Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1926. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1926
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über besondere räumliche Geradenanordnungen derart, dass durch jeden Schnittpunkt gleichviele Gerade hindurchgehen.

Von H. Graf und R. Sauer[1]).

Mit 18 Figuren.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 6. März 1926.

Einleitung.

In einer früheren Arbeit[2]) haben wir die allgemeinste Anordnung gerader Linien in der Ebene untersucht derart, daß immer drei Gerade sich in einem Punkt schneiden. Es ergab sich, daß alle Geraden Tangenten einer ebenen Kurve 3. Klasse sind, und umgekehrt, daß die Tangenten jeder beliebigen ebenen Kurve 3. Klasse so angeordnet werden können, daß sie zu je dreien durch einen Punkt gehen und dadurch ein Dreiecksnetz erzeugen, bei dem um jeden Knotenpunkt sechs Dreiecke herumliegen.

Es liegt nahe, das Problem auf den Raum zu übertragen. Nach einer Richtung hin ist dies auf Grund der Analogie zwischen den ebenen Kurven 3. Klasse und den Developpablen 4. Klasse 1. Spezies bereits geschehen durch die Untersuchung der allgemeinsten Anordnung von Ebenen, die zu je vieren sich in einem Punkte schneiden und dadurch eine Raumeinteilung in Tetraeder und in Oktaeder mit windschiefen Gegenkanten herbeiführen[3]).

Nicht minder bemerkenswert ist eine andere räumliche und zwar liniengeometrische Verallgemeinerung der von Geraden er-

[1]) An der Arbeit haben beide Verfasser zu gleichen Teilen mitgewirkt.

[2]) H. Graf und R. Sauer, Über dreifache Geradensysteme usw., Sitzungsber. der bayer. Akad. der Wiss., math.-nat. Abtg., 1924, p. 119 ff.

[3]) R. Sauer, Die Raumeinteilungen, welche durch Ebenen erzeugt werden, von denen je vier sich in einem Punkte schneiden, Sitzungsber. der bayer. Akad. der Wiss., math.-nat. Abtg., 1925, p. 41 ff.

zeugten ebenen Dreiecksnetze, wie sie in folgender Frage zum Ausdruck kommt:

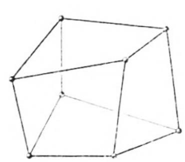
Wie können im Raume gerade Linien so angeordnet werden, daß immer gleichviele sich in einem Punkte schneiden?

Bei den ebenen Dreiecksnetzen existiert ein regulärer Grundtypus, nämlich das Netz kongruenter gleichseitiger Dreiecke. Die von den Netzgeraden umhüllte Kurve 3. Klasse zerfällt in diesem Falle in drei Punkte auf der unendlich fernen Geraden. In ähnlicher Weise bietet sich für die liniengeometrische Verallgemeinerung ein reguläres Beispiel:

Betrachten wir die Einteilung des Raumes in kongruente Würfel! Die Gesamtheit der Würfelkanten bildet eine Geradenanordnung, bei der durch jeden Knotenpunkt drei Gerade hindurchgehen, ferner ergibt die Gesamtheit der Raumdiagonalen, d. h. der Diagonalen durch die Würfelgegenecken eine Geradenanordnung mit je vier sich schneidenden Geraden, und schließlich bekommt man noch eine Anordnung mit je sieben sich schneidenden Geraden, wenn man die Würfelkanten und ihre Parallelen durch die Würfelmittelpunkte gleichzeitig mit den Würfeldiagonalen ins Auge faßt.

In der vorliegenden Abhandlung sollen nun die allgemeinsten Geradenanordnungen oder „Gestänge", wie wir der Kürze halber sagen wollen, untersucht werden, welche aus den eben erwähnten regulären Sonderfällen durch einen gewissen Deformationsprozeß entstehen, den wir als „Zerschränkung" bezeichnen; die Geraden des Systems bleiben geradlinig und die Zusammenhangsverhältnisse in den Knotenpunkten ändern sich nicht, dagegen werden die in den regulären Fällen parallelen Geraden „zerschränkt", d. h. im allgemeinen zueinander windschief.

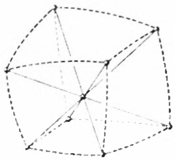
Es sind also der Reihe nach folgende drei Probleme zu erörtern:



Figur 1a.

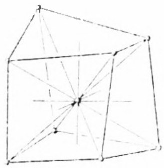
a) Wie kann die Gesamtheit der Kanten eines regulären Würfelgefüges in allgemeinster Weise zerschränkt werden, so daß lediglich die Würfelkanten geradlinig bleiben, die Raumdiagonalen der Würfel dagegen krummlinig werden?

b) Wie kann die Gesamtheit der Diagonalen eines regulären Würfelgefüges in allgemeinster Weise zerschränkt werden, so daß lediglich die Raumdiagonalen der Würfel geradlinig bleiben, die Würfelkanten dagegen krummlinig werden?



Figur 1b.

c) Wie kann die Gesamtheit der Kanten und Raumdiagonalen eines regulären Würfelgefüges in allgemeinster Weise zerschränkt werden, so daß sowohl die Würfelkanten und ihre Parallelen durch die Würfelmitten als auch die Würfeldiagonalen geradlinig bleiben?



Figur 1c.

In Figur 1a, 1b und 1c sind die zerschränkten „Würfel" mit ihren Kanten und Diagonalen in schematischer Weise angedeutet. Die geraden Linien sind ausgezogen, die krummen Kurven gestrichelt.

Die Antwort der Frage a) ergibt Strahlenanordnungen, bei denen von jedem Knotenpunkt drei Gerade ausgehen. Anstelle der drei Parallelstrahlenbündel des regulären Falles oder, projektiv verallgemeinert, anstelle dreier beliebiger Strahlenbündel treten nach der Zerschränkung drei Strahlenkongruenzen. Im regulären Falle liegen die Würfelseitenebenen in drei Parallelebenenbüscheln. Diese werden durch die Zerschränkung in drei Systeme von Regelflächen 2. Grades deformiert, welche die Würfelkanten zu Erzeugenden haben.

Die Frage b) führt auf Strahlenanordnungen mit je vier sich in einem Knotenpunkt schneidenden Geraden. Die vier Parallelstrahlenbündel des regulären Falles oder, in projektiver Ausdrucksweise, die vier Strahlenbündel, deren Mittelpunkte in einer Ebene liegen, werden zu vier Strahlenkongruenzen zerschränkt. Im regulären Falle enthalten die Diagonalebenen durch je zwei Würfelgegenkanten je zwei Parallelstrahlenbüschel von Würfeldiagonalen und je ein Parallelstrahlenbüschel von Würfelkanten und Parallelen zu den Kanten durch die Würfelmittelpunkte. Diese drei Parallelstrahlenbüschel bilden ein Dreiecksnetz. Die Gesamtheit der Würfeldiagonalebenen besteht aus sechs Parallelebenenbüscheln, entsprechend den sechs Paaren von Würfelgegenkanten. Bei der Zerschränkung werden die Würfelkanten krummlinig und daher treten anstelle der sechs Parallelbüschel der Würfeldiagonalebenen sechs Systeme von Regelflächen 2. Grades, welche die Würfeldiagonalen zu Erzeugenden haben.

Durch die Beantwortung der Frage c) gelangt man zu Anordnungen, bei denen je sieben Gerade durch einen Knotenpunkt gehen. Im regulären Falle bilden die Geraden sieben Parallelstrahlenbündel, in projektiver Verallgemeinerung sieben Strahlenbündel, deren Mittelpunkte die Ecken eines vollständigen ebenen Vierseits bilden. Daß auch dieser Fall, wie sich im Verlaufe unserer Untersuchungen zeigen wird, noch eine gewisse Zerschränkung zuläßt, ist eine besonders merkwürdige Tatsache. Da in diesem dritten Falle die Kanten und zugleich die Diagonalen der Würfel bei der Zerschränkung als gerade Linien erhalten werden, so müssen die sechs Systeme der Diagonalebenen eben bleiben: die in den Diagonalebenen liegenden Kanten und ihre Parallelen durch die Würfelmittelpunkte bilden auch noch nach der Zerschränkung zusammen mit den Diagonalen der Würfel ebene Dreiecksnetze. Die drei Parallelbüschel der Würfelseitenebenen des regulären Falles werden in drei Systeme von Regelflächen 2. Grades zerschränkt mit den Würfelkanten als Erzeugenden.

Ausdrücklich sei noch darauf hingewiesen, daß es sowohl in dem zweiten als auch in dem dritten Falle zunächst zwei Arten von Knotenpunkten zu geben scheint, nämlich die Würfelecken und die Würfelmitten. Tatsächlich sind jedoch alle Knotenpunkte gleichberechtigt, denn man hätte zu den nämlichen Geradenanordnungen gelangen können durch Würfelgefüge, bei denen die Ecken und Mitten der ursprünglichen Würfel ihre Rollen vertauscht haben.

Nun wollen wir uns einen Überblick verschaffen über die sämtlichen Gestänge, welche aus einem regulären oder halbregulären Grundtypus durch Zerschränkung abgeleitet werden können. Wir bezeichnen dabei als regulär oder halbregulär solche Geradenanordnungen, bei denen alle Knotenpunkte gleichberechtigt sind und sämtliche irgend einem Knotenpunkt benachbarte Knotenpunkte die Ecken eines regulären oder halbregulären Körpers bilden. Die zu besprechenden Gestänge treten sonach in Zusammenhang mit der Einteilung des Raumes in kongruente Würfel und der Einteilung des Raumes in kongruente Rhombendodekaeder, weil diese Raumeinteilungen die einzig möglichen Raumausfüllungen durch kongruente reguläre oder halbreguläre Körper darstellen.

Betrachten wir zunächst die Raumausfüllungen durch kongruente Würfel:

Wenn wir die Mittelpunkte der parallelen Gegenseitenflächen verbinden, so erhalten wir den regulären Typus der Gestänge mit je drei sich schneidenden Geraden, von denen in Frage a) die Rede war. Sämtliche Gerade sind miteinander gleichberechtigt. Die sechs einem Knotenpunkte benachbarten Knotenpunkte sind gleichweit entfernt und bilden die Ecken eines regulären Oktaeders.

Verbinden wir die Gegenecken der Würfel, so entsteht der reguläre Typus der in Frage b) erwähnten Gestänge mit je vier sich schneidenden Geraden. Sämtliche Gerade sind gleichberechtigt.

Nun wenden wir uns zu den Raumausfüllungen durch kongruente Rhombendodekaeder:

Die sieben Systeme der Hauptdiagonalen geben den Grundtypus der in Frage c) angegebenen Gestänge mit je sieben sich schneidenden Geraden. Das Gestänge ist nur halbregulär. Die sieben von einem Knotenpunkt ausgehenden Geraden sind nicht alle gleichberechtigt. Drei Gerade verbinden diejenigen Dodekaederecken, an denen je vier Rhomben zusammentreffen, und entsprechen bei den in Frage c) beschriebenen Würfelgefügen den Kanten und Kantenparallelen. Die übrigen vier Geraden gehen durch die Dodekaederecken, welche je drei Rhomben gemeinsam sind, und bilden bei den in Frage c) angegebenen Würfelgefügen die Raumdiagonalen.

Als letzter möglicher halbregulärer Typus bietet sich schließlich noch das Gestänge mit je sechs sich schneidenden Geraden, welches dadurch entsteht, daß man die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seitenflächen des Rhombendodekaeders miteinander verbindet. Die sämtlichen Geraden sind gleichberechtigt. Alle einem Knotenpunkte benachbarten Knotenpunkte sind gleichweit entfernt und bilden die Eckpunkte eines zwölfeckigen halbregulären Vierzehnflachs. Dieses wird begrenzt von sechs Quadraten und acht gleichseitigen Dreiecken. Alle zwölf Körperecken sind gleichberechtigt.

In der vorliegenden Abhandlung werden die Zerschränkungen sämtlicher möglichen regulären und halbregulären Gestänge, wie wir sie soeben aufgezählt haben, untersucht. Die regulären Gestänge mit je drei und je vier sich schneidenden Geraden sind im Anschluß an Frage a) und b) in den §§ 1 bis 4 behandelt. Als Ausartungen ergeben sich in § 5 die halbregulären Gestänge mit je sechs sich schneidenden Geraden. Schließlich werden in § 6 die halbregulären Gestänge mit je sieben sich schneidenden Geraden besprochen. Die Gestänge mit je fünf sich schneidenden Geraden besitzen, wie aus den vorangehenden Überlegungen folgt, keinen regulären oder halbregulären Grundtypus. Die Untersuchung dieser Gestänge gehört daher nicht zum Thema der Abhandlung. Beiläufig sollen jedoch auch über Gestänge mit je fünf sich schneidenden Geraden die wesentlichen Tatsachen mitgeteilt werden.

§ 1.

Die Geradenanordnungen mit je drei sich schneidenden Geraden.

Wir wenden uns zunächst zu den Geradenanordnungen mit je drei sich schneidenden Geraden, welche aus einem regulären Würfelgefüge durch eine Zerschränkung abgeleitet werden können, bei der lediglich die Kanten geradlinig bleiben. Die drei Systeme der Würfelseitenflächen bestehen, wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, aus Regelflächen 2. Grades mit je zwei Systemen von Würfelkanten als Erzeugenden. Alle Regelflächen eines Systems, also alle Regelflächen, denen im regulären Falle parallele Ebenen entsprechen, werden durch das dritte System der Würfelkanten, nämlich durch diejenigen Geraden, welche nicht als Erzeugende in dem System der Regelflächen enthalten sind, punktweise aufeinander bezogen. Dabei entsprechen sich die Erzeugenden der verschiedenen Flächen gegenseitig und das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Erzeugenden bleibt erhalten. Die Zuordnung der Regelflächen ist demnach eine projektive. Damit ist aber die Natur des Strahlensystems, dem die die Projektivität vermittelnden Würfelkanten entnommen sind, geklärt: Es handelt sich um ein Strahlensystem 6. Ordnung 2. Klasse zweiter Art ohne singuläre Linien; denn die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte auf zwei kollinearen Flächen 2. Grades bilden stets ein Strahlensystem (6,2), wie wir in Übereinstimmung mit der von Sturm verwendeten Bezeichnungsweise die Kongruenzen 6. Ordnung 2. Klasse zweiter Art ohne singuläre Linien nennen wollen [1]).

Jedes der drei Kantensysteme gehört sonach zu einem Strahlensystem (6,2). Wie aus der Theorie der Strahlenkongruenzen bekannt ist [1]), sind in jeder Strahlenkongruenz (6,2) zwei Systeme von Regelscharen 2. Grades enthalten. Dies sind gerade diejenigen Regelscharen, welche in dem zerschränkten Würfelgefüge als Regelscharen in den Seitenflächen auftreten. Jede Regelschar aus einem der drei Kantensysteme bildet die zugehörige Leitschar zu einer Regelschar aus einem der beiden anderen Kantensysteme. Die drei Strahlenkongruenzen (6,2), denen die Kanten des Würfelgefüges entnommen sind, stellen demnach drei konfokale Kongruenzen dar [1]). Sie besitzen die nämliche Brennfläche 12. Ordnung 4. Klasse mit 12 Berührungskegelschnitten. Die Gesamtheit der Doppeltangenten dieser Brennfläche zerfällt in die drei Kongruenzen (6,2) sowie in eine Restkongruenz 10. Ordnung.

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz 1a: Jede Geradenanordnung mit je drei sich schneidenden Geraden, welche durch eine Zerschränkung eines regulären Würfelgefüges entsteht, so daß lediglich die Kanten geradlinig bleiben, ist herausgegriffen aus drei konfokalen Strahlensystemen 6. Ordnung 2. Klasse zweiter Art ohne singuläre Linien. Die drei Systeme der Würfelseitenflächen sind Regel-

---

[1]) R. Sturm, Liniengeometrie II. Teil, 1893, p. 285 ff.; ferner: Th. Reye, Geometrie der Lage III. Teil, 1892, p. 45 ff. Die Bezeichnung Kongruenz „zweiter Art" bezieht sich auf die von Sturm gewählte Ausdrucksweise.

flächen 2. Grades. Die Regelscharen dieser Flächen sind den 3×2 Systemen von Regelscharen entnommen, welche in den drei konfokalen Kongruenzen enthalten sind.

Daß in der Tat stets aus drei konfokalen Kongruenzen (6,2) in diskreter Aufeinanderfolge Strahlen so herausgegriffen werden können, daß sie die Kanten eines zerschränkten Würfelgefüges bilden, daß also die gesuchten Geradenanordnungen wirklich existieren, liegt auf der Hand und ist im wesentlichen schon in den Untersuchungen von Reye (vgl. Fußnote 1 der vorigen Seite) enthalten. Die zu drei vorgegebenen Kongruenzen (6,2) gehörenden zerschränkten Würfelgefüge mit geradlinigen Kanten ergeben sich nämlich unmittelbar dadurch, daß man aus den drei Systemen von Regelflächen 2. Grades, die in den gegebenen Kongruenzen enthalten sind, drei beliebige Folgen von Regelflächen herausgreift und damit den Raum zerteilt. Die Elemente dieser Raumeinteilungen sind dabei stets zerschränkte „Würfel" und die Kanten bilden eine Geradenanordnung von der verlangten Beschaffenheit. So können wir den Satz 1a) noch ergänzen:

Satz 1b: Aus drei konfokalen Strahlensystemen (6,2) können stets Geradenanordnungen herausgegriffen werden, welche die Kanten eines zerschränkten Würfelgefüges bilden. Diese Eigenschaft ist für die Strahlensysteme (6,2) charakteristisch: denn die geradlinigen Kanten eines jeden beliebigen zerschränkten Würfelgefüges sind stets drei konfokalen Kongruenzen (6,2) entnommen.

Oder mit anderen Worten:

Die Gesamtheit der Würfelgefüge mit geradlinigen Kanten ist identisch mit der Gesamtheit der Raumeinteilungen, welche durch die drei Systeme von Regelflächen 2. Grades vermittelt werden, die zu irgend 3 konfokalen Kongruenzen (6,2) gehören. Die Würfelgefüge mit geradlinigen Kanten erscheinen sonach als die naturgemäße und einfachste Anordnung der Strahlen aus drei konfokalen Kongruenzen (6,2).

Wir fragen jetzt: Wie viele Geradenanordnungen der verlangten Art können aus drei vorgegebenen Kongruenzen (6,2) mit gemeinsamer Brennfläche herausgegriffen werden? Aus jedem der drei zu den Kongruenzen gehörigen Systeme von Regelflächen 2. Grades können nach einer willkürlichen Vorschrift in diskreter Aufeinanderfolge Flächen herausgenommen werden. Diese drei Gruppen von Flächen bilden dann stets ein zerschränktes Würfelgefüge mit geradlinigen Kanten. Je nachdem man aus den drei Systemen eine endliche oder unendliche Anzahl von Regelflächen auswählt, ergeben sich Geradenanordnungen der verlangten Art mit endlich vielen oder unendlich vielen geraden Linien.

Bemerkt sei noch, daß von jedem Punkte 3×6 Gerade der drei Kongruenzen ausgehen, während die zerschränkten Würfelgefüge nur je 3×1 Gerade in den Knotenpunkten ergeben. Da man also bei jeder der drei Kongruenzen sechs Möglichkeiten der Auswahl hat, so gibt es zu den vorgegebenen Kongruenzen insgesamt $6 \times 6 \times 6 = 216$ verschiedene Arten von zerschränkten Würfelgefügen, abgesehen noch von den drei willkürlichen Funktionen, welche die Aufeinanderfolge der Seitenflächen des Würfelgefüges regeln.

Daß die Aufeinanderfolge der Würfelseitenflächen völlig willkürlich bleibt, unterscheidet unser Problem wesentlich von dem in der Einleitung erwähnten Problem der ebenen Dreiecksnetze. Bei diesen verläuft die Konstruktion nach wenigen Schritten zwangsläufig, während bei unseren räumlichen Geradengefügen auch bei beliebiger Fortsetzung immer noch eine dreifache Willkür bestehen bleibt.

Dies hat insbesondere zur Folge, daß auch die Unterteilung der zerschränkten Würfelgefüge mit geradlinigen Kanten eine dreifache Willkürlichkeit in sich schließt, welche bei jedem weiteren sukzessiven Schritte der Unterteilung von neuem zur Geltung kommt. Demzufolge sind die Systeme von Kurven, zu denen sich bei infinitesimaler Unterteilung die Raumdiagonalen und die Seitenflächendiagonalen der zerschränkten Würfel zusammensetzen, von willkürlichen Funktionen abhängig. Die nämliche Abhängigkeit besteht auch für die Diagonalflächen durch die Würfelgegenkanten. Erst wenn man über die bei der Unterteilung eintretenden Willkürlichkeiten irgendwie bestimmt verfügt hat, bekommen die Diagonalkurven und Diagonalflächen einen wohldefinierten Sinn.

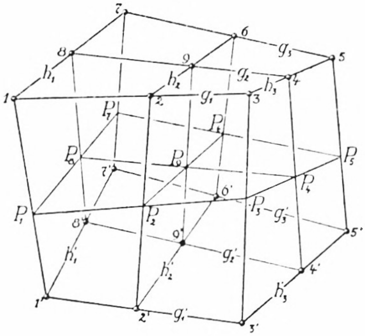
Zu jeder der drei konfokalen Kongruenzen gehören je vier Ebenen, welche für diese Kongruenz vom vierten Grade und für die beiden anderen Kongruenzen vom zweiten Grade singulär sind[1]). Je vier dieser Ebenen sind gemeinsame Tangentialebenen an alle Flächen aus zwei von den drei Systemen von Regelflächen 2. Grades und können als ausgeartete, d. h. zu Ebenen zusammengeklappte Regelflächen aus dem dritten System betrachtet werden. Ob diese zu Ebenen zusammengeklappten Regelflächen 2. Grades, deren Erzeugende den Berührungskegelschnitt der betreffenden singulären Ebene mit der Brennfläche umhüllen, unter der diskreten Folge der Würfelseitenflächen enthalten sind, bleibt unserer Willkür überlassen. Wenn man will, kann man aber die 12 singulären Ebenen in die diskrete Folge von Regelflächen 2. Grades aufnehmen. Die singulären Ebenen bilden dann die Seitenebenen von zwei zerschränkten „Würfeln", welche sich vor den übrigen zerschränkten „Würfeln" dadurch auszeichnen, daß die Seitenflächen Ebenen sind. Dabei wird lediglich anschaulich gemacht, daß die Ebenen für zwei Kongruenzen vom 2. Grade singulär sind, während der Umstand, daß sie für die dritte Kongruenz vom 4. Grade singulär sind, nicht in Erscheinung tritt.

Nachdem wir die Mannigfaltigkeit und die grundlegenden Eigenschaften der zerschränkten Würfelgefüge mit geradlinigen Kanten klargestellt haben, deuten wir im Anschlusse daran eine **lineare Erzeugungsweise** an, durch die jedes beliebige Geradengestänge der verlangten Art, also auch jede Kongruenz (6,2) samt den beiden konfokalen Kongruenzen (6,2), in einfacher Weise hergestellt werden kann:

Drei Gerade g_1, g_2, g_3 und drei sie schneidende Gerade h_1, h_2, h_3, ferner drei Gerade g_1', g_2', g_3' und drei sie schneidende Gerade h_1', h_2', h_3' sind beliebig im Raume angenommen (Figur 2). Durch die Geraden g_i, h_i' ist eine Regelfläche 2. Grades Φ bestimmt, ebenso durch die Geraden g_i', h_i eine Regelfläche 2. Grades Φ'. Φ und Φ' werden projektiv aufeinander bezogen in der Weise, daß die Er-

[1]) R. Sturm, Liniengeometrie II. Teil, 1893, p. 285 ff.

zeugenden $g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3$ den Erzeugenden $g_1', g_2', g_3', h_1', h_2', h_3'$ entsprechen. Die Punkte 1, 2, 3 ... auf Φ in der Figur 2 sind dann homolog zu den Punkten $1', 2', 3' \ldots$ Auf h_1 und g_1 sollen zwei ganz willkürliche Reihen von Punkten angenommen und durch diese Punkte die mit g_1 bzw. mit h_1 gleichartigen Erzeugenden von Φ gezogen worden. Auf diese Weise entsteht auf der Fläche Φ ein Netz von windschiefen Vierseiten. Auf Grund des kollinearen Zusammenhangs ist diesem Netz auf Φ' ein projektives Viereseitnetz zugeordnet. Die entsprechenden Knotenpunkte der Netze auf Φ und Φ' werden sodann durch gerade Linien verbunden. Auf irgend einer Verbindungsgeraden, beispielsweise auf 11′, wollen wir nun wiederum eine ganz beliebige Reihe diskreter Punkte festlegen. Von irgend einem Punkte P_1 dieser Reihe aus ziehen wir die Gerade $P_1 P_3$, welche 22′ in P_2 trifft, ebenso dann die Gerade $P_3 P_5$, welche 44′ in P_4 trifft, und schließlich noch die Gerade $P_5 P_7$, welche 66′ in P_6 trifft. Wir erkennen, daß dann stets die Gerade $P_7 P_1$ von 88′ in einem Punkte P_8 getroffen wird, und daß sich die drei Geraden $P_2 P_6$, $P_4 P_8$ und 99′ in einem gemeinsamen Punkte P_9 schneiden. Diese Tatsachen sind eine unmittelbare Folge der Eigenschaften der Kongruenzen (6,2), wie sie in den Sätzen 1 a) und 1 b) zum Ausdruck gebracht werden.



Figur 2.

Durch unsere Konstruktionen sind nunmehr insgesamt neun Regelflächen bestimmt und zwar jede derselben durch drei Erzeugende der einen und drei Erzeugende der anderen Art. Durch die neun Regelflächen haben wir bereits ein Gefüge von acht um P_9 herumliegenden zerschränkten Würfeln vor uns. Durch jede Würfelecke gehen drei geradlinige Kanten. Die drei Paare von Würfelgegenseitenflächen sind in der Konfiguration durchaus gleichberechtigt.

Ebenso wie zu P_1 gehört zu jedem anderen Punkte der auf 11′ angenommenen Reihe ein windschiefer geschlossener Vierseitzug und eine wohldefinierte Regelfläche 2. Grades. Alle diese

Regelflächen $\Phi^{(i)}$ zusammen mit den ursprünglichen Flächen Φ und Φ' sind projektiv aufeinander bezogen durch das nämliche Strahlensystem 11′, 22′, 33′ . . . Zieht man also in jeder Fläche $\Phi^{(i)}$ das von Erzeugenden gebildete Netz windschiefer Vierseite, welches den ursprünglich festgesetzten Netzen in Φ und Φ' kollinear entspricht, so ist damit in der Tat das denkbar allgemeinste zerschränkte Würfelgefüge mit geradlinigen Kanten erzeugt.

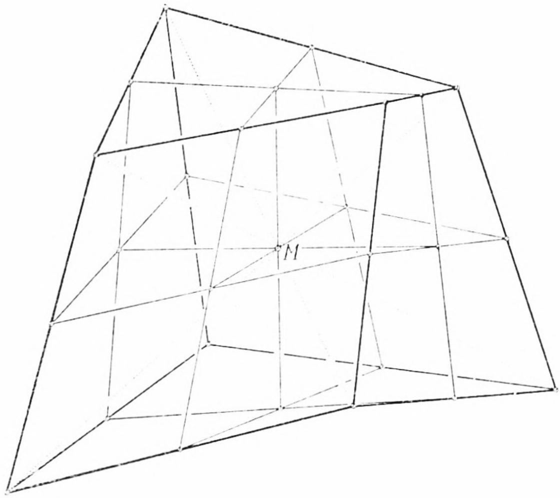
Wir fügen dieses Ergebnis als weiteren Satz an:

Satz 2: Jedes beliebige zerschränkte Würfelgefüge mit geradlinigen Kanten läßt sich schrittweise durch lineare Konstruktionen erzeugen. Ausgegangen wird dabei von zwei willkürlichen Regelflächen 2. Grades mit je drei Erzeugenden der einen und je drei Erzeugenden der anderen Art. Außerdem kann noch auf jeder der drei von einem beliebig zu wählenden Knotenpunkt ausgehenden Geraden die Reihe der Knotenpunkte willkürlich fixiert werden. Im übrigen ist dann die Konfiguration eindeutig bestimmt.

Zusatz: Die Tatsache, daß die Gerade $P_7 P_1$ stets von 88′ in einem Punkte P_8 geschnitten wird, kann in Form eines Schliessungssatzes (Figur 2) ausgedrückt werden:

Zieht man von irgend einem Punkte P_1 die Gerade, welche 22′ und 33′ in P_2 und P_3 trifft, dann von P_3 die Gerade, welche 44′ und 55′ in P_4 und P_5 trifft, ferner die Gerade von P_5 aus, welche 66′ und 77′ in P_6 und P_7 schneidet, so führt stets die von P_7 ausgehende Gerade, welche 88′ und 11′ schneidet, wiederum auf den ursprünglichen Punkt P_1.

Beispiel.



Figur 3.

Als einfachstes Beispiel ist in Figur 3 ein dreifach symmetrischer „windschiefer Würfel“ gezeichnet: Die Eckpunkte desselben sind die Ecken eines regulären Tetraeders und die Endpunkte gleichlanger Lote, welche auf den Seitenebenen des Tetraeders in den Schwerpunkten der Seitendreiecke alle nach außen oder alle nach innen angetragen sind. Die zwölf Kanten sind die Verbindungslinien der Endpunkte der Lote mit den Ecken der zugehörigen Tetraederseitendreiecke. Sämtliche Kanten des windschiefen Würfels sind gleichlang. Wenn man die Kanten halbiert und die Halbierungspunkte der Gegenseiten in den windschiefen Vierseiten durch gerade Linien miteinander verbindet, so erhält man einen besonders einfachen Fall der in Figur 2 dargestellten Anordnung. Der Schließungssatz wird in diesem Falle trivial. Sämtliche Regelflächen sind Paraboloide. Die drei willkürlichen Reihen der Knotenpunkte mögen so angenommen sein, daß die Knotenpunkte in gleichen Abständen aufeinander folgen. Da alle Regelflächen Paraboloide sind, gilt diese Eigenschaft dann auch für die Knotenpunkte auf allen Geraden überhaupt. Die dreifach symmetrische Konfiguration hat den Schwerpunkt M des windschiefen Würfels als Mittelpunkt. Die vier von M ausgehenden Raumdiagonalen des Würfelgefüges sind aus Symmetriegründen geradlinig. Sie sind in der Figur punktiert, während die geradlinigen Kanten ausgezogen sind. Die Knotenpunkte sind durch kleine Kugeln hervorgehoben.

Unser Beispiel unterscheidet sich von dem allgemeinen Fall besonders dadurch, daß die Regelflächen 2. Grades aller drei Systeme eine gemeinsame Tangentialebene, nämlich die unendlich ferne Ebene, besitzen. Die in dem Gestänge enthaltenen Paraboloide eines jeden der drei Systeme haben jeweils die nämliche Hauptaxe und sind projektiv so aufeinander bezogen, daß sie je einen Punkt, nämlich den unendlich fernen Punkt ihrer Hauptachse entsprechend gemeinsam haben. Die drei konfokalen Strahlensysteme sind wie im allgemeinen Falle von der 2. Klasse, dagegen nur von der 5. Ordnung, weil jedesmal in dem sich selbst entsprechenden Punkte ein Strahlenbündel ausgesondert wird[1]).

Zu dem angegebenen Beispiel gehört eine merkwürdige räumliche Konfiguration von Kegelschnitten:

Auf den Paraboloiden entstehen nämlich durch die Erzeugenden der Geradenanordnung Vierecksnetze, welche als Diagonalkurven je zwei Systeme von Parabeln haben, die jeweils parallele Achsen besitzen und in parallelen Ebenen liegen. In jedem Knotenpunkt der Geradenanordnung treffen sechs solche Parabeln zusammen. Dadurch entsteht eine räumliche Konfiguration von Parabeln derart, daß sich jeweils sechs von ihnen in einem Punkte schneiden und daß andere Schnittpunkte im Endlichen nicht vorhanden sind.

§ 2.

Grundlegende Eigenschaften und lineare Erzeugungsweise der Geradenanordnungen mit je vier sich schneidenden Geraden.

Die Gestänge mit je drei sich schneidenden Geraden führen, wie wir gesehen haben, unmittelbar auf die Raumeinteilungen durch die drei Systeme von Regelflächen 2. Ordnung, die zu drei konfokalen Kongruenzen (6,2) gehören. Das grundsätzlich Neue gegenüber den Untersuchungen von Sturm und Reye liegt in der Erkenntnis, daß bei jedem beliebigen zerschränkten Würfelgefüge mit geradlinigen Kanten stets alle Geraden in drei konfokalen

[1]) Vgl. Th. Reye, Geometrie der Lage III. Teil, 1892, p. 53.

Kongruenzen (6,2) enthalten sind. Diese Tatsache ist in ähnlichem Sinne neu, wie die Existenz der von Geraden gebildeten ebenen Dreiecksnetze früher in der Theorie der Kurven 3. Klasse nicht bemerkt worden war.

Wesentlich verwickelter als bei den Gestängen mit je drei sich schneidenden Geraden liegen die Verhältnisse bei den Geradenanordnungen, welche durch die Zerschränkung der vier Systeme von Hauptdiagonalen eines regulären Würfelgefüges entstehen und bei welchen durch jeden Knotenpunkt vier Gerade hindurchgehen. Erst dieser Fall bietet ein sinnvolles Analogon zu den ebenen Dreiecksnetzen, weil diese Anordnungen, ähnlich wie es bei den ebenen Dreiecksnetzen der Fall ist, abgesehen von einer endlichen Anzahl beliebig zu wählender Anfangsbedingungen keine weiteren Willkürlichkeiten zulassen.

Schon bevor wir die Existenz und die Erzeugungsweise der zu untersuchenden Geradenanordnungen klargestellt haben, können wir eine grundlegende Eigenschaft der Gestänge leicht einsehen:

Wenn wir im regulären Falle ein Parallelstrahlenbündel der Würfeldiagonalen wegnehmen, so bleiben noch drei Geradenbündel von Würfeldiagonalen übrig, welche ein Gestänge bilden mit je drei sich schneidenden Geraden. Ebenso können wir im allgemeinen Falle der zerschränkten Gestänge mit je vier sich schneidenden Geraden auf viererlei Weise eine Anzahl von Geraden so aussondern, daß eine Geradenanordnung übrig bleibt, bei der von jedem Knotenpunkt nur noch drei Gerade ausgehen. Daraus folgt dann unmittelbar, daß die gesuchte Geradenanordnung ein Sonderfall der in § 1 behandelten Gestänge ist, welche aus drei konfokalen Kongruenzen (6,2) herausgegriffen sind. Die gesuchten Geradenanordnungen erscheinen in diesem Zusammenhange als zerschränkte Würfelgefüge, bei denen die drei Systeme der Kanten und ein System der Würfeldiagonalen geradlinig sind. Über die bei den Gestängen mit je drei sich schneidenden Geraden zulässigen Willkürlichkeiten muß also so verfügt werden, daß das eine System der Würfeldiagonalen geradlinig wird. Es wird sich herausstellen, daß diese Forderung nur erfüllt werden kann, wenn die konfokalen Kongruenzen, denen die Geraden entnommen sind, durch Absonderung von mehreren Bündeln sich mindestens auf die 4. Ordnung reduzieren.

Wir können unserer Forderung noch folgende Formulierung geben:

Bei einer Geradenanordnung mit je drei sich schneidenden Geraden kann jede Gerade auf zweierlei Weise längs anderer Geraden des Gestänges so geführt werden, daß sie eine Regelschar 2. Grades beschreibt. Wenn dagegen von jedem Knotenpunkt vier Gerade ausgehen, so gibt es für jede Gerade drei Möglichkeiten, sie längs anderer Geraden des Gestänges so hingleiten zu lassen, daß sie eine Regelschar 2. Grades erzeugt. Nun läßt sich aber aus der Theorie der algebraischen Strahlensysteme zeigen (vgl. S. 141, Fußnote 1), daß nur dann, wenn eine Kongruenz (6,2) durch Absonderung von Strahlenbündeln sich mindestens auf den 4. Grad, also mindestens auf eine Kongruenz (4,2) reduziert, die Strahlen dieser Kongruenz in mehr als in zwei Systemen von Regelscharen 2. Ordnung zusammengefaßt werden können. Die zu den Regelscharen gehörenden Leitscharen bilden zu dem ursprünglichen Strahlensystem konfokale Kongruenzen:

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 3: Jede Geradenanordnung, welche durch Zerschränkung der vier Systeme von Hauptdiagonalen eines regulären Würfelgefüges entsteht und bei der demnach in jedem Knotenpunkt vier und nur vier Gerade zusammentreffen, läßt sich herausgreifen aus vier konfokalen Strahlensystemen (4,2) oder Ausartungen dieser Strahlensysteme, in dem nämlichen Sinne, wie jedes Gestänge mit je drei sich schneidenden Geraden in drei konfokalen Kongruenzen (6,2) enthalten ist.

In Satz 3 ist festgestellt, daß die gesuchten Geradenanordnungen, wenn sie überhaupt existieren, stets aus vier konfokalen Kongruenzen (4,2) herausgegriffen sind. Unsere nächste Aufgabe ist es jetzt, festzustellen, daß die gesuchten Gestänge wirklich vorhanden sind. Wir werden zu diesem Zwecke beweisen, daß in irgend welchen vier konfokalen Kongruenzen (4,2) stets zerschränkte Geradenanordnungen der verlangten Art enthalten sind, und wir werden zeigen, wie diese Geradenanordnungen durch lineare Konstruktionen erzeugt werden können.

Wir schicken einige Bemerkungen aus der Theorie der Strahlensysteme voraus:

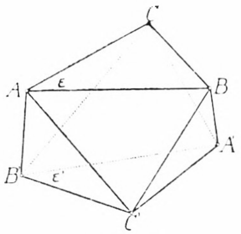
Wenn zwei Flächen 2. Grades kollinear aufeinander bezogen sind, so bilden die Verbindungslinien entsprechender Punkte ein Strahlensystem (6,2). Dieses Strahlensystem artet in zwei Strahlenbündel und ein Strahlensystem (4,2) aus, wenn die projektiven Flächen 2. Ordnung zwei Punkte entsprechend gemeinsam haben. Die Strahlen einer jeden auf diese Weise definierten Kongruenz können in drei Systemen von Regelscharen angeordnet werden, die zugehörigen Systeme der Leitscharen bilden dann drei weitere Kongruenzen (4,2), welche zu der ursprünglichen Kongruenz konfokal sind. Die gemeinsame Brennfläche, zu der noch eine Restkongruenz 6. Ordnung 4. Klasse gehört, ist von der 8. Ordnung und 4. Klasse und hat vierzehn Doppelberührungsebenen. Sechs von diesen Ebenen sind für alle vier Kongruenzen (4,2) singulär vom 2. Grade, während je zwei der übrigen acht Ebenen für eine Kongruenz vom 3. Grade und für die drei anderen Kongruenzen vom 1. Grade singulär sind. Die letztgenannten acht singulären Ebenen bilden ein Oktaeder mit windschiefen Gegenkanten, während die sechs singulären Ebenen 2. Grades zu je zweien durch je zwei Gegenecken des windschiefen Oktaeders hindurchgehen. Die Konfiguration der singulären Ebenen ist auf diese Weise sehr anschaulich dargestellt gegenüber den sehr wenig übersichtlichen Verhältnissen bei den dualen Strahlensystemen (2,4), wie sie bei Sturm[1]) behandelt sind.

Wir werden nun weiter sehen, daß wir, ausgehend vom Oktaeder der singulären Ebenen 1. und 3. Grades durch einfache lineare Konstruktionen die vier konfokalen Strahlensysteme (4,2) gleichzeitig gewinnen können, und zwar gerade in der Anordnung, daß sie Gestänge mit je vier sich schneidenden Geraden bilden. Die gesuchten Gestänge erscheinen in diesem Zusammenhange als die naturgemäße Anordnung und Zusammenfassung der vier konfokalen Kongruenzen.

In Figur 4 ist das Oktaeder der singulären Ebenen 1. und 3. Grades von vier konfokalen Kongruenzen (4,2) dargestellt. A, A'; B, B'; C, C' sind die drei Paare von Gegenecken. Wir

[1]) R. Sturm, Liniengeometrie II. Teil, 1893, p. 246 ff.

betrachten nun zwei Gegenebenen, beispielsweise ABC und $A'B'C'$, die wir kurz mit ε und ε' bezeichnen wollen. Sie sind für das eine der vier konfokalen Strahlensysteme Σ_1 singulär vom 3. Grade, während sie für die drei weiteren Strahlensysteme Σ_2, Σ_3, Σ_4 vom 1. Grade singulär sind.



Figur 4.

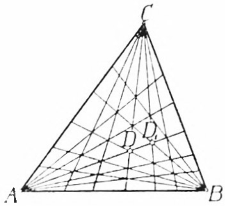
Durch die Strahlen von Σ_1 werden die Ebenen ε und ε' in einer Cremonaschen Verwandtschaft 2. Grades ein-eindeutig aufeinander abgebildet, wobei A, B, C und A', B', C' die Ausnahmepunkte in den beiden Ebenen sind und wobei ε und ε' keinen Punkt entsprechend gemeinsam haben, wenn es sich um eine Kongruenz (4,2) handelt: Jeder Geraden in ε entspricht ein Kegelschnitt durch A', B', C' und jeder Geraden von ε' ein Kegelschnitt durch A, B, C. Das Bild einer Geraden durch einen Ausnahmepunkt ist ein zerfallender Kegelschnitt. So ist beispielsweise einer Geraden in ε durch A zugeordnet eine Gerade in ε' durch A' und dazu noch stets die ganze Gerade $B'C'$. Das Strahlenbüschel in ε mit dem Mittelpunkt A geht durch die Cremonasche Abbildung über in ein Strahlenbüschel in ε' mit dem Scheitel A' und in die feste Gerade $B'C'$. Die beiden einander entsprechenden Strahlenbüschel sind gegenseitig projektiv bezogen, wobei insbesondere AC und $A'B'$ und ebenso AB und $A'C'$ homologe Elemente sind. In ähnlicher Weise entsprechen die Strahlenbüschel mit den Scheiteln B und C projektiven Büscheln mit den Scheiteln B' und C'.

Was wir für die Ebenen ε und ε' und das Strahlensystem Σ_1 auseinander gesetzt haben, gilt natürlich in analoger Weise für die drei anderen Paare von Gegenebenen des Oktaeders und die Strahlensysteme Σ_2, Σ_3, Σ_4.

Der nun schließlich zum Ziele führende Gedanke liegt darin, daß wir die Cremonasche Verwandtschaft 2. Grades zwischen den Ebenen ε und ε' in anschaulichen Zusammenhang bringen mit einem speziellen ausgearteten Typus von ebenen Dreiecksnetzen, der in einer früheren Arbeit [1]) von uns diskutiert wurde:

[1]) H. Graf und R. Sauer, Über dreifache Geradensysteme usw., Sitzgsber. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-nat. Abt., 1924, p. 119 f., insbesondere p. 148, 151.

Durch die drei Strahlenbüschel in der Ebene ε mit den Scheiteln A, B, C soll ein Dreiecksnetz gebildet werden (Figur 5). Dabei kann ein beliebiger Punkt D als Anfangsknotenpunkt gewählt werden und außerdem läßt sich noch über die erste Maschenweite DD_1 beliebig verfügen. Im übrigen ist das Netz dann zwangsläufig bestimmt und kann durch lineare Konstruktionen schrittweise erzeugt werden. Dreiecksnetze dieser Art sind die nächstliegende Verallgemeinerung der von gleichseitigen Dreiecken gebildeten Netze und deren kollinearen Umformungen. Bei diesen nämlich artet die umhüllende Kurve 3. Klasse in drei Punkte aus, die in gerader Linie liegen, während bei den hier in Rede stehenden allgemeineren Dreiecksnetzen die umhüllende Kurve 3. Klasse in drei beliebige Punkte zerfällt, welche ein Dreieck bilden. Die Seiten des Dreiecks sind Häufungslinien des Dreiecksnetzes, d. h. das Netz kann nicht durch eine endliche Anzahl von geraden Linien zum Abschluß gebracht werden, sondern bei beliebiger Fortsetzung des Erzeugungsprozesses werden die einzelnen Netzdreiecke immer flacher und die netzbildenden geraden Linien nähern sich mehr und mehr den Dreiecksseiten als Grenzlagen. Durch die drei Häufungslinien wird die Ebene in vier gleichberechtigte Gebiete zerlegt. Jedes derselben kann bis auf eine beliebig schmale Umgebung der Häufungslinien von dem Dreiecksnetz ausgefüllt werden. In Figur 8 ist das Dreiecksnetz nur im Inneren des von den Häufungslinien gebildeten Dreiecks dargestellt. Wie alle vier Gebiete der Ebene von einem einzigen Dreiecksnetz überzogen sind, ist aus unserer schon vorher erwähnten Arbeit, S. 148, Abbildung VIII, zu ersehen.



Figur 5.

Wir denken uns nun die Ebene ε mit einem von den Strahlenbüscheln mit den Scheiteln A, B, C erzeugten Dreiecksnetz überdeckt und übertragen das Dreiecksnetz kollinear auf die Ebene ε'. Bei dieser projektiven Beziehung entsprechen die Punkte A, B, C den Punkten A', B', C' und schließlich soll noch dem Anfangsknotenpunkte D derjenige Punkt D' zugeordnet werden, welcher mit D auf dem nämlichen Kongruenzstrahl von Σ_1 liegt.

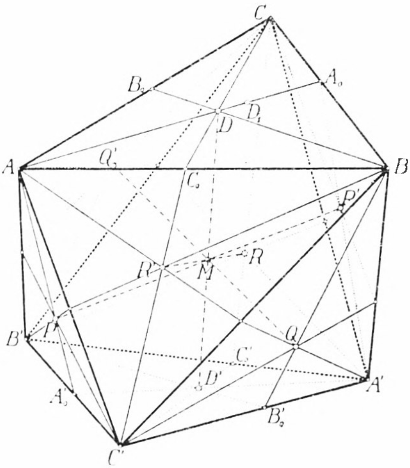
Durch die beiden zueinander kollinearen Dreiecksnetze in ε

und ε' werden diese Ebenen in sehr anschaulicher Weise noch auf eine weitere und zwar nicht mehr kollineare Art aufeinander abgebildet. Wir beziehen nämlich die Netzknotenpunkte aufeinander in der Weise, daß wieder die Punkte D und D' einander entsprechen und daß wiederum die drei in D zusammentreffenden Knotenpunktreihen den drei von D' ausgehenden Knotenpunktreihen zugeordnet werden. Aber die Knotenpunktreihen sollen jetzt von D' aus in entgegengesetztem Sinne, d. h. in der Richtung von A' bezw. B' oder C' weg durchlaufen werden, wenn die entsprechenden Knotenpunktreihen von D aus in der Richtung nach A bzw. B oder C hin durchlaufen werden. Die Zuordnung der Ebenen ε, ε' ist dann, wie man leicht einsieht, gerade die Cremonasche Verwandtschaft 2. Grades, die vorher besprochen wurde. Wenn man also sämtliche in dieser Cremonaschen Verwandtschaft einander entsprechenden Knotenpunkte der beiden Dreiecksnetze in ε und ε' miteinander verbindet, so erhält man eine diskrete Auswahl von Strahlen aus der Kongruenz (4,2) Σ_1. Durch fortgesetzte Unterteilung der beiden Dreiecksnetze kann die Auswahl der Kongruenzstrahlen sukzessive enger gemacht werden.

Ebenso wie man die Ebenen ε und ε' mit Dreiecksnetzen überdecken kann und dadurch in der angegebenen Weise eine diskrete Auswahl von Strahlen der Kongruenz Σ_1 gewinnt, können auch die übrigen drei Paare von Gegenebenen des Oktaeders der singulären Ebenen 1. und 3. Grades mit Dreiecksnetzen so überzogen werden, daß sich eine diskrete Aufeinanderfolge von Strahlen aus den drei konfokalen Systemen Σ_2, Σ_3, Σ_4 ergibt. Wir werden nun zum gestellten Ziele gelangen, wenn wir zeigen, daß die vier Paare von Dreiecksnetzen so aufeinander abgestimmt werden können, daß die vier zugehörigen diskreten Strahlenmannigfaltigkeiten aus den Kongruenzen Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 jeweils vier Strahlen durch feste Knotenpunkte senden und damit ein Gestänge der verlangten Art erzeugen.

Zu diesem Zwecke geben wir jetzt im Anschluß an die vorangehenden Überlegungen eine lineare Erzeugungsweise an, welche von einer passenden Aneinanderreihung von Dreiecksnetzen der vorher beschriebenen Art in den acht Ebenen eines beliebigen windschiefen Oktaeders ausgeht und schließlich auf die gesuchten Geradengefüge führt.

Wir nehmen irgend welche sechs Punkte A, B, C, A', B', C' in beliebiger Lage an (Figur 6) und zeichnen das Oktaeder ABC $A'B'C'$, so daß A, A'; B, B'; C, C' die drei Paare von Gegenecken sind. In der Ebene des Dreiecks ABC wird ein Punkt D und in der Ebene des Dreiecks $A'B'C'$ ein Punkt D' willkürlich angenommen. In den Ebenen ε bzw. ε' zieht man durch D bzw. D' jeweils die drei Eckpunkttransversalen der Dreicke ABC bzw. $A'B'C'$. Die Schnittpunkte der Transversalen mit den Seiten der beiden Dreiecke werden mit den Oktaedergegenecken verbunden. Dadurch ergeben sich die Geraden AA_0', BB_0', CC_0'; $A'A_0$, $B'B_0$, $C'C_0$. Auf einer dieser sechs Verbindungsgeraden, beispielsweise auf AA_0', soll ein Punkt P beliebig angenommen und durch ihn das noch fehlende Eckpunkttransversalenpaar des Dreiecks $AB'C'$ gezogen werden. Ebenso werde in jedem der übrigen fünf Seitendreiecke des Oktaeders noch je ein Eckpunkttransversalenpaar so gezeichnet, daß dessen Schnittpunkt auf eine der vorerwähnten Verbindungsgeraden BB_0', . . . zu liegen kommt. Dabei wird insbesondere verlangt, daß auf jeder der Oktaederkanten die beiden Transversalen, welche benachbarten Seitendreiecken angehören, in dem nämlichen Punkt zusammentreffen. Daß diese Forderung für sämtliche Oktaederseitendreiecke durchgängig in eindeutiger Weise erfüllbar ist, daß also, wenn einmal P fest angenommen wurde, keine weitere Willkürlichkeit eintritt, läßt sich mit Hilfe des Satzes von Ceva unschwer zeigen.



Figur 6.

Die in gegenüberliegenden Oktaederebenen liegenden Schnittpunkte der Transversalentripel sind in der Figur mit D, D'; P, P'; Q, Q'; R, R' bezeichnet und durch strichpunktierte Linien verbunden.

Wir greifen irgend zwei von diesen vier Linien heraus, etwa DD' und PP': Durch AA_0', DD', A_0A' ist eine Regelschar

2. Grades definiert. AA_0 und $A_0'A'$ gehören zu der Leitschar derselben. Daß auch PP' eine Leitgerade der Regelschar ist, kann man wieder mit Hilfe des Satzes von Ceva und außerdem mittels des Brianchonschen Satzes einsehen; es handelt sich lediglich darum, zu beweisen, daß $D'P$ und DP' sich auf der Verbindungslinie der Gegenpunkte AA' schneiden. Da DD' und PP' als Erzeugende ungleicher Art zur nämlichen Regelfläche 2. Grades gehören, müssen sie einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen. Dasselbe gilt aus analogen Gründen für irgend zwei andere der Geraden DD', PP', QQ', RR'. Da nun nicht alle diese vier Gerade in der nämlichen Ebene liegen, müssen sie notwendig durch einen gemeinsamen Punkt M hindurchgehen.

(*Zusatz*: Ein trivialer, aber immerhin bemerkenswerter Sonderfall des eben entwickelten Schließungs- und Schnittpunktsatzes ist folgende Behauptung:

Die vier Verbindungslinien der Schwerpunkte der gegenüberliegenden Seitendreiecke eines Oktaeders mit windschiefen Gegenkanten schneiden sich stets in einem gemeinsamen Punkte.)

Durch den Punkt M gehen nun also vier gerade Linien. Wir können den Punkt M als Anfangsknotenpunkt einer Geradenanordnung mit je vier sich schneidenden Geraden auffassen und wir werden sogleich sehen, daß das ganze Gestänge bis auf einen willkürlichen Parameter, welcher die „Maschenweite" repräsentiert, bereits eindeutig festgelegt ist: Wir nehmen auf AD einen Punkt D_1 als Knotenpunkt beliebig an. Dadurch ist in der Ebene ABC ein Dreiecksnetz eindeutig definiert, das von den drei Strahlenbüscheln mit den Scheiteln A, B, C gebildet wird (vgl. Figur 5). Indem wir die Schnittpunkte dieses Netzes auf den Seiten AB, BC, CA mit C', A', B' verbinden werden auch in den Ebenen $C'AB$, $A'BC$, $B'CA$ derartige Dreiecksnetze bestimmt. So können wir der Reihe nach alle acht Seitenebenen des Oktaeders mit Dreiecksnetzen überziehen. Durch Annahme des Punktes D_1 sind alle diese Netze der Reihe nach zwangsläufig fixiert. Daß alle Geraden der Netze in benachbarten Oktaederseitenebenen die gemeinsame Oktaederkante in den nämlichen Punkten treffen, folgt aus der Tatsache, daß die sämtlichen Dreiecksnetze zueinander kollinear sind.

Durch die Dreiecksnetze werden die vier Paare von gegenüberliegenden Oktaederebenen durch Cremonasche Verwandtschaften 2. Grades aufeinander bezogen, so wie wir es weiter vorne (S. 152) auseinander gesetzt haben. Verbindet man alle in den Cremonaschen Verwandtschaften einander entsprechenden Netzknotenpunkte in den gegenüberliegenden Ebenen durch gerade Linien, so bekommt man vier diskrete Strahlengefüge aus vier Kongruenzen (4,2). Daß dabei immer je vier Strahlen aus diesen Mannigfaltigkeiten sich in einem Punkt schneiden, folgt in der nämlichen Weise wie die Tatsache, daß die vier Geraden DD', PP', QQ', RR' einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen.

So bilden also die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte der gegenüberliegenden Dreiecksnetze eine Geradenanordnung der gesuchten Art, bei der in jedem Knotenpunkt vier und nur vier Gerade zusammentreffen. Damit ist unsere hauptsächlichste Aufgabe gelöst. Das erzeugte Geradengestänge ist gemäß unseren vorangehenden Betrachtungen aus vier konfokalen Kongruenzen (4,2) herausgegriffen, welche die acht Ebenen des zugrunde gelegten Oktaeders zu singulären Ebenen 1. und 3. Grades haben.

Es liegt auf der Hand, daß durch passende Annahme der Punkte A, B, C, D; A', B', C' D' irgend welche beliebigen vier konfokalen Kongruenzen (4,2) auf die angegebene Weise erzeugt werden können. Dabei ist zu beachten, daß von irgend einem Punkte je vier Strahlen von jeder der vier konfokalen Kongruenzen (4,2) ausgehen, während unsere Gestänge zunächst nur jeweils einen Strahl ergeben. Es existieren also insgesamt $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ Möglichkeiten, aus vier gegebenen konfokalen Kongruenzen (4,2) Geradengestänge mit je vier sich schneidenden Geraden herauszugreifen. Im übrigen kann dann noch über den Anfangsknotenpunkt und die erste „Maschenweite" beliebig verfügt werden.

Wir fassen die Ergebnisse in folgendem Satze zusammen:

Satz 4: Jede Kongruenz (4,2) kann zugleich mit den drei zu ihr konkokalen Kongruenzen (4,2) durch lineare Konstruktionen erzeugt werden und zwar derart, daß je vier Gerade der vier Kongruenzen sich in einem Knotenpunkte schneiden. Es gibt 256 verschiedene Möglichkeiten, aus vier gegebenen konfokalen Kongruenzen (4,2) Geradengestänge der erwähnten Art herauszugreifen. Dabei kann jedesmal der Anfangsknotenpunkt und die erste Maschenweite willkürlich gewählt werden. Im übrigen ist die Geradenanordnung dann eindeutig bestimmt. Auf diese Weise entsteht die allgemeinste mögliche Zerschränkung der vier Systeme der Hauptdiagonalen eines regulären Würfelgefüges, bei der die Würfelkanten krummlinig werden. Die Eigenschaft, Geradenanordnungen in sich zu enthalten, bei denen in jedem Knotenpunkt vier und nur vier Gerade sich schneiden, ist also für die Strahlensysteme (4,2) charakteristisch. Die genannten Geradenanordnungen erscheinen in diesem Zusammenhange als die naturgemäße Anordnung der Strahlen von vier konfokalen Kongruenzen (4,2).

§ 3.

Folgerungen aus der linearen Erzeugungsweise der Geradenanordnungen mit je vier sich schneidenden Geraden.

Im vorangehenden Paragraphen haben wir erkannt, daß die allgemeinste Zerschränkung des Gestänges der vier Systeme von Hauptdiagonalen eines regulären Würfelgefüges stets so vor sich gehen muß, daß sämtliche Diagonalen vier konfokalen Kongruenzen (4,2) entnommen sind. Umgekehrt wurde festgestellt, daß aus irgend welchen vier vorgegebenen konfokalen Kongruenzen (4,2) stets Gestänge der verlangten Art herausgegriffen werden können.

Ausgehend von der linearen Erzeugungsweise sollen jetzt die wesentlichsten Eigenschaften der Geradenanordnungen und der zugehörigen zerschränkten Würfelgefüge erörtert werden.

Die singulären Ebenen als Häufungsebenen und die Brennfläche als Umhüllende des Gestänges.

Die acht singulären Ebenen 1. bzw. 3. Grades, welche zu den vier konfokalen Kongruenzen (4,2) gehören, denen das Gestänge entnommen ist, werden durch das Gestänge anschaulich gemacht; denn jede der acht Ebenen, welche das der Erzeugungsweise der Gestänge zugrunde gelegte Oktaeder bilden, trägt Strahlenbüschel des Gestänges aus drei von den Kongruenzen und erweist sich dadurch als singulär vom 1. Grade für diese drei Strahlensysteme. Dagegen wird durch das Gestänge nicht unmittelbar deutlich gemacht, daß die betreffenden Ebenen gleichzeitig für das vierte Strahlensystem vom 3. Grade singulär sind.

Die sechs singulären Ebenen 2. Grades werden im allgemeinen durch das Gestänge nicht zur Anschauung gebracht, sondern werden nur dann ersichtlich, wenn über die willkürlichen Anfangsbedingungen bei der Erzeugungsweise passend verfügt wird. In diesem Falle tragen die sechs singulären Ebenen 2. Grades Mannigfaltigkeiten von Strahlen des Gestänges, welche Kegelschnitte umhüllen. Längs dieser Kegelschnitte wird von den singulären Ebenen die Brennfläche der Strahlensysteme berührt.

Auch die Brennfläche 8. Ordnung 4. Klasse (vgl. S. 151) hat für das Gestänge eine sehr anschauliche Bedeutung. Sie ist nämlich die Umhüllende der Geradenanordnung in ähnlichem Sinne, wie die ebenen Dreiecksnetze von Kurven 3. Klasse umhüllt werden. Wenn man das Würfelgefüge betrachtet, dessen Diagonalen das vorliegende Gestänge bilden, und nach der angegebenen Erzeugungsweise das Gestänge weiter und weiter fortsetzt, so werden die „Würfel" immer flacher, wenn man in die Umgebung der Brennfläche gelangt und klappen, wenn das Würfelgefüge unendlich engmaschig angenommen wird, auf der Brennfläche selbst in Flächenelemente derselben zusammen. Bei weiterer Fortsetzung des Erzeugungsprozesses tritt dann ein Umschlagen an der Brennfläche ein. Auf diese Weise kommt ähnlich wie bei den ebenen Dreiecksnetzen eine mehrfache, im allgemeinen unendlich vielfache Ausfüllung des Raumes durch die Geradenanordnungen zustande. Bei hinreichender Weiterführung des Prozesses treten auch die 256 auf S. 157 besprochenen Auswahlmöglichkeiten in Erscheinung. Der ganze Raum wird durch die Brennfläche in solche Gebiete zerlegt, in denen reelle Geradenanordnungen vorhanden sind und in solche Bereiche, in denen Paare von Doppeltangenten der Brennfläche imaginär sind und in denen daher aus reellen Geraden kein Gestänge gebildet werden kann.

Die Brennfläche als Umhüllende des von ihren Doppeltangenten gebildeten Gestänges steht, wie wir gesehen haben, zu den die ebenen Dreiecksnetze begrenzenden ebenen Kurven 3. Klasse in deutlicher Analogie. Außerdem spielen die acht singulären Ebenen 1. Grades für das Gestänge die nämliche Rolle wie die Häufungslinien für die ausgearteten Dreiecksnetze: Es gibt bekanntlich[1]) Dreiecksnetze, welche nicht durch eine endliche Anzahl von Geraden zum Abschluß gebracht werden können, und bei denen die einzelnen Dreiecke sich in der Umgebung gewisser Linien häufen. Von dieser Art sind nur solche Dreiecksnetze, bei denen die umhüllende Kurve 3. Klasse rational ist oder zerfällt. Die Doppeltangenten dieser rationalen oder zerfallenden Kurven sind dann stets Häufungslinien des Netzes. Als Beispiel verweisen wir auf das in § 2 erwähnte Netz (vgl. S. 153), dessen Umhüllende in drei Punkte zerfällt. Die anderen Typen der Dreiecksnetze mit Häufungslinien sind in unserer schon mehrfach zitierten Arbeit besprochen. Die nämliche Rolle nun, welche für die Dreiecksnetze die Doppeltangenten der umhüllenden Kurve 3. Klasse spielen, wird bei unseren Gestängen vertreten von den acht singulären Ebenen 1. Grades der umhüllenden Brennfläche. In der Tat zeigt die Erzeugungsweise unmittelbar, daß die Gestänge nicht durch eine endliche Anzahl von Strahlen zum Abschluß gebracht werden, sondern daß vielmehr die Geraden sich schließlich in der Umgebung der acht singulären Ebenen 1. Grades häufen, ebenso wie die in den singulären Ebenen liegenden, die Cremonaschen Verwandtschaften repräsentierenden Dreiecksnetze jeweils drei Oktaederkanten zu Häufungslinien haben.

Das gesamte Raumgebiet, innerhalb dessen das Gestänge reell vorhanden ist, wird durch die acht Häufungsebenen in Einzelbereiche zerlegt, entsprechend wie die Dreiecksnetze in den Oktaederebenen durch die Oktaederkanten als Häufungslinien in jeweils vier Gebiete getrennt werden. Um alle Einzelgebiete des Gestänges aus der in § 2 auseinandergesetzten Erzeugungsweise zu gewinnen, ist es nötig, daß wir bei den Dreiecksnetzen in den Oktaederseitenebenen jeweils alle vier Gebiete berücksichtigen, wie dies in Figur VIII des schon mehrfach zitierten Akademieberichts (1924,

[1]) H. Graf und R. Sauer, Über dreifache Geradensysteme usw., Sitzgsb. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-na. Atbtg., 1924, p. 151 ff., I, II, VIII, X, XI.

S. 148) ersichtlich ist. Statt das Innere der gegenüberliegenden Dreiecke des Häufungsoktaeders (Figur 6) bei der Cremonaschen Verwandtschaft aufeinander zu beziehen, kann man auch das Innere des Dreiecks ABC abbilden in einen der drei äußeren Bereiche, welche von den Häufungslinien $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ in der Ebene ε' gebildet werden. Dabei bleiben die allgemeinen Überlegungen hinsichtlich der Erzeugungsweise unverändert bestehen; jedoch durchdringen die einzelnen Gebiete des Gestänges sich dann gegenseitig und werden nicht mehr so anschaulich wie bisher durch die Häufungsebenen voneinander getrennt.

Besonders bemerkenswert an den vorangehenden Ausführungen ist der innige Zusammenhang, welcher zwischen den allgemeinsten Gestängen mit je vier sich schneidenden Geraden besteht und dem ganz speziellen Typus der ebenen Dreiecksnetze, die von drei Geradenbüscheln gebildet werden. Obwohl also das räumliche Problem der Geradenanordnungen mit je vier sich schneidenden Geraden zunächst wesentlich schwieriger scheint als das Problem der ebenen Geradenanordnungen mit je drei sich schneidenden Geraden, stellt sich schließlich doch heraus, daß die räumlichen Geradengefüge grundsätzlich einfacheren Charakter haben und nur zu einem ganz speziellen ausgearteten Typus der ebenen Dreiecksnetze ein Analogon darstellen. Der Grund hierfür liegt darin, daß die umhüllende Fläche der räumlichen Geradengestänge stets acht singuläre Ebenen besitzt, welche Häufungsebenen für das Gestänge sind, während die allgemeinen ebenen Dreiecksnetze von einer singularitätenfreien Kurve 3. Klasse umhüllt werden und keine Häufungslinien besitzen. Der innige Zusammenhang zwischen den speziellen Dreiecksnetzen, deren Umhüllende in drei Punkte zerfällt, und den allgemeinen räumlichen Gestängen kommt am deutlichsten in der Erzeugungsweise, wie sie in § 2 gegeben ist, zum Ausdruck; denn die gegenüberliegenden singulären Ebenen 1. Grades müssen durch eine Cremonasche quadratische Verwandtschaft aufeinander bezogen werden und diese Abbildung wird nun gerade durch einen speziellen Typus von ebenen Dreiecksnetzen repräsentiert, nicht aber durch allgemeine Dreiecksnetze.

Bisher haben wir die Häufungsebenen sämtlich reell angenommen; sie können natürlich auch imaginär sein, wenn nämlich unter den Ausnahmepunkten der Cremonaschen Verwandtschaften konjugiert imaginäre Punkte sich befinden. In diesem Falle ist die in § 2 angegebene Erzeugungsweise nicht unmittelbar anwendbar. Wie wir dann zu anderen praktisch brauchbaren Konstruktionen der Gestänge gelangen, werden die Ausführungen des nächsten Paragraphen zeigen. Bei imaginären Häufungsebenen tritt im reellen Bereich keine Häufung der Geraden des Gestänges zu Tage und daher kann das Gestänge bei passender Wahl der Anfangsbedingungen aus einer endlichen Anzahl von Geraden aufgebaut werden. Es handelt sich dann um einen ähnlichen Fall wie beispielsweise bei dem ebenen Dreiecksnetz, das von den Durchmessern und Tangenten eines Kreises gebildet wird[1]) und die imaginären Asymptoten des Kreises zu Häufungslinien hat (vgl. S. 187, Figur 14). Durch die erläuternden Beispiele der folgenden Paragraphen werden diese Verhältnisse noch näher beleuchtet werden:

Zusammenfassend stellen wir fest:

Satz 5: Ein Gestänge mit je vier sich schneidenden Geraden hat als Umhüllende die Brennfläche der vier konfokalen Kongruenzen (4,2), aus denen das Gestänge herausgegriffen ist. Diese Brennfläche hat alle Geraden des Gestänges als Doppeltangenten und zerlegt den Raum in solche Gebiete, in denen das Gestänge reell vorhanden ist, und in solche Gebiete, in welchen aus reellen Doppeltangenten ein Gestänge nicht hergestellt werden kann.

Die acht singulären Ebenen 1. Grades sind Häufungsebenen des Gestänges. Nur wenn sämtliche Häufungsebenen imaginär sind, kann das Gestänge durch eine endliche Anzahl von Geraden zum Abschluß gebracht werden.

Die allgemeinen von uns hier betrachteten Gestänge sind grundsätzlich einfacheren Charakters

---

[1]) H. Graf und R. Sauer, Über dreifache Geradensysteme usw., Sitzgsb. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abtlg., 1924, p. 151, IX; ferner: S. Finsterwalder, Mech. Beziehungen bei der Flächendeformation, Jahresber. d. Math.-Vereinigung, 6, 1897.

als die allgemeinen ebenen Dreiecksnetze. Sie stehen in unmittelbarem geometrischen Zusammenhang mit einem ganz speziellen ausgearteten Typus von Dreiecksnetzen, nämlich mit den von drei Strahlenbüscheln gebildeten Netzen.

Die sechs Systeme von Regelflächen 2. Grades, welche in dem Gestänge enthalten sind.

Die Strahlen einer Kongruenz (4,2) können zu drei Systemen von Regelscharen 2. Grades zusammengefaßt werden[1]). Die zugehörigen Systeme der Leitscharen bilden dann die drei konfokalen Kongruenzen (4,2). So ergeben die vier konfokalen Kongruenzen (4,2) zusammen sechs Systeme von Regelflächen 2. Grades, deren beide Scharen von Erzeugenden den Strahlenkongruenzen angehören. Auch diese Zusammenhänge werden durch unsere Geradengestänge in übersichtlicher Weise anschaulich gemacht:

Die sechs Systeme von Regelflächen 2. Grades sind nichts anderes als die schon in der Einleitung besprochenen sechs Systeme von Diagonalflächen des Würfelgefüges, dessen Raumdiagonalen das vorgegebene Gestänge repräsentieren.

Wir nehmen wieder Bezug auf die in § 2 angegebene Erzeugungsweise. Den drei Strahlenbüscheln, welche in den Ebenen ε und ε' Dreiecksnetze bilden, sind die drei Systeme von Regelscharen 2. Grades aus der Kongruenz Σ_1 zugeordnet und in der nämlichen Weise entsprechen die in den Kongruenzen Σ_2, Σ_3, Σ_4 enthaltenen Regelscharen 2. Grades den Strahlenbüscheln in den anderen Oktaederebenen.

Je zwei Systeme von Regelflächen haben ein Paar Gegenecken des Oktaeders gemeinsam.

Die Gesamtheit der sechs Systeme von Regelflächen 2. Grades bringt diejenige Raumeinteilung mit sich, welche in dem natürlichsten Zusammenhange mit dem Gestänge steht und bei der sämtliche Knotenpunkte des Gestänges gleichberechtigt bleiben. Die Regelflächen schneiden sich nämlich zu je sechsen in den Knotenpunkten des Gestänges und durchdringen sich dabei jeweils zu dreien nach vier Geraden des Gestänges und jeweils

[1]) R. Sturm, Liniengeometrie II. Teil, 1893, p. 246 ff.

zu zweien nach drei krummen Linien, die wir bald als Kegelschnitte erkennen werden. Diese Kegelschnitte sind in dem zu dem Gestänge gehörigen zerschränkten Würfelgefüge die Würfelkanten, bzw. die Verbindungskurven der Mittelpunkte benachbarter Würfel.

Die zustande kommende Raumeinteilung besteht aus lauter „Tetraedern“, deren Seitenflächen Regelflächen 2. Grades sind. Je vier Kanten eines Tetraeders sind geradlinig und bilden ein windschiefes Vierseit, die beiden übrigen Kanten des Tetraeders sind Bögen von Kegelschnitten. In jedem der gleichwertigen Knotenpunkte treffen $3 \times 8 = 24$ Tetraeder zusammen. Jede geradlinige Kante ist sechs Tetraedern, jede krummlinige Kante vier Tetraedern gemeinsam. Im Falle des regulären Würfelgefüges geht die hier genannte Raumeinteilung in eine Raumerfüllung durch gewöhnliche ebenflächige, nicht reguläre Tetraeder über, die alle zueinander kongruent sind, und die von sechs Ebenenbüscheln erzeugt werden, nämlich den Diagonalebenen des regulären Würfelgefüges. Bei der Zerschränkung des Gestänges wird gleichzeitig das ebenflächige Tetraedergefüge in der beschriebenen Weise deformiert.

Auf Grund unserer vorangehenden Ausführungen erscheinen die in Rede stehenden Gestänge als die naturgemäße Anordnung der Strahlen aus vier konfokalen Kongruenzen (4,2), indem sie die geradlinigen Kanten der denkbar einfachsten Raumeinteilung darstellen, welche durch die sechs in den Strahlenkongruenzen enthaltenen Systeme von Regelflächen 2. Grades herbeigeführt wird.

(Bemerkung: Indem man je vier Tetraeder, welche eine krummlinige Kante gemeinsam haben, zusammenfaßt, gelangt man zu einer Raumausfüllung durch Achtflächner. Diese können als verallgemeinerte „Oktaeder“ betrachtet werden, welche je acht von zwei Gegenecken ausgehende geradlinige und je vier krummlinige Kanten besitzen.)

Ebenso wie bei den räumlichen Geradenanordnungen mit je drei sich schneidenden Geraden alle Regelflächen eines Systems durch die Geraden des Gestänges projektiv aufeinander bezogen werden, besteht auch bei den Gestängen mit je vier sich schneidenden Geraden zwischen allen Regelflächen 2. Grades eines der sechs Systeme ein kollinearer Zusammenhang. Die Projektivität ist hier aber von besonderer Art:

Alle Regelflächen eines Systems haben zwei Punkte entsprechend gemeinsam. Betrachten wir beispielsweise in Figur 6 die Strahlenbüschel in ε und ε' mit den Scheiteln A und A'. Diese projektiven Strahlenbüschel führen auf ein System von Regelflächen 2. Grades, deren Erzeugende den Strahlensystemen Σ_1 und Σ_2 angehören. Alle Regelflächen des genannten Systems haben die Oktaedergegenecken A und A' gemeinsam. Sie werden sowohl durch die Strahlen von Σ_3 als auch durch die Strahlen von Σ_4 kollinear aufeinander bezogen und bei diesen Kollineationen sind für alle Regelflächen A und A' einander selbst entsprechende Punkte. Alle Bemerkungen gelten natