Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1927. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1927
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Die Verwendung des begleitenden Dreibeins für den Aufbau der natürlichen Geometrie.

Von **Max Lagally** in Dresden.

Vorgetragen von S. Finsterwalder in der Sitzung am 15. Januar 1927.

Im folgenden wird der Versuch gemacht, die natürliche Geometrie nach einem Prinzip aufzubauen, welches sich wesentlich von dem Prinzip unterscheidet, das dem Aufbau der natürlichen Geometrie in den bekannten Vorlesungen von Cesaro[1]) zugrunde liegt. Die Unbeweglichkeitsbedingungen Cesaro's, welche die Änderungen der auf ein begleitendes Dreibein bezogenen Koordinaten eines im Raume festen Punktes bei der Bewegung dieses Dreibeins geben, werden durch Gleichungen ersetzt, welche die Bewegung des Dreibeins selbst beschreiben[2]).

1. Drehung eines Dreibeins. Vor allem ist die Aufstellung eines Formelsystems vonnöten, welches die Drehung eines rechtwinkligen Dreibeins in einer für alle vorkommenden Fälle ausreichenden Allgemeinheit beschreibt. Die 3 Beine des Dreibeins seien durch 3 Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ gegeben, die in der angegebenen Reihenfolge ein Rechtssystem oder Linkssystem bilden können; bleibt man bei der gebräuchlichen Festsetzung, daß im Vektorprodukt zweier Vektoren der erste Faktor, der zweite Faktor und der Produktvektor in dieser Reihenfolge ein

---

[1]) E. Cesaro, Vorlesungen über natürliche Geometrie, deutsch von G. Kowalewski.

[2]) Das begleitende Dreibein (trièdre mobile) spielt eine dominierende Rolle in der Behandlung der Differentialgeometrie durch Darboux und seine Schule; doch scheint gerade diese Richtung grundsätzlich darauf verzichtet zu haben, die Verwendung eines willkürlichen Koordinatensystems in der systematischen Weise zu vermeiden, wie es hier versucht wird.

Rechtssystem bilden, so gilt für die Produkte der Einheitsvektoren:

$$\mathfrak{i} \times \mathfrak{j} = \pm \mathfrak{k}, \quad \mathfrak{j} \times \mathfrak{k} = \pm \mathfrak{i}, \quad \mathfrak{k} \times \mathfrak{i} = \pm \mathfrak{j}, \tag{1}$$

wobei das obere Zeichen für ein Rechtssystem $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, das untere für ein Linkssystem gilt. An dieser Festsetzung für die Bedeutung der Vorzeichen soll im folgenden sinngemäß überall festgehalten werden, wo der Übergang von einem Rechts- zu einem Linkssystem irgend einen Vorzeichenwechsel hervorruft.

Ist $\mathfrak{u}$ der Vektor der Drehgeschwindigkeit des Dreibeines, $\mathfrak{x}$ ein gegenüber dem Dreibein fester Vektor, so ist

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{x} \tag{2}$$

die Geschwindigkeit des Endpunktes von $\mathfrak{x}$. Um zu vermeiden, daß in den skalaren Gleichungen, in welche (2) zerlegt werden kann, auf der rechten Seite verschiedene Vorzeichen auftreten, je nachdem $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ ein Rechts- oder Linkssystem bilden, werden die Maßzahlen der Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ für diese beiden Fälle verschieden bezeichnet; und zwar wird

$$\mathfrak{u} = \pm (a_1 \mathfrak{i} + a_2 \mathfrak{j} + a_3 \mathfrak{k}) \tag{3}$$

gesetzt, wobei der oben getroffenen Festsetzung entsprechend das obere Zeichen für ein Rechts-, das untere für ein Linkssystem $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ gelten soll. Dann ist die Geschwindigkeit der Endpunkte der 3 Beine in jedem Fall

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{i}}{dt} &= \mathfrak{u} \times \mathfrak{i} = \quad * \quad a_3 \mathfrak{j} - a_2 \mathfrak{k} \\ \frac{d\mathfrak{j}}{dt} &= \mathfrak{u} \times \mathfrak{j} = - a_3 \mathfrak{i} \quad * \quad + a_1 \mathfrak{k} \\ \frac{d\mathfrak{k}}{dt} &= \mathfrak{u} \times \mathfrak{k} = \quad a_2 \mathfrak{i} - a_1 \mathfrak{j} \quad * \;. \end{aligned} \tag{4}$$

