c_\nu|$ konvergiert, schon vor vierzig Jahren von Herrn Goursat,[1]) durch Bejahung der obigen Frage entschieden worden. Hier soll gezeigt werden, daß bei Verzicht auf die Konvergenz von $\sum |c_\nu|$,

[1]) Bulletin des sciences mathématiques (2), 11 [1887], p. 109.

wenn die an sich divergente Partialbruchreihe durch Gliederassociation konvergent wird, tatsächlich das Gegenteil eintreten kann (§ 1).

Was den zweiten Fall betrifft, so habe ich in einer Arbeit vom Jahre 1897 [1]) gezeigt, daß bei besonderer Wahl der a_ν die fragliche singuläre Beschaffenheit von $\mathfrak{K}$ vorhanden ist.[2]) Dagegen blieb die von Herrn Borel[3]) angeregte Frage, ob dies allemal der Fall ist, lange Zeit eine offene und wurde erst im Jahre 1921 von Herrn Wolff[4]) (unabhängig davon neuerdings auch von Herrn Hartogs) im verneinenden Sinne gelöst. Ich gebe für die etwas erweiterte und prägnanter gefaßte Lösung eine nur wesentlich elementarere Hilfsmittel in Anspruch nehmende Herleitung und knüpfe daran eine Anwendung, welche geeignet sein dürfte, unsere Anschauungen über die Tragweite der Begriffe „analytischer Ausdruck" und „analytische Funktion" in gewissem Sinne zu vervollständigen (§ 2).

§ 1.

1. Wir unterwerfen zunächst die a_ν keiner anderen Beschränkung, als daß kein a_ν im Innern von $\mathfrak{K}$, mindestens ein a_ν, etwa das mit a_0 bezeichnete, auf $\mathfrak{K}$ gelegen ist. Ferner wird $\Sigma|c_\nu|$ als konvergent vorausgesetzt, sodaß die Reihe

$$(1)\qquad S(x) \equiv \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{c_\nu}{x - a_\nu}$$

in jedem abgeschlossenen, von Stellen a_ν freien Bereiche gleichmäßig konvergiert und daher insbesondere im Innern von $\mathfrak{K}$ eine daselbst eindeutige analytische Funktion regulären Verhaltens $f(x)$ darstellt. Es handelt sich dann darum, festzustellen, daß a_0 eine singuläre Stelle für $f(x)$ sein muß.

Dies ist unmittelbar ersichtlich, wenn a_0 eine isolierte Stelle der Menge $\{a_\nu\}$ ist, in welchem Falle sie einen einfachen

---

1) Math. Annalen 50 [1898], S. 447.

2) Einen anderen Typus von etwas allgemeinerer Art hat Herr G. Julia angegeben: Bulletin de la Société mathématique 41 [1913], p. 351.

3) Thèse: Sur quelques points de la théorie des fonctions [Paris 1894], p. 14. Wieder abgedruckt: Annales de l'École normale (3), 12 [1895], p. 22.

4) Comptes rendus 173 [1921], p. 1327.

Pol für $f(x)$ liefert, da nach Abtrennung des Gliedes $\frac{c_0}{x - a_0}$ die gleichmäßige Konvergenz der übrigen Reihe für eine gewisse Umgebung der Stelle a_0 erhalten bleibt.

Aber auch dann, wenn a_0 eine Häufungsstelle von nur isolierten Stellen der Menge $\{a_\nu\}$ ist, kann a_0 keine Stelle regulären Verhaltens für $f(x)$ sein, denn eine analytische Fortsetzung $\mathfrak{P}(x \mid a_0)$ von $f(x)$ müßte auch im Außengebiete von $\mathfrak{K}$ mit $S(x)$ übereinstimmen und somit in jeder Nähe von a_0 beliebig große Werte annehmen.

Diese Schlußweise versagt aber vollständig, wenn a_0 einem Bogen von $\mathfrak{K}$ angehört, auf welchem Stellen a_ν überall dicht liegen. Ja, es muß dann sogar mit der Möglichkeit gerechnet werden, daß der Einfluß des einen „singulären" Gliedes $\frac{c_0}{x - a_0}$ durch denjenigen der unendlich vielen Glieder $\frac{c_\nu}{x - a_\nu}$, welche von den in beliebiger Nähe von a_0 sich häufenden a_ν herrühren, kompensiert werden könnte. Den Beweis des Gegenteils hat die oben zitierte Arbeit des Herrn Goursat geliefert. Doch läßt sich die dortige etwas umständliche Beweisführung mit Benützung ihres Grundgedankens durch die folgende erheblich kürzere ersetzen.

Wird nach Annahme eines positiven $\varepsilon < 1$ ein n so fixiert, daß

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}_\nu \, |c_\nu| < \varepsilon \, |c_0| \tag{2}$$

und sodann $S(x)$ in die Form gesetzt:

$$S(x) = \frac{c_0}{x - a_0} + \sum_1^n{}_\nu \frac{c_\nu}{x - a_\nu} + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{c_\nu}{x - a_\nu}, \tag{3}$$

so folgt:

$$|S(x)| > \left|\frac{c_0}{x - a_0}\right| - \left|\sum_1^n{}_\nu \frac{c_\nu}{x - a_\nu}\right| - \sum_{n+1}^{\infty}{}_\nu \left|\frac{c_\nu}{x - a_\nu}\right|. \tag{4}$$

Nimmt man x auf dem Radius $0a_0$ an, so hat man für jedes $\nu > 0$:

$$|x - a_\nu| > |x - a_0|$$

und daher:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} \left| \frac{c_\nu}{x - a_\nu} \right| < \frac{1}{|x - a_0|} \cdot \sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} |c_\nu| < \frac{\varepsilon \, |c_0|}{|x - a_0|},$$

so daß die Ungleichung (4) durch die folgende ersetzt werden kann:

$$(5) \qquad |S(x)| > \frac{(1-\varepsilon)\,|c_0|}{|x - a_0|} - \left| \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \frac{c_\nu}{x - a_\nu} \right|.$$

Die rationale Funktion, welche das letzte Glied der rechten Seite bildet, nimmt, da die $|a_0 - a_\nu|$ für $\nu = 1, 2, \ldots n$ ein von Null verschiedenes Minimum haben müssen, für $x = a_0$, also auch für $x \rightarrow a_0$ einen bestimmten endlichen Wert an. Man findet daher, wenn man x auf dem Radius $\overline{0 a_0}$ gegen a_0 konvergieren läßt:

$$(6) \qquad \lim_{x \to a_0} |S(x)| = +\infty \text{ [1]},$$

woraus mit Sicherheit folgt, daß die Stelle a_0 für $f(x)$ eine singuläre ist. Das gleiche gilt dann aber für jede auf $\mathfrak{K}$ gelegene Stelle a_m, wie unmittelbar daraus hervorgeht, daß es ja freisteht, das Glied $\dfrac{c_m}{x - a_m}$ zum Anfangsgliede der Reihe $S(x)$ zu machen. Liegt insbesondere die Menge der a_ν oder eine ihrer Teilmengen auf $\mathfrak{K}$ überall dicht, so ist schließlich jede Stelle von $\mathfrak{K}$ eine singuläre für $f(x)$, also $\mathfrak{K}$ die natürliche Grenze von $f(x)$.

2. Der Gang des vorstehenden Beweises zeigt deutlich, daß die vorausgesetzte Konvergenz von $\sum |c_\nu|$ es bewirkt, daß das unbegrenzte Anwachsen von $\left| \dfrac{c_0}{x - a_0} \right|$ bei radialer Annäherung von x an die Stelle a_0 durch die Summe $\sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} \dfrac{c_\nu}{x - a_\nu}$ niemals kompensiert werden kann, auch wenn in der letzteren ganz beliebige Mengen an der Stelle a_0 sich häufender a_ν vorkommen. Daß dagegen eine solche Kompensation tatsächlich eintreten kann, wenn man die Voraussetzung der Konvergenz von $\sum |c_\nu|$ fallen läßt, soll jetzt an einem charakteristischen Beispiele gezeigt werden.

---

[1] Bei beliebigem Grenzübergange $x \to a_0$ ließe sich nur aussagen:

$$\overline{\lim_{x \to a_0}} |S(x)| = +\infty.$$

Wir nehmen als Punktmenge $\{a_\nu\}$ die sämtlichen Wurzeln aller Gleichungen von der Form:

$$x^{2^\nu} = -1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Dieselben sind nicht nur für jedes einzelne ν, sondern für die Folge aller möglichen ν voneinander verschieden. Denn ist für irgendein $\nu \geqq 0 : x_\nu$ eine Wurzel der Gleichung: $x^{2^\nu} = -1$, also $x_\nu^{2^\nu} = -1$, so findet man durch Quadrieren: $x_\nu^{2^{\nu+1}} = +1$ und durch fortgesetztes Quadrieren allgemein: $x_\nu^{2^{\nu+\varrho}} = +1$ $(\varrho \geqq 1)$, so daß jedes einzelne x_ν niemals Wurzel einer zu höherem oder niedrigerem ν gehörigen Gleichung sein kann. Die Gesamtheit dieser Wurzeln liegt dann auf dem Einheitskreise überall dicht und zwar sind, wenn für $\nu \geqq 0$ gesetzt wird:

$$e_\nu = e^{\frac{\pi i}{2^\nu}} \qquad (\text{also: } e_\nu^{2^\nu} = -1) \tag{8}$$

die 2^ν Wurzeln jeder einzelnen Gleichung: $x^{2^\nu} = -1$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ in der Form enthalten:

$$e_\nu^{2\lambda+1} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots 2^\nu - 1).$$

Wir bilden nun die Partialbruchreihe:

$$S(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \left(\frac{1}{x - e_\nu} + \frac{1}{x - e_\nu^3} + \cdots + \frac{1}{x - e_\nu^{2^{\nu+1}-1}} \right) \tag{9}$$

und stellen zunächst fest, daß dieselbe für $|x| < 1$ absolut, für $|x| \leqq \varrho < 1$ auch gleichmäßig konvergiert, also für $|x| < 1$ eine eindeutige analytische Funktion regulären Verhaltens $f(x)$ darstellt, wenn man nicht die einzelnen Partialbrüche, sondern die in der Definitionsgleichung (9) kenntlich gemachten Klammergruppen als Reihenglieder auffaßt. Dies wird unmittelbar ersichtlich, wenn man die Reihe durch Summation dieser Klammergruppen in die Form setzt:

$$S(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{2^\nu x^{2^\nu - 1}}{1 + x^{2^\nu}}, \tag{10}$$

deren Richtigkeit sich am einfachsten ergibt, wenn auf die Glieder dieser Reihe die bekannte Formel für die Zerlegung in Partialbrüche anwendet.

Wird bei beliebig groß angenommenem n die Reihe (9) bei $\nu = n$ abgebrochen und setzt man:

$$(11)\qquad S_n(x) = \sum_0^n{}_\nu \left(\frac{1}{x - e_\nu} + \frac{1}{x - e_\nu^3} + \cdots + \frac{1}{x - e_\nu^{2^{\nu+1}-1}} \right),$$

so hat die rationale Funktion $S_n(x)$ die (durchweg voneinander verschiedenen) Wurzeln der Gleichungen $x^{2^\nu} = -1$ $(\nu = 0, 1, \ldots n)$ zu einfachen Polen (Anzahl: $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$).

Ersetzt man n der Reihe nach durch $n+1$, $n+2$, ..., so treten jedesmal neue Gruppen von Polen hinzu, die bei unbegrenzter Fortsetzung dieses Verfahrens sich auf dem Einheitskreise unbegrenzt verdichten. Nichtsdestoweniger wäre die naheliegende Vermutung, daß die für $n \to \infty$ resultierende Grenzfunktion $S(x)$ bzw. die mit $f(x)$ bezeichnete „Innenfunktion" alle jene Pole zu singulären Stellen, somit schließlich den Einheitskreis zur natürlichen Grenze haben dürfte, vollkommen irrig, wie die folgende Überlegung zeigt.

Setzt man für $|x| < 1$:

$$\mathfrak{S}(x) = \prod_0^\infty{}_\nu (1 + x^{2^\nu}) = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{S}_n(x), \quad \text{wo:} \quad \mathfrak{S}_n(x) = \prod_0^n{}_\nu (1 + x^{2^\nu}),$$

so findet man durch Multiplikation und Division jedes Faktors mit $(1 - x^{2^\nu})$:

$$\mathfrak{S}_n(x) = \prod_0^n{}_\nu \frac{1 - x^{2^{\nu+1}}}{1 - x^{2^\nu}} = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}$$

und daher:

$$\mathfrak{S}(x) = \frac{1}{1 - x}.$$ [1]

Hieraus folgt durch logarithmisches Differenzieren:

$$\frac{\mathfrak{S}'(x)}{\mathfrak{S}(x)} = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{2^\nu x^{2^\nu - 1}}{1 + x^{2^\nu}} = \frac{1}{1 - x},$$

also, wie die Vergleichung mit Gl. (10) zeigt, für $|x| < 1$:

---

[1]) Andere Herleitung: Man findet, wenn man $\mathfrak{S}(x)$ für $|x| < 1$ nach Potenzen von x ordnet:

$$\mathfrak{S}(x) = \sum_0^\infty{}_\lambda x^\lambda$$

(vgl. hierzu Nr. 3).

(11) $$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

und somit schließlich für jedes x:

(12) $$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Es vollzieht sich hier also beim Übergange zum Einheitskreise eine vollständige numerische Kompensation der verschiedenen Partialbrüche, ohne daß sich irgendwelche von ihnen gegeneinander wegheben können.[1]) Und statt der vermuteten unendlich vielen singulären Stellen $x = e_\nu^{2\lambda+1}$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$; $\lambda = 0, 1, \ldots 2^\nu - 1$) erscheint als einzige singuläre Stelle der (unter jenen überhaupt gar nicht enthaltene) einfache Pol $x = 1$. Man kann übrigens aus der Form der Reihe (10) deutlich ersehen, wie dieses immerhin einigermaßen überraschende Ergebnis zu Stande kommt, wobei es zweckmäßig ist, die Glieder der Reihe nach mit dem Faktor x zu multiplizieren, so daß also:

(13) $$x \cdot S(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{2^\nu x^{2^\nu}}{1+x^{2^\nu}} = \frac{x}{1-x}.$$

Läßt man jetzt x zunächst auf dem Radius gegen die Stelle -1 konvergieren, so wird:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x}{1+x} = -\infty, \quad \text{zugleich:} \quad \lim_{x \to -1} \sum_1^\infty {}^\nu \frac{2^\nu x^{2^\nu}}{1+x^{2^\nu}} = +\infty$$

---

[1]) Ganz anders liegt die Sache, wenn $S(x)$ nicht von vorn herein als geordnete Partialbruchreihe, sondern als Reihe irgendwelcher rationaler Funktionen gegeben ist, welche noch die Möglichkeit offen lassen, daß sich Partialbrüche wegheben. Setzt man z. B.

$$S(x) \equiv \sum_1^\infty {}^\nu \frac{x^{2^{\nu-1}}}{1-x^{2^\nu}},$$

so hat man:

$$x^{2^{\nu-1}} = (1 + x^{2^{\nu-1}}) - 1,$$

also:

$$\sum_1^n {}^\nu \frac{x^{2^{\nu-1}}}{1-x^{2^\nu}} = \sum_1^n \left(\frac{1}{1-x^{2^{\nu-1}}} - \frac{1}{1-x^{2^\nu}} \right) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^n}}$$

und daher für $|x| < 1$:

$$S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

und diese beiden entgegengesetzten ∞ kompensieren sich in der Weise, daß:

$$\lim_{x \to -1} \left(\frac{x}{1+x} + \sum_1^{\infty}{}_{\nu} \frac{2^{\nu} x^{2^{\nu}}}{1 + x^{2^{\nu}}} \right) = \lim_{x \to -1} \left(\frac{x}{1-x} \right) = -\frac{1}{2}$$

wird. Etwas analoges findet an jeder Stelle statt, welche Wurzel einer Gleichung von der Form $x^{2^n} = -1$ ist, nämlich in der Weise, daß das Glied mit dem Index $\nu = n$ den Grenzwert $-\infty$ liefert, während die vorhergehenden Glieder endlich bleiben, dagegen die anschließende unendliche Reihe nach $+\infty$ divergiert.

Auch daß die Stelle $+1$ eine singuläre sein muß, ist unmittelbar aus der Reihenform (13) zu ersehen, da für $x = 1$ die Gesamtreihe und daher bei radialer Annäherung auch $\lim\limits_{x \to 1} x\, S(x)$ nach $+\infty$ divergiert.

Es erscheint ganz lehrreich, sich davon zu überzeugen, daß im Gegensatz zu dem eben gewonnenen Resultat der Einheitskreis in Übereinstimmung mit dem Satze von Nr. 1 zur singulären Linie wird, wenn man den Partialbrüchen der Reihe (9) Konvergenzfaktoren von der Art der zuvor mit c_ν bezeichneten hinzufügt. Es werde z. B. gesetzt:

$$(14) \qquad S(x) = \sum_0^{\infty}{}_{\nu} \frac{c_\nu}{2^\nu} \left(\frac{1}{x - c_\nu} + \frac{1}{x - c_\nu^3} + \cdots + \frac{1}{x - c_\nu^{2^{\nu+1}-1}} \right),$$

wo $\sum |c_\nu|$ wieder konvergieren soll, so wird auch die Reihe der Partialbruchzähler absolut konvergent, da die zum Index ν gehörige Klammergruppe nur aus 2^ν Gliedern besteht, so daß also die Voraussetzung des Satzes von Nr. 1 erfüllt ist. Zugleich besteht nach Analogie von Gl. (13) für $x\, S(x)$ jetzt die Formel:

$$(15) \qquad x\, S(x) = \sum_0^{\infty}{}_{\nu} \frac{c_\nu x^{2^\nu}}{1 + x^{2^\nu}}.$$

Man hat dann wiederum:

$$\lim_{x \to -1} \frac{c_0 x}{1+x} = -\infty, \quad \text{dagegen:} \quad \lim_{x \to -1} \sum_1^{\infty}{}_{\nu} \frac{c_\nu x^{2^\nu}}{1 + x^{2^\nu}} = \sum_1^{\infty}{}_{\nu} \frac{c_\nu}{2},$$

also endlich, so daß die Stelle $x = -1$ eine singuläre wird. Das Entsprechende ergibt sich analog für jede Stelle, welche Wurzel einer Gleichung von der Form $x^{2^\nu} = -1$ ist.

3. Ich möchte in diesem Zusammenhange noch darauf hinweisen, daß die Reihe:

$$S(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{2^\nu x^{2^\nu - 1}}{1 - x^{2^\nu}}, \tag{16}$$

die ja formal eine große Ähnlichkeit mit der Reihe (10) hat, einen völlig verschiedenen Charakter besitzt. Zunächst bemerke man, daß hier jede Wurzel eines beliebigen Nenners auch als Wurzel jedes folgenden Nenners wiederkehrt (wie bei dem Beispiel von S. 151, Fußnote 1). Obschon sich hierdurch die Wahrscheinlichkeit für eine Annullierung von singulären Stellen zu verbessern scheint (vgl. das eben erwähnte Beispiel) hat die vorliegende Reihe im Gegensatz zu der obengenannten den **Einheitskreis zur singulären Linie**, wie wiederum am einfachsten daraus erkannt wird, daß sie (abgesehen vom Vorzeichen) durch logarithmische Differentiation aus dem unendlichen Produkt:

$$\mathfrak{S}(x) = \prod_0^\infty {}^\nu (1 - x^{2^\nu}) \tag{17}$$

hervorgeht, von dem sich leicht nachweisen läßt, daß es gleichfalls die fragliche Eigenschaft besitzt, während es für $|x| < 1$ wiederum eine reguläre analytische Funktion darstellt.

Bezeichnet man nämlich mit ϱ eine beliebige positive Zahl < 1, so wird:

$$0 < \mathfrak{S}(\varrho) = (1 - \varrho)(1 - \varrho^2)(1 - \varrho^4) \ldots < 1 - \varrho,$$

so daß $\mathfrak{S}(\varrho)$ durch hinlängliche Annäherung von ϱ an den Wert 1 **beliebig klein** gemacht werden kann. Es nimmt also $\mathfrak{S}(x)$ zunächst in der Nähe der Stelle $x = 1$ **beliebig kleine** Werte an.

Bedeutet jetzt $m > 1$ eine beliebige natürliche Zahl, so hat man:

$$\mathfrak{S}(x^{2^m}) = \prod_0^\infty {}^\nu (1 - x^{2^{m+\nu}}) = \prod_m^\infty {}^\nu (1 - x^{2^\nu})$$

und daher:

$$\mathfrak{S}(x) = \prod_0^{m-1} {}^\nu (1 - x^{2^\nu}) \cdot \mathfrak{S}(x^{2^m}),$$

also für $|x| < 1$:

$$|\mathfrak{S}(x)| < 2^m \cdot |\mathfrak{S}(x^{2^m})|.$$

Der zweite Faktor der rechten Seite und somit $\mathfrak{F}(x)$ selbst nimmt dann wiederum beliebig kleine Werte an in der Nähe von $x^{2^m}=1$, d. h. in der Nähe der 2^m Stellen, welche Wurzeln dieser Gleichung sind. Und da es freisteht, der Zahl m jeden beliebig großen Wert beizulegen, so folgt, daß die Stellen der gedachten Art auf dem Einheitskreise überall dicht liegen, woraus die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung unmittelbar hervorgeht.

Will man $\mathfrak{F}(x)$ für $|x|<1$ nach Potenzen von x ordnen, so hat man nur zu beachten, daß jede ganze Zahl auf eine und nur auf eine Weise als Summe von Potenzen 2^ν $(\nu=0, 1, 2, \ldots)$ darstellbar ist und daß demnach bei Ausführung der durch das Produkt (17) geforderten Multiplikation jede ganzzahlige Potenz x^λ $(\lambda=0, 1, 2, \ldots)$ einmal und nur einmal mit dem Koeffizienten $+1$ oder -1 zum Vorschein kommt, nämlich:

$$\mathfrak{F}(x)=\sum_0^\infty{}^\lambda \varepsilon_\lambda x^\lambda, \tag{18}$$

wo $\varepsilon_0=+1$ und im übrigen $\varepsilon_\lambda=+1$ oder -1, je nachdem λ aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Potenzen 2^ν $(\nu=0, 1, 2, \ldots)$ besteht; anders ausgedrückt, je nachdem die Zahl λ dyadisch geschrieben eine gerade oder ungerade Anzahl von Ziffern 1 enthält (ihre Quersumme also gerade oder ungerade ist). Da:

$$\mathfrak{F}(x)=(1-x)\,\mathfrak{F}(x^2)=(1-x)\sum_0^\infty{}^\lambda \varepsilon_\lambda x^{2\lambda},$$

so läßt sich die Reihe (18) auch in die Form setzen:

$$\mathfrak{F}(x)=\sum_0^\infty{}^\lambda \varepsilon_\lambda (x^{2\lambda}-x^{2\lambda+1}), \tag{18a}$$

welche zeigt, daß jedes Glied mit ungeradem Exponenten das entgegengesetzte Vorzeichen hat, wie das vorangehende mit geradem, möglicherweise das gleiche mit dem nächstfolgenden. Will man sich über die Verteilung der Vorzeichen weiter orientieren, so hat man zunächst:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(x)&=(1-x)\,(1-x^2)\cdot\mathfrak{F}(x^4)\\ &=\sum_0^\infty{}^\lambda \varepsilon_\lambda (x^{4\lambda}-x^{4\lambda+1}-x^{4\lambda+2}+x^{4\lambda+3}) \qquad \text{u. s. f.}\end{aligned} \tag{18b}$$

Die vorliegende nach Herleitung und Bildungsgesetz von den sonst bekannten Typen nicht fortsetzbarer Potenzreihen völlig abweichende Reihe dürfte wohl als bemerkenswert einfaches Beispiel dieser Gattung gelten.

§ 2.

1. Es sei wiederum eine Partialbruchreihe von der Form gegeben:

$$S(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{x - a_\nu}, \tag{1}$$

wo $\sum |c_\nu|$ als konvergent vorausgesetzt wird, die a_ν jetzt durchweg auf der Außenseite eines Kreises $\mathfrak{K}$ liegen, während auf $\mathfrak{K}$ nur Häufungsstellen der a_ν gelegen sind.

Ist a' eine solche Häufungsstelle, so läßt sich zwar zeigen, daß sie (nicht nur für die auf der Außenseite, sondern auch, (worauf es uns hier im wesentlichen nur ankommt) für die im Innern von $\mathfrak{K}$ durch $S(x)$ definierte analytische Funktion eine singuläre Stelle sein muß, falls bezüglich der Verteilung sonstiger Häufungsstellen der a_ν sehr spezielle Bedingungen erfüllt sind. Während aber bei den in Nr. 1 des vorigen Paragraphen behandelten Fällen, wo a' der Menge $\{a_\nu\}$ angehören mußte, jede solche Stelle a' ohne irgendwelche Einschränkung durch die Beziehung $\lim\limits_{x \to a'} |S(x)| = +\infty$ (bei radialer Annäherung) auch für die Innenfunktion als singuläre ein für allemal unzweideutig gekennzeichnet war, so erscheint hier ihr etwaiger singulärer Charakter (selbst wenn er sich anderweitig nachweisen läßt) häufig bis zur Unkenntlichkeit verschleiert, zumal, wie sich leicht zeigen läßt[1]), bei geeigneter Wahl der c_ν nicht nur die Reihe $S(x)$, sondern auch ihre sämtlichen Derivierten noch auf $\mathfrak{K}$ absolut und gleichmäßig konvergieren.

In dem einfachsten Falle, daß die auf $\mathfrak{K}$ gelegene Häufungsstelle a' der Menge $\{a_\nu\}$ als solche isoliert auftritt, daß also in einer gewissen Umgebung von a' keine weitere Häufungsstelle der a_ν sich befindet, läßt sich der singuläre Charakter von a' für die Innenfunktion durch dieselbe indirekte Schlußweise feststellen, welche auf S. 147 Abs. 1 in dem ähnlich ge-

[1]) Vgl. Math. Annalen 42 [1893], S. 173.

stalteten Falle angewendet wurde, der sich von dem vorliegenden nur insofern unterschied, daß die dort mit a_0 bezeichnete Häufungsstelle der Menge $\{a_\nu\}$ angehörte. Diese, wie bemerkt, indirekte Schlußweise gibt aber nicht den geringsten Anhaltspunkt zur Beurteilung der besonderen Natur jener Singularität, und das folgende Beispiel, eine einfache Modifikation eines bei früherer Gelegenheit für andere Zwecke von mir konstruierten,[1]) mag zeigen, daß in diesem Zusammenhange recht merkwürdige Erscheinungen eintreten können.

Wir setzen in (1):

$$a_\nu = 1 + \varepsilon_\nu, \quad \text{wo: } \varepsilon_\nu > 0, \quad \lim_{\nu \to \infty} \varepsilon_\nu = 0,$$

und ersetzen c_ν durch $(-\varepsilon_\nu c_\nu)$, so daß die auf diese Weise sich ergebende Reihe:

$$S(x) = \sum_0^\infty{}^\nu \frac{\varepsilon_\nu c_\nu}{1 + \varepsilon_\nu - x}$$

auf dem Einheitskreise $\mathfrak{K}$ die (einzige) singuläre Stelle 1 (als einzige Häufungsstelle der $a_\nu = 1 + \varepsilon_\nu$) besitzt.

Um zu erzielen, daß $S(x)$ mit sämtlichen Derivierten noch auf dem Einheitskreise konvergiert, spezialisieren wir:

$$\varepsilon_\nu = \frac{1}{2^\nu}, \quad c_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu!},$$

so daß sich ergibt:

$$S(x) = \sum_0^\infty{}^\nu (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} \cdot \frac{1}{1 - 2^\nu (x-1)},$$

also durch die λ-fache Differentiation:

$$S^{(\lambda)}(x) = \lambda! \sum_0^\infty{}^\nu (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} \cdot \frac{2^{\lambda\nu}}{(1 - 2^\nu (x-1))^{\lambda+1}}$$

und für $x = 1$:

$$S(1) = e^{-1}, \quad S^{(\lambda)}(1) = \lambda!\, e^{-2^\lambda}.$$

Hieraus folgt, daß die für $x = 1$ von dem Ausdruck $S(x)$ erzeugte Taylorsche Reihe, nämlich:

[1]) S. die Fußnote, S. 155.

$$S(1) + \sum_{1}^{\infty}{}^{\lambda} \frac{1}{\lambda!} S^{(\lambda)}(1)(x-1)^{\lambda} = \sum_{0}^{\infty}{}^{\lambda} e^{-2^{\lambda}}(x-1)^{\lambda}$$

(sogar beständig) konvergiert. Es trifft also hier alles zusammen, um der Stelle $x = 1$ nahezu das Aussehen einer Stelle regulären Verhaltens von $S(x)$ zu geben, und ihr singulärer Charakter läßt sich nur daraus erschließen, daß die Annahme, jene konvergente Taylorsche Reihe könne, wie sonst, die analytische Fortsetzung der Innenfunktion von $S(x)$ darstellen, infolge der besonderen Verteilung der $a_\nu = 1 + \frac{1}{2^\nu}$ auf einen Widerspruch stößt. Diese Schlußweise würde aber vollständig versagen, wenn z. B. die a_ν im Innern eines den Einheitskreis $\mathfrak{K}$ im Punkte 1 berührenden Kreises $\mathfrak{K}'$ und ihre Häufungsstellen auf $\mathfrak{K}'$ überall dicht lägen, da in diesem Falle zwischen den Innenfunktionen von $S(x)$ in $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ (deren letztere den Kreis $\mathfrak{K}'$ zur natürlichen Grenze hat) kein analytischer Zusammenhang besteht und somit die Existenz einer analytischen Fortsetzung von $S(x)$ aus dem Inneren von $\mathfrak{K}$ in das Innere von $\mathfrak{K}'$ möglich erscheint.

Dieselbe Schwierigkeit, die sich bei dem vorigen Beispiel schon ergab, wo die kritische Stelle a' ganz vereinzelt auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ lag, tritt allemal ein, wenn a' Innenpunkt eines Bogens von $\mathfrak{K}$ ist, auf dem die Häufungsstellen der a_ν überall dicht liegen, und das gleiche gilt für alle Stellen von $\mathfrak{K}$, wenn jene auf dem ganzen Kreise überall dicht liegen. Zwar läßt sich in einigen besonderen Fällen erweisen (vgl. S. 146, Fußnote 1, 2), daß die Innenfunktion $f(x)$ dann den Kreis $\mathfrak{K}$ zur singulären Linie hat, aber die sonst üblichen Mittel der Funktionentheorie reichten nicht einmal aus, um allgemein festzustellen, daß $\mathfrak{K}$ der wahre Konvergenzkreis für die Taylorsche Entwickelung von $f(x)$ sein muß, daß mit anderen Worten $f(x)$ dort mindestens eine singuläre Stelle besitzt. Durch die oben erwähnte Mitteilung des Herrn Wolff (s. S. 146, Fußnote 4) wurde endgültig das Vorkommen des Gegenteils erwiesen und zwar nicht nur als eine Art Ausnahmeerscheinung, sondern bei einer umfangreichen, nach Belieben zu vermehrenden Klasse von Partialbruchreihen. Gerade dieser letztere Punkt dürfte in der folgenden Darstellung noch prägnanter zum Ausdruck kommen, die sich im übrigen von derjenigen des Herrn Wolff durch den Gebrauch wesentlich elementarerer Hilfsmittel unterscheidet.

2. Ist $\varphi(x)$ eindeutig definiert und stetig längs des Kreises $|x| = r$ und bildet man das arithmetische Mittel:[1])

$$(2) \qquad \mathfrak{M}_n \varphi(\mathfrak{e} r) = \frac{1}{2^n} \sum_0^{2^n-1}{}^{\lambda} \varphi(e_n^{\lambda} r), \qquad \text{wo: } e_n = e^{\frac{2\pi i}{2^n}},$$

so besitzt dasselbe für $n \longrightarrow \infty$ einen bestimmten (endlichen) Grenzwert:

$$(3) \qquad \mathfrak{M} \varphi(\mathfrak{e} r) = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_n \varphi(\mathfrak{e} r),$$

den wir schlechthin als den Mittelwert von $\varphi(x)$ auf dem Kreise $|x| = r$ bezeichnen.[2])

Ist sodann $f(x)$ regulär zum mindesten für $0 \leq |x| \leq r$,[3]) etwa:

$$f(x) = \sum_0^{\infty}{}^{\nu} a_{\nu} x^{\nu},$$

so findet man mittelst einer ganz elementaren Rechnung:

$$a_{\nu} = \mathfrak{M}\left[(\mathfrak{e} r)^{-\nu} f(\mathfrak{e} r)\right]^{4})$$

und hieraus durch Einsetzen in die Potenzreihe und Vertauschung der Folge von Summation und Mittelwertbildung, für jedes x des Bereiches $0 \leq x < r$:

$$(4) \qquad f(x) = \mathfrak{M} \frac{\mathfrak{e} r \cdot f(\mathfrak{e} r)}{\mathfrak{e} r - x} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \sum_0^{2^n-1}{}^{\lambda} \frac{e_n^{\lambda} r \cdot f(e_n^{\lambda} r)}{e_n^{\lambda} r - x}\,{}^{5})$$

Der Inhalt dieser Beziehung läßt sich auch dahin aussprechen, daß für jedes einzelne x des Bereiches $|x| < r$ der Wert des Ausdrucks:

---

[1]) Ich bezeichne mit $\mathfrak{e}$ eine komplexe Veränderliche von der Form $e^{\vartheta i}$, wo $0 \leq \vartheta < 2\pi$, also geometrisch gesprochen jeden beliebigen Punkt des Einheitskreises.

[2]) Vgl. dieser Berichte Bd. 25 [1895], S. 80; ausführlicher meine „Vorlesungen über Funktionentheorie", Abt. I [1925], S. 272, Gl. (13).

[3]) Für die Grenze $|x| = r$ würde statt des regulären Verhaltens von $f(x)$ schon die gleichmäßige Konvergenz der betreffenden Potenzreihe genügen.

[4]) Vorlesungen, S. 279, Gl. (4).

[5]) Desgl. S. 281, Gl. (13a).

$$(5) \qquad \left| f(x) - \mathfrak{M}_n \frac{\mathfrak{e}\, r \cdot f(\mathfrak{e}\, r)}{\mathfrak{e}\, r - x} \right|$$

durch passende Wahl von n beliebig klein gemacht werden kann. Um diese Aussage noch zu verschärfen, nehmen wir $r' < r$ an und schränken x auf den Bereich $|x| \leq r'$ ein. Für alle x dieses Bereiches gilt dann die Beziehung $|\mathfrak{e}\, r - x| \geq r - r'$ und es bleibt daher für alle diese x $\dfrac{\mathfrak{e}\, r \cdot f(\mathfrak{e}\, r)}{\mathfrak{e}\, r - x}$ längs des Kreises $|x| = r$ gleichmäßig stetig. Infolgedessen konvergiert $\mathfrak{M}_n \dfrac{\mathfrak{e}\, r \cdot f(\mathfrak{e}\, r)}{\mathfrak{e}\, r - x}$ für alle diese x gleichmäßig[1]) gegen den Grenzwert $\mathfrak{M} \dfrac{\mathfrak{e}\, r \cdot f(\mathfrak{e}\, r)}{\mathfrak{e}\, r - x}$, d. h. durch Bestimmung einer von der Wahl des x unabhängigen unteren Schranke n' für n wird

$$\left| \mathfrak{M} \frac{\mathfrak{e}\, r \cdot f(\mathfrak{e}\, r)}{\mathfrak{e}\, r - x} - \mathfrak{M}_n \frac{\mathfrak{e}\, r \cdot f(\mathfrak{e}\, r)}{\mathfrak{e}\, r - x} \right|,$$

also schließlich, mit Benützung von Gl. (4), der Wert des Ausdrucks (5) beliebig klein für $n \geq n'$. Wir wollen den Inhalt dieses Ergebnisses in den folgenden Satz zusammenfassen:

Eine für $|x| < r$ reguläre Funktion $f(x)$ läßt sich für alle x des Bereiches $|x| < r' < r$ durch die rationale Funktion:

$$\mathfrak{M}_n \frac{\mathfrak{e}\, r \cdot f(\mathfrak{e}\, r)}{\mathfrak{e}\, r - x}$$

gleichmässig approximieren, d. h. bei beliebig vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ und passenden Wahl einer unteren Schranke n' für n hat man für alle x des Bereiches $|x| \leq r'$:

$$(6) \qquad \left| f(x) - \mathfrak{M}_n \frac{\mathfrak{e}\, r \cdot f(\mathfrak{e}\, r)}{\mathfrak{e}\, r - x} \right| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geq n'.$$

3. Die soeben abgeleitete Ungleichung bildet die Grundlage für den Beweis des folgenden merkwürdigen Satzes:

Ist $f(x)$ eine beliebig vorgelegte für $|x| < R$ reguläre Funktion, so lassen sich nach beliebiger

[1]) Vorlesungen, S. 271/2, Ungl. (8)—(12).

Vorgabe eines positiven $\varrho < R$ Partialbruchreihen $S(x)$ herstellen, welche für $|x| \leq \varrho$ die Funktion $f(x)$ darstellen, dagegen für $x > \varrho$ eine davon verschiedene eindeutige analytische Funktion mit unendlich vielen dem Kreisringe $\varrho < |x| < R$ angehörigen Polen, deren Häufungsstellen auf dem Kreise $|x| = \varrho$ überall dicht liegen. Nur für die letztgenannte Funktion bildet dieser eine singuläre Linie, während die in seinem Innern durch $S(x)$ dargestellte Funktion $f(x)$ daselbst ausnahmslos regulär bleibt.

Beweis. Es bedeute r_0 eine beliebige zwischen ϱ und R gelegene Zahl und zwar werde gesetzt:

$$r_0 = \varrho + \delta_0, \quad \text{wo also: } \varrho + \delta_0 < R.$$

Sodann werde eine unendliche Folge (δ_ν) positiver beständig abnehmend gegen Null konvergierender Zahlen angenommen:

$$\delta_0 > \delta_1 > \cdots > \delta_\nu > \cdots, \quad \lim_{\nu \to \infty} \delta_\nu = 0,$$

und es werde gesetzt analog wie für $\nu = 0$ auch für $\nu = 1, 2, 3, ..$

$$r_\nu = \varrho + \delta_\nu,$$

so daß also die r_ν beständig abnehmend mit $\nu \longrightarrow \infty$ gegen ϱ konvergieren.

Ferner sei (ε_ν) eine unendliche Folge positiver Zahlen von der Beschaffenheit, daß die Reihe $\sum\limits_1^\infty \frac{\varepsilon_\nu}{\delta_\nu}$ konvergiert.

Nun läßt sich zunächst $f(x)$ nach dem Muster von Ungl. (6) durch ein auf den Kreis $|x| = r_0$ erstrecktes arithmetisches Mittel bis auf einen Fehler, der kleiner als ε_1, approximieren und zwar gleichmäßig für alle x des Bereiches $|x| < r_1$. Wir drücken das in der Weise aus, daß wir setzen:

$$(7)\quad f(x) - \mathfrak{M}_{n_0} \frac{\mathfrak{e}\, r_0 \cdot f(\mathfrak{e}\, r_0)}{\mathfrak{e}\, r_0 - x} = f_1(x), \text{ wo: } |f_1(x)| < \varepsilon_1 \text{ für } |x| \leq r_1.$$

In analoger Weise verfahren wir mit $f_1(x)$ und setzen demgemäß:

$$f_1(x) - \mathfrak{M}_{n_1} \frac{\mathfrak{e}\, r_1 \cdot f_1(\mathfrak{e}\, r_1)}{\mathfrak{e}\, r_1 - x} = f_2(x), \quad \text{wo: } |f_2(x)| < \varepsilon_2 \text{ für } |x| \leq r_2,$$

sodann, in dieser Weise weiter fortfahrend, allgemein:

$$f_\nu(x) - \mathfrak{M}_{n_\nu} \frac{e\, r_\nu \cdot f_\nu(e\, r_\nu)}{e\, r_\nu - x} = f_{\nu+1}(x), \tag{8}$$

$$\text{wo: } |f_{\nu+1}(x)| < \varepsilon_{\nu+1} \text{ für } |x| \leq r_{\nu+1}.$$

Dabei steht es frei, jedesmal $n_\nu > n_{\nu-1}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ zu wählen, so daß also $\lim\limits_{\nu\to\infty} n_\nu = \infty$ wird. Nimmt man eine natürliche Zahl p beliebig groß an, setzt in der letzten Gleichung der Reihe nach $\nu = 1, 2, \ldots p$ und addiert die resultierenden Gleichungen zu der Anfangsgleichung (7), so ergibt sich, wenn wir der Symmetrie halber $f_0(e\, r_0)$ statt $f(e\, r_0)$ schreiben:

$$f(x) - \sum_0^p{}_\nu\, \mathfrak{M}_{n_\nu} \frac{e\, r_\nu \cdot f_\nu(e\, r_\nu)}{e\, r_\nu - x} = f_{p+1}(x), \tag{9}$$

$$\text{wo: } |f_{p+1}(x)| < \varepsilon_{p+1} \text{ für } |x| \leq r_{p+1},$$

und hieraus für $p \to \infty$, wegen $\lim\limits_{p\to\infty} \varepsilon_{p+1} = 0$ und $r_{p+1} < \varrho$ für jedes p:

$$f(x) = \sum_0^\infty{}_\nu\, \mathfrak{M}_{n_\nu} \frac{e\, r_\nu \cdot f_\nu(e\, r_\nu)}{e\, r_\nu - x} \quad \text{für } |x| \leq \varrho. \tag{10}$$

Diese Reihe konvergiert in dem Bereiche $x \leq \varrho$ gleichmäßig zunächst in der vorgeschriebenen Anordnung, wenn man die einzelnen arithmetischen Mittel (also rationalen Funktionen) als Reihenglieder auffaßt. Wir zeigen, daß sie für $|x| \leq \varrho$ noch (gleichmäßig) konvergent bleibt, wenn man die einzelnen Summanden dieses arithmetischen Mittel (also Partialbrüche) durch ihre Absolutwerte ersetzt. Man hat nämlich:

$$\mathfrak{M}_{n_\nu} \frac{e\, r_\nu \cdot f_\nu(e\, r_\nu)}{e\, r_\nu - x} = \frac{1}{2^{n_\nu}} \sum_0^{2^{n_\nu}-1}{}_\lambda\, \frac{e^\lambda_{n_\nu} r_\nu \cdot f_\nu(e^\lambda_{n_\nu} r_\nu)}{e^\lambda_{n_\nu} r - x}$$

und sodann mit Benützung der für $|x| \leq r_\nu$, also um so mehr für $|x| \leq \varrho$ geltenden Ungleichung $|f_\nu(x)| < \varepsilon_\nu$:

$$\frac{1}{2^{n_\nu}} \sum_0^{2^{n_\nu}-1}{}_\lambda \left| \frac{e^\lambda_{n_\nu} r_\nu \cdot f_\nu(e^\lambda_{n_\nu} r_\nu)}{e^\lambda_{n_\nu} r_\nu - x} \right| < \frac{1}{2^{n_\nu}} \cdot \frac{2^{n_\nu} r_0\, \varepsilon_\nu}{r_\nu - |x|} < r_0 \frac{\varepsilon_\nu}{\delta_\nu}, \tag{11}$$

woraus die absolute (sogar maximale und daher gleichmäßige) Konvergenz der fraglichen Partialbruch-Reihe (10) für $|x| \leq \varrho$ hervorgeht.

Für den Bereich $|x| > \varrho$ fällt die betreffende Reihe vollständig unter den Typus der bisher bei vorausgesetzter Konvergenz von $\sum |c_\nu|$ als $\sum \frac{c_\nu}{x - a_\nu}$ bezeichneten, da die erforderliche absolute Konvergenz der Zähler schon durch diejenige der (mit $\sum \frac{\varepsilon_\nu}{\delta_\nu}$ a fortiori konvergierenden) Reihe $\sum \varepsilon_\nu$ gesichert ist (vgl. den ersten Teil von Ungl. (11)). Sie stellt also in dem Bereiche $|x| > \varrho$ eine von $f(x)$ verschiedene, mit den Polen $e^{\lambda}_{n_\nu} r_\nu$ $(\lambda = 0, 1, \ldots 2^{n_\nu} - 1)$ behaftete, eindeutige analytische Funktion dar, die den Kreis $|x| = \varrho$ zur natürlichen Grenze hat.

4. Die Reihe (10), welche erkennen läßt, daß es eine umfangreiche Kategorie von Fällen gibt, in denen eine geschlossene Kurve nur auf einer Seite die Wirkung einer singulären Linie ausübt, kann auch dazu dienen, die analoge Erscheinung bei offenen Kurven herzustellen. Man braucht sie zu diesem Behufe nur in zwei Teilreihen zu zerlegen, deren jede nur die an einem Halbkreise sich häufenden Stellen $e^{\lambda}_{n_\nu} r_\nu$ enthält. Führen wir die Bezeichnungen ein:

(12)
$$\mathfrak{M}^{(1)}_n \varphi(e\, r) = \frac{1}{2^n} \sum_0^{2^{n-1}-1}{}^{\lambda} \varphi(e^{\lambda}_n r), \quad \mathfrak{M}^{(2)}_n \varphi(e\, r) = \frac{1}{2^n} \sum_{2^{n-1}}^{2^n - 1}{}^{\lambda} \varphi(e^{\lambda}_n r),$$

so erstreckt sich bei dem ersten Ausdruck die Summation nur über die obere, bei dem zweiten über die untere Hälfte des Kreises $|x| = r$.

Nun werde gesetzt:

$$(13)\quad S_1(x) = \sum_0^{\infty}{}^{\nu} \mathfrak{M}^{(1)}_{n_\nu} \frac{e\, r_\nu \cdot f_\nu(e\, r_\nu)}{e\, r_\nu - x}, \quad S_2(x) = \sum_0^{\infty}{}^{\nu} \mathfrak{M}^{(2)}_{n_\nu} \frac{e\, r_\nu \cdot f_\nu(e\, r_\nu)}{e\, r_\nu - x},$$

so daß also:

$$(14)\qquad f(x) = S_1(x) + S_2(x) \quad \text{für } |x| < \varrho.$$

Die Reihe $S_1(x)$ ist maximal konvergent in jedem abgeschlossenen Bereiche, der frei ist von den (auf den oberen Hälften der Kreise $|x| = r_\nu$ liegenden) Stellen $e^{\lambda}_{n_\nu} r_\nu$ $(\lambda = 0, 1, \ldots 2^{n_\nu - 1} - 1;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots)$, überdies noch auf deren Häufungslinie, dem oberen Halbkreise $|x| = \varrho$. Sie verhält sich also regulär in der ganzen x-Ebene mit Ausnahme der genannten Stellen, die sie zu Polen hat, und ihrer Häufungslinie. Auf der letzteren besitzt sie indessen noch eindeutig bestimmte, sogar stetig sich ändernde Werte, so daß also diese Linie noch zum Existenzbereiche von $S_1(x)$ bzw. der durch $S_1(x)$ definierten analytischen Funktion gehört.[1]) Da man nach Weierstraß auch etwaige Pole zum Existenzbereiche einer analytischen Funktion zu rechnen pflegt, so muß man sagen, daß der Existenzbereich von $S_1(x)$ als analytische Funktion (geradeso wie bei dem Ausdruck einer rationalen Funktion) die gesamte x-Ebene umfaßt.

Der obere Halbkreis $|x| = \varrho$ besitzt dabei in der Richtung von oben nach unten den Charakter einer singulären Linie. Anders verhält er sich in der entgegengesetzten Richtung. Man hat nämlich nach Gl. (14):

$$S_1(x) = f(x) - S_2(x) \quad \text{für } |x| \leq \varrho. \tag{15}$$

Da aber $f(x)$ auf dem ganzen Kreise $|x| = \varrho$, andererseits $S_2(x)$ auf dem oberen Halbkreise sich regulär verhält, so liefert $f(x) - S_2(x)$ die analytische Fortsetzung von $S_1(x)$ aus dem Innengebiet des Kreises $|x| = \varrho$ über jenen oberen Halbkreis hinaus, deren weiterer Verlauf dann wesentlich von der Natur der (s. den Anfang des Satzes von Nr. 3) lediglich für $|x| < \mathfrak{R}$ als regulär vorausgesetzten Funktion $f(x)$ abhängt.

Nehmen wir z. B. an, daß $f(x)$ eine in der ganzen Ebene eindeutige analytische Funktion sei, so dehnt sich jene analytische Fortsetzung eindeutig über das Gebiet $|x| > \varrho$ aus und findet an der Außenseite des unteren Halbkreises $|x| = \varrho$ (als der Häufungslinie der Pole von $S_2(x)$) ihr definitives Ende. Es entsteht also auf diese Weise eine zweiwertige analytische Funktion, deren Typus von demjenigen der gewöhnlichen mehrwertigen Funktionen völlig verschieden ist. Während bei diesen (z. B. $\sqrt[n]{(x-a)(x-b)}$, $[\operatorname{Lg}(x-a)(x-b)]^{-1}$) die sonst verschiedenen Werte nur in einzelnen Punkten zusammenfallen, findet hier, wie Gl. (15) zeigt, ein derartiges Zusammenfallen für das ganze Kreisgebiet $|x| < \varrho$ statt.

[1]) Geradeso, wie z. B. Konvergenzkreis einer daselbst noch konvergierenden, aber darüber hinaus nicht fortsetzbaren Potenzreihe.

Es bedarf kaum der Bemerkung, daß sich entsprechende Verallgemeinerungen ergeben, wenn man als $f(x)$ einen für $|x| < \mathfrak{R}$ regulären Zweig einer mehr- bzw. unendlich vieldeutigen analytischen Funktion wählt. Ohne hierauf weiter einzugehen, wollen wir als Hauptergebnis der vorstehenden Betrachtung den folgenden Satz formulieren:

> Ein analytischer Ausdruck, welcher eine eindeutige analytische Funktion mit einem die ganze Ebene umfassenden Existenzbereiche darstellt, braucht diese keineswegs **vollständig** darzustellen. Es gibt z. B. Partialbruchreihen, welche die erstgenannte Eigenschaft besitzen und dennoch eine analytische Fortsetzung zulassen, so daß die ursprünglich dargestellte Funktion lediglich als ein eindeutiger Bestandteil einer beliebig vieldeutigen analytischen Funktion erscheint.