2. B e g l e i t e n d e s D r e i b e i n e i n e r R a u m k u r v e. Eine Raumkurve wird durch ihren Ortsvektor $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(s)$ gegeben, wo der Parameter s die von einem ihrer Punkte aus gemessene Bogenlänge ist. In jedem Punkt der Raumkurve wird ein begleitendes Dreibein durch eine geometrische Festsetzung konstruiert, die sehr verschieden gewählt sein kann; nur soll eines der 3 Beine der

Einheitsvektor der Kurventangente $\mathfrak{t} = \frac{d\mathfrak{r}}{ds}$ sein. Das Dreibein heiße $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$; die drei Einheitsvektoren sind Funktionen von s.

Die zu benachbarten Kurvenpunkten gehörigen Dreibeine gehen, abgesehen von einer Translation, bei welcher jeder Vektor ungeändert bleibt, durch eine infinitesimale Drehung ineinander über. Um auf Grund von (3) und (4) die Stellungen der zu benachbarten Kurvenpunkten gehörigen Dreibeine vergleichen zu können, ersetzt man die Änderungen der 3 Einheitsvektoren in der Zeiteinheit durch die Änderungen, welche einer Bewegung eines Kurvenpunktes um die Längeneinheit zukommen; d. h. man läßt den Scheitel des begleitenden Dreibeins auf der Kurve mit der Geschwindigkeit Eins fortschreiten. Dann wird der Drehvektor

$$\mathfrak{u} = \pm (a_1 \mathfrak{t} + a_2 \mathfrak{j} + a_3 \mathfrak{k}); \tag{5}$$

und die Drehung des Dreibeines, welche bei Bewegung seines Scheitels auf der Kurve eintritt, wird durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{t}}{ds} &= \mathfrak{u} \times \mathfrak{t} = \quad * \qquad a_3 \mathfrak{j} - a_2 \mathfrak{k} \\ \frac{d\mathfrak{j}}{ds} &= \mathfrak{u} \times \mathfrak{j} = -a_3 \mathfrak{t} \quad * \quad + a_1 \mathfrak{k} \\ \frac{d\mathfrak{k}}{ds} &= \mathfrak{u} \times \mathfrak{k} = \quad a_2 \mathfrak{t} - a_1 \mathfrak{j} \quad * \; . \end{aligned} \tag{6}$$

Umgekehrt folgen aus den 3 Vektoren $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, und ihren Änderungen $\frac{d\mathfrak{t}}{ds}$, $\frac{d\mathfrak{j}}{ds}$, $\frac{d\mathfrak{k}}{ds}$, die Maßzahlen a_1, a_2, a_3, der 3 Komponenten der Drehung $\mathfrak{u}$:

$$\begin{aligned} a_1 &= \mathfrak{k} \cdot \frac{d\mathfrak{j}}{ds} = -\mathfrak{j} \cdot \frac{d\mathfrak{k}}{ds} \\ a_2 &= \mathfrak{t} \cdot \frac{d\mathfrak{k}}{ds} = -\mathfrak{k} \cdot \frac{d\mathfrak{t}}{ds} \\ a_3 &= \mathfrak{j} \cdot \frac{d\mathfrak{t}}{ds} = -\mathfrak{t} \cdot \frac{d\mathfrak{j}}{ds} \; . \end{aligned} \tag{8}$$

a_1, a_2, a_3 lassen sich geometrisch deuten: Projiziert man die Raumkurve in der Umgebung eines Punktes P in die Ebenen ($\mathfrak{t}$, $\mathfrak{j}$) und ($\mathfrak{t}$, $\mathfrak{k}$), so sind $d\mathfrak{t} \cdot \mathfrak{j} = d\alpha$ und $d\mathfrak{t} \cdot \mathfrak{k} = d\beta$ die Kontingenzwinkel benachbarter Tangenten der durch diese Projektionen entstehenden ebenen Kurven; also sind

$$\frac{d\alpha}{ds} = \quad a_3 = \frac{d\mathfrak{t}}{ds}\cdot\mathfrak{j}$$
$$\frac{d\beta}{ds} = -a_2 = \frac{d\mathfrak{t}}{ds}\cdot\mathfrak{k} \tag{8a}$$

die Krümmungen dieser ebenen Kurven. Das Vorzeichen der Krümmungen ändert sich, wenn man die Richtung von $\mathfrak{j}$, bzw. $\mathfrak{k}$ umkehrt; sie sind zweiwertige Funktionen auf der Kurve. Ähnlich ist $d\gamma = \pm\, d\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{k}$ der Winkel, um den sich das Dreibein um $\mathfrak{t}$ als Achse dreht, wenn sein Scheitel um ds in Richtung $\mathfrak{t}$ vorrückt; also ist

$$\frac{d\gamma}{ds} = \pm\, a_1 = \pm\frac{d\mathfrak{j}}{ds}\cdot\mathfrak{k} = \mathfrak{t}\times\mathfrak{j}\cdot\frac{d\mathfrak{j}}{ds} = \left[\mathfrak{t}\,\mathfrak{j}\,\frac{d\mathfrak{j}}{ds}\right] \tag{8b}$$

ein Maß für die durch Drehung und Verrückung bestimmte Schraubung, d. h. eine Torsion in einem etwas allgemeineren Sinn, als das in der Theorie der Raumkurven gebräuchlich ist. Das Vorzeichen des Winkels $d\gamma$ und der Torsion $\frac{d\gamma}{ds}$ ist als positiv festgesetzt, wenn die zugehörige Schraubung eine Rechtsschraubung ist. Die Torsion ist eine eindeutige Funktion des Ortes auf der Kurve.

3. Frenetsche Formeln. Das begleitende Dreibein einer Raumkurve werde speziell von den Einheitsvektoren der Tangente, Hauptnormale, Binormale gebildet; es heiße $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{b}$. Weil die Binormale auf der Schmiegungsebene senkrecht steht, ist außer $\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{t} = 0$ auch $\mathfrak{b}\cdot\frac{d\mathfrak{t}}{ds} = 0$; also ist nach (8a, b)

$$\frac{d\alpha}{ds} = \quad a_3 = \quad \frac{d\mathfrak{t}}{ds}\cdot\mathfrak{n} = K^0,$$
$$\frac{d\beta}{ds} = -a_2 = \quad \frac{d\mathfrak{t}}{ds}\cdot\mathfrak{b} = 0, \tag{9}$$
$$\frac{d\gamma}{ds} = \pm\, a_1 = \pm\frac{d\mathfrak{n}}{ds}\cdot\mathfrak{b} = \left[\mathfrak{t}\,\mathfrak{n}\,\frac{d\mathfrak{n}}{ds}\right] = T^0.$$

K^0 heißt erste Krümmung oder Flexion der Raumkurve; sie ist die Krümmung ihrer Projektion in die Schmiegungsebene. Die Krümmung ihrer Projektion in die rektifizierende Ebene ist Null. T^0 heißt zweite Krümmung oder Torsion der Raumkurve. Dann ist der Drehvektor (Darboux'scher Vektor)

$$\mathfrak{u} = \pm\,(a_1\mathfrak{t} + a_2\mathfrak{n} + a_3\mathfrak{b}) = T^0\,\mathfrak{t} \pm K^0\,\mathfrak{b}. \tag{10}$$

Die Drehung des begleitenden Dreibeins wird durch die Frenetschen Formeln[1]) bestimmt:

$$\begin{array}{lllll} \dfrac{d\mathfrak{t}}{ds} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{t} = & * & K^0 \mathfrak{n} & * & \\ \dfrac{d\mathfrak{n}}{ds} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{n} = & -K^0 \mathfrak{t} & * & \pm T^0 \mathfrak{b} & \\ \dfrac{d\mathfrak{b}}{ds} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{b} = & * & \mp T^0 \mathfrak{n} & * & . \end{array} \tag{11}$$

4. Kurve auf einer Fläche. Das begleitende Dreibein einer auf einer Fläche F gelegenen Kurve C werde gebildet vom Einheitsvektor $\mathfrak{t}$ in Richtung der Kurventangente, $\bar{\mathfrak{t}}$ in Richtung der zu C senkrechten Flächentangente, $\mathfrak{N}$ in Richtung der Flächennormalen; es heiße $\mathfrak{t}$, $\bar{\mathfrak{t}}$, $\mathfrak{N}$. Über den Richtungssinn wird keine allgemeine Festsetzung getroffen. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \quad a_3 = \frac{d\mathfrak{t}}{ds} \cdot \bar{\mathfrak{t}} = G, \\ \frac{d\beta}{ds} &= -a_2 = \frac{d\mathfrak{t}}{ds} \cdot \mathfrak{N} = -N, \\ \frac{d\gamma}{ds} &= \pm a_1 = \pm \frac{d\mathfrak{t}}{ds} \cdot \mathfrak{N} = \left[\mathfrak{t}\, \mathfrak{N}\, \frac{d\mathfrak{N}}{ds}\right] = T. \end{aligned} \tag{12}$$

G heißt geodätische Krümmung, N Normalkrümmung, T geodätische Torsion von C. Die Einführung des negativen Vorzeichens bei N entspringt einem Zweckmäßigkeitsgrund; sie macht die Normalkrümmung einer auf einer positiv gekrümmten Fläche gelegenen Kurve positiv, wenn als Richtungssinn von $\mathfrak{N}$ der der äußeren Normalen gewählt wird. Dann wird der Drehvektor

$$\mathfrak{u} = \pm (a_1 \mathfrak{t} + a_2 \bar{\mathfrak{t}} + a_3 \mathfrak{N}) = T \mathfrak{t} \pm N \bar{\mathfrak{t}} \pm G \mathfrak{N} \tag{13}$$

und die Drehung des Dreibeins ist bestimmt durch[2])

---

[1]) Diese Gestalt der Frenet'schen Formeln findet sich wiederholt in der Literatur; einem weiteren Kreise sind sie durch Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie (Bd. I, S. 15) bekannt geworden.

[2]) Die Formeln (14) und (21) finden sich in etwas anderer Gestalt bei Burati-Forti, Fondamenti per la geometria differentiale col metodo vettoriale generale. Rendiconti di Palerma 33, 1912; in der hier angegebenen Form ohne Ableitung bei Lagally, Über Spannung und elastische Deformation von unebenen Membranen. Zeitschrift für angewandte Math. und Mech. 4, 1924.

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathfrak{t}}{ds} &= \mathfrak{u} \times \mathfrak{t} = \quad * \quad G\bar{\mathfrak{t}} - N\mathfrak{N}, \\
\frac{d\bar{\mathfrak{t}}}{ds} &= \mathfrak{u} \times \bar{\mathfrak{t}} = -G\mathfrak{t} \quad * \quad \pm T\mathfrak{N}, \\
\frac{d\mathfrak{N}}{ds} &= \mathfrak{u} \times \mathfrak{N} = \quad N\mathfrak{t} \mp T\bar{\mathfrak{t}} \quad * \quad .
\end{aligned} \tag{14}
$$

5. Orthogonales Kurvennetz. Um zur Geometrie einer Fläche selbst übergehen zu können, sollen die Formeln für eine Kurve auf der Fläche auf die Kurven C_1 und C_2 zweier orthogonaler Kurvenscharen angewendet werden, die durch die Indices 1 und 2 charakterisiert werden sollen. Das begleitende Dreibein soll in jedem Punkt für beide Kurven durch die Einheitsvektoren der beiden Tangenten $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ und den der Flächennormale $\mathfrak{N}$ bestimmt werden. Also ist $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ für eine Kurve C_1 durch $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{N}$, für eine Kurve C_2 durch $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{N}$ zu ersetzen. Die Bezeichnung soll so gewählt sein, daß $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{N}$ ein Rechtssystem, also $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{N}$ ein Linkssystem ist. Dann werden die beiden Drehvektoren $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$ nach (13), wenn T, N, G mit Indices 1, 2 versehen werden:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{u}_1 &= T_1\mathfrak{t}_1 + N_1\mathfrak{t}_2 + G_1\mathfrak{N}, \\
\mathfrak{u}_2 &= T_2\mathfrak{t}_2 - N_2\mathfrak{t}_1 - G_2\mathfrak{N}
\end{aligned} \tag{15}
$$

und die Drehung des Dreibeins bei Fortschreitung des Scheitels längs einer der beiden Kurven ist bestimmt durch:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_1} &= \quad * \quad G_1\mathfrak{t}_2 - N_1\mathfrak{N}, & \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_2} &= \quad * \quad G_2\mathfrak{t}_1 - N_2\mathfrak{N}, \\
\frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_1} &= -G_1\mathfrak{t}_1 \quad * \quad + T_1\mathfrak{N}, & \frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_2} &= -G_2\mathfrak{t}_2 \quad * \quad - T_2\mathfrak{N}, \\
\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s_1} &= N_1\mathfrak{t}_1 - T_1\mathfrak{t}_1 \quad * \quad . & \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s_2} &= N_2\mathfrak{t}_2 + T_2\mathfrak{t}_1 \quad * \quad ;
\end{aligned} \tag{16}
$$

6. Integrabilitätsbedingung. In den Formeln (16) treten, da $\mathfrak{t}_1 = \dfrac{\partial \mathfrak{r}}{\partial s_1}$ und $\mathfrak{t}_2 = \dfrac{\partial \mathfrak{r}}{\partial s_2}$ als Richtungsdifferentialquotienten definiert sind, auf der linken Seite Richtungsdifferentialquotienten 2. Ordnung auf. Um allgemein Richtungsdifferentialquotienten höherer Ordnung zu untersuchen, führt man in dem orthogonalen Kurvensystem auf der Fläche für den Augenblick

an Stelle der nicht integrablen Liniendifferentiale ds_1 und ds_2 zwei Parameter u, v ein und ein Gaußsches Linienelement $ds^2 = E du^2 + 2 F du\, dv + G dv^2$. Dann ist $ds_1 = \sqrt{E}\, du$; $ds_2 = \sqrt{G}\, dv$. Es soll dann, wenn F ein (skalare oder extensive) Ortsfunktion auf der Fläche ist, mit $d_1 F$, bzw. $d_2 F$ die Änderung bezeichnet werden, die F erleidet, wenn sich u um du, bzw. v um dv ändert. Die Symbole d_1 und d_2 sind damit in jedem Punkt eines Gebietes erklärt, in dem die Parameter u, v eindeutig definiert sind.

In einem Viereck $P P_1 P' P_2$, das von je zwei benachbarten Kurven beider Scharen gebildet wird, kann nun der Funktionswert in der der Ecke $P(u, v)$ gegenüberliegenden Ecke $P'(u + du,\ v + dv)$ auf zweierlei Weise berechnet werden, je nachdem man den Aufpunkt auf dem Weg $P P_1 P'$ oder $P P_2 P'$ wandern läßt. Der Funktionswert in P' soll mit F' bezeichnet werden; man erhält dafür die beiden Werte:

$$F' = F + d_1 F + d_2 (F + d_1 F),$$
$$F' = F + d_2 F + d_1 (F + d_2 F);$$

hieraus folgt für die E i n d e u t i g k e i t der F u n k t i o n F i n d e r U m g e b u n g v o n P die Bedingung

$$d_2 d_1 F - d_1 d_2 F = 0. \tag{17}$$

Sie sagt aus, daß F b e i m U m l a u f e n d e s V i e r e c k s s e i n e n W e r t n i c h t ä n d e r t. Ist von vornherein statt der Ortsfunktion F nur das Differential dF gegeben, so ist (17) die B e d i n g u n g f ü r d i e I n t e g r a b i l i t ä t d i e s e s D i f f e r e n t i a l s.

Um von den Parametern u, v wieder frei zu werden, berechnet man

$$d_2 d_1 F = \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial u}\, du\, dv = \left(\sqrt{G}\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\sqrt{E}\frac{\partial F}{\partial s_1}\right)\right)\frac{ds_1\, ds_2}{\sqrt{EG}}$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial s_2}\frac{\partial F}{\partial s_1} + \frac{\partial \lg \sqrt{E}}{\partial s_2}\frac{\partial F}{\partial s_1}\right] ds_1\, ds_2;$$

ähnlich $d_1 d_2 F$; dann geht die Integrabilitätsbedingung (17) über in

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial s_2\, \partial s_1} - \frac{\partial^2 F}{\partial s_1\, \partial s_2} - \gamma_1 \frac{\partial F}{\partial s_1} + \gamma_2 \frac{\partial F}{\partial s_2}\right] ds_1\, ds_2 = 0, \tag{17'}$$

wo γ_1 und γ_2 abkürzend für $\dfrac{\partial \lg \sqrt{E}}{\partial s_2}$ und $\dfrac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial s_1}$ gesetzt sind.

Der geometrische Sinn dieser beiden Größen ist leicht zu erkennen:

Setzt man in die Integrabilitätsbedingung (17) für F den Ortsvektor $\mathfrak{r}$ ein, so geht sie in die Schließungsbedingung des Vierecks

$$d_2 d_1 \mathfrak{r} - d_1 d_2 \mathfrak{r} = 0$$

über; ausführlich geschrieben nach (17')

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial s_2 \partial s_1} - \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial s_1 \partial s_2} - \gamma_1 \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial s_1} + \gamma_2 \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial s_2} = 0$$

oder

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_1} = \gamma_1 \mathfrak{t}_1 - \gamma_2 \mathfrak{t}_2 .$$

Bildet man anderseits nach (16)

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_1} = G_1 \mathfrak{t}_1 - G_2 \mathfrak{t}_2 - (T_1 + T_2) \mathfrak{N},$$

so folgt durch Vergleich

$$\gamma_1 = G_1, \quad \gamma_2 = G_2$$

und außerdem die wichtige Beziehung zwischen den geodätischen Torsionen zweier sich senkrecht schneidender Kurven:

$$T_1 + T_2 = 0,$$

für die im folgenden

$$T_1 = -T_2 = T \tag{18}$$

gesetzt werden soll.

Die Integrabilitätsbedingung wird endgiltig

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_2 \partial s_1} - \frac{\partial^2 F}{\partial s_1 \partial s_2} - G_1 \frac{\partial F}{\partial s_1} + G_2 \frac{\partial F}{\partial s_2} = 0. \tag{19}$$

7. Endgiltige Formeln für die Bewegung des begleitenden Dreibeins.

Nach (18) erhält man für die beiden Drehvektoren:

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_1 &= T \mathfrak{t}_1 + N_1 \mathfrak{t}_2 + G_1 \mathfrak{N}, \\ \mathfrak{u}_2 &= -[T \mathfrak{t}_2 + N_2 \mathfrak{t}_1 + G_2 \mathfrak{N}], \end{aligned} \tag{20}$$

und für die Drehung des Dreibeins $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{N}$ beim Fortschreiten seines Scheitels auf der Fläche

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_1} &= \quad * \quad G_1 \mathfrak{t}_2 - N_1 \mathfrak{N}, & \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_2} &= \quad * \quad G_2 \mathfrak{t}_1 - N_2 \mathfrak{N}, \\
\frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_1} &= -G_1 \mathfrak{t}_1 \quad * \quad + T \mathfrak{N}, & \frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_2} &= -G_2 \mathfrak{t}_2 \quad * \quad + T \mathfrak{N}, \qquad (21) \\
\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s_1} &= N_1 \mathfrak{t}_1 - T \mathfrak{t}_2 \quad * \quad, & \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s_2} &= N_2 \mathfrak{t}_2 - T \mathfrak{t}_1 \quad * \quad.
\end{aligned}$$

Die Gleichungen für beide Kurvenscharen sind völlig symmetrisch gebaut.

8. Gleichungen von Gauss und Codazzi. Da die linken Seiten der Gleichungen des Systems (21) die Richtungsdifferentialquotienten der 3 Vektoren $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{N}$ nach zwei verschiedenen Richtungen sind, ist dieses Gleichungssystem nicht unbeschränkt integrabel; um die Integrabilitätsbedingungen in der einfachsten Weise zu erhalten, setzt man sie nicht getrennt für jeden der 3 Vektoren $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{N}$ an, sondern für einen beliebigen mit dem Dreibein starr verbundenen Vektor $\mathfrak{x}$:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial s_2 \, \partial s_1} - \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial s_1 \, \partial s_2} - G_1 \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s_1} + G_2 \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s_2} = 0. \qquad (22)$$

Die Änderungen dieses Vektors $\mathfrak{x}$ bei den Drehungen des Dreibeins sind nach (2)

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s_1} = \mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s_2} = \mathfrak{u}_2 \times \mathfrak{x}; \qquad (23)$$

mithin wird die Integrabilitätsbedingung (22)

$$\frac{\partial}{\partial s_2} (\mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{x}) - \frac{\partial}{\partial s_1} (\mathfrak{u}_2 \times \mathfrak{x}) - G_1 \mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{x} + G_2 u_2 \times \mathfrak{x} = 0.$$

Führt man in dieser Gleichung die vorgeschriebenen Differentiationen unter Benutzung von (23) aus, so treten dreifache Vektorprodukte auf; nach Anwendung des Entwicklungssatzes kann man den Faktor $\mathfrak{x}$ abspalten und erhält die Integrabilitäts-Bedingung

$$\frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \mathfrak{u}_2}{\partial s_1} + \mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{u}_2 - G_1 \mathfrak{u}_1 + G_2 \mathfrak{u}_2 = 0. \qquad (24)$$

Diese Gleichung läßt sich in 3 skalare Gleichungen zerlegen, indem man zunächst $\frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial s_2}$ und $\frac{\partial \mathfrak{u}_2}{\partial s_1}$ nach (20) berechnet, dann die Differentialquotienten von $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{N}$ nach (21) durch $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{N}$ selbst ausdrückt und endlich nach $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{N}$ ordnet; es ergeben sich die bekannten Gleichungen von Gauss und Codazzi:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N_2}{\partial s_1} + \frac{\partial T}{\partial s_2} + (N_1 - N_2)\, G_2 - 2\, T G_1 = 0, \\ &\frac{\partial N_1}{\partial s_2} + \frac{\partial T}{\partial s_1} + (N_2 - N_1)\, G_1 - 2\, T G_2 = 0, \\ &\frac{\partial G_1}{\partial s_2} + \frac{\partial G_2}{\partial s_1} - G_1^2 - G_2^2 - N_1 N_2 + T^2 = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Sie stellen, wenn G_1 und G_2 als geodätische Krümmungen zweier eine Flächenhaut definierender orthogonaler Kurvenscharen gegeben sind, die Bedingungen dar, denen die drei weiteren Kurvenkrümmungen N_1, N_2, T bei irgend einer möglichen Gestalt dieser Haut genügen müssen.

9. Dreifache Orthogonalsysteme. In einem System von 3 sich rechtwinklig schneidenden Flächenscharen wird ein begleitendes Dreibein für 3 sich in einem Punkt schneidende Flächen von den Einheitsvektoren $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ in Richtung der Tangenten der 3 Schnittkurven gebildet. Für jede der 3 Flächen bildet eine der 3 Richtungen die Normalenrichtung. Für je 2 in einer der 3 Kurven sich schneidende Flächen sollen die Krümmungen N, G, T der Kurve durch Anfügen eines oberen Index unterschieden werden, der die zugehörige Flächennormale kennzeichnet.

Dann läßt sich der Drehvektor $\mathfrak{u}$, der zu einer Bewegung des Scheitels des Dreibeins längs einer der 3 Kurven gehört, in doppelter Weise angeben, je nachdem man die Krümmungen der Kurve bezüglich der einen oder anderen sich in ihr schneidenden Flächen verwendet; so ist

$$\mathfrak{u}_1 = T^{(3)}\mathfrak{t}_1 + N_1^{(3)}\mathfrak{t}_2 + G_1^{(3)}\mathfrak{t}_3 = -\left[T^{(2)}\mathfrak{t}_1 + N_1^{(2)}\mathfrak{t}_3 + G_1^{(2)}\mathfrak{t}_2\right] \tag{26}$$

ähnlich $\mathfrak{u}_2$ und $\mathfrak{u}_3$; hieraus folgt

$$T^{(3)} = -T^{(2)},\quad T^{(2)} = -T^{(1)},\quad T^{(1)} = -T^{(3)},$$

also
$$T^{(1)} = T^{(2)} = T^{(3)} = 0; \tag{27}$$

ferner
$$N_i^{(k)} = -G_i^{(l)} \quad \text{für } i \neq k \neq l \; (i, k, l = 1, 2, 3). \tag{28}$$

Die erstere Gleichung (27) ist der Ausdruck des Dupinschen Satzes: Die Schnittkurven eines dreifachen Orthogonalsystems sind Kurven von der geodätischen Torsion Null, d. h. Krümmungslinien; die zweite Gleichung (28) ist geometrisch evident: die

Normalkrümmung einer Schnittkurve für die eine Fläche ist geodätische Krümmung für die andere. Danach wird

$$\mathfrak{u}_1 = * \; N_1^{(3)}\,\mathfrak{t}_2 - N_1^{(2)}\,\mathfrak{t}_3\,, \tag{29}$$

ähnlich $\mathfrak{u}_2$ und $\mathfrak{u}_3$.

Für die Drehung des Dreibeins beim Fortschreiten des Scheitels längs einer der 3 Schnittkurven erhält man zufolge

$$\frac{\partial\,\mathfrak{t}_i}{\partial\,s_k} = \mathfrak{u}_k \times \mathfrak{t}_i \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3)$$

3 Systeme von je 3 Gleichungen, von denen das erste angeführt sei:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\,\mathfrak{t}_1}{\partial\,s_1} &= * \quad - N_1^{(2)}\,\mathfrak{t}_2 - N_1^{(3)}\,\mathfrak{t}_3\,,\\
\frac{\partial\,\mathfrak{t}_2}{\partial\,s_1} &= N_1^{(2)}\,\mathfrak{t}_1 \quad * \qquad\quad * \quad ,\\
\frac{\partial\,\mathfrak{t}_3}{\partial\,s_1} &= N_1^{(3)}\,\mathfrak{t}_1 \quad * \qquad\quad * \quad .
\end{aligned} \tag{30}$$

10. Lamésche Gleichungen. Die Integrabilitätsbedingungen des Systems (30) sind nach (24)

$$\frac{\partial\,\mathfrak{u}_1}{\partial\,s_2} - \frac{\partial\,\mathfrak{u}_2}{\partial\,s_1} + \mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{u}_2 + N_1^{(2)}\,\mathfrak{u}_1 - N_2^{(1)}\,\mathfrak{u}_2 = 0 \tag{31}$$

und zwei daraus durch zyklische Vertauschung entstehende Gleichungen; diese 3 Gleichungen zerfallen in 9 skalare Gleichungen, die sich auch unmittelbar erhalten lassen, wenn man die Gauss-Codazzischen Gleichungen (25) für die Flächen der 3 Scharen bildet; sie zerfallen in 6 Gleichungen vom Typus

$$\frac{\partial\,N_i^{(l)}}{\partial\,s_k} + (N_i^{(l)} - N_k^{(l)})\,N_i^{(k)} = 0 \tag{32 a}$$

und 3 Gleichungen vom Typus

$$\frac{\partial\,N_i^{(k)}}{\partial\,s_k} + \frac{\partial\,N_k^{(i)}}{\partial\,s_i} + (N_i^{(k)})^2 + (N_k^{(i)})^2 + N_i^{(l)}\,N_k^{(l)} = 0\,. \tag{32 b}$$

Dieses Gleichungssystem ist von Lamé aufgestellt worden; es gibt die Bedingungen für die Möglichkeit und Existenz eines durch die 6 Krümmungen $N_i^{(k)}$ der 3 Systeme von Schnittkurven definierten dreifachen Orthogonalsystems.

11. Ausblick auf die natürliche Geometrie im Riemannschen Raum. Zum vollen Verständnis des geometrischen

Sinnes der Integrabilitätsbedingung und der daraus abgeleiteten Gauss-Codazzi- und Laméschen Gleichungen kommt man, wenn man die Bedingungen untersucht, unter denen ihre Gültigkeit aufgehoben ist. Schon der Vergleich der Stellungen der zu benachbarten Punkten einer Kurve gehörigen Dreibeine enthält ein der Anschauung entnommenes Element, das nicht übersehen werden darf: Es wird vorausgesetzt, daß es überhaupt möglich ist, in verschiedenen Punkten definierte extensive Größen zu vergleichen; d. h. daß eine Übertragung möglich ist, welche nach Art der Parallelverschiebung im Raum unserer Anschauung erlaubt, extensive Größen in verschiedenen Punkten als gleich zu erklären. Unter dieser Annahme bleiben vor allem die Frenetschen Formeln und die entsprechenden Formeln (14) für eine Kurve auf einer Fläche auch im Riemannschen Raum unverändert erhalten, wenn sie vektoriell geschrieben sind und unter dem Richtungsdifferentialquotient eines Vektors seine absolute Änderung verstanden wird. Beim Übergang zu Koordinaten allerdings treten an Stelle der gewöhnlichen die absoluten Differentiationen im Sinne des Ricci-Calculs. Bei der Ableitung der Integrabilitätsbedingung tritt weiter die Frage auf, ob die Übertragung vom Weg unabhängig ist, d. h. ob die beim Übergang zu Koordinaten als Folge der linearen Übertragung hinzutretenden Differentiale integrabel sind. Aus der Theorie der Raumkrümmung ist bekannt, daß das nur im Raum unserer Anschauung, im Euklidischen Raum, der Fall ist. In einem Riemannschen Raum hat die Übertragung eines Vektors um eine geschlossene Kurve eine Drehung des Vektors gegenüber dem Ausgangssystem zur Folge, die außer von der umfahrenen Fläche vor allem vom Krümmungstensor des Raumes abhängt. Infolgedessen sagen die Gauß-Codazzischen Gleichungen für eine Fläche aus, daß diese Fläche in einen Euklidischen Raum eingebettet werden kann; die Laméschen Gleichungen sind nichts anderes als die Bedingungen für das Verschwinden des Krümmungstensors des durch das dreifache Orthogonalsystem definierten Raumes. Im Riemannschen Raum treten auf den rechten Seiten dieser Gleichungen die Maßzahlen bestimmter Komponenten des Krümmungstensors hinzu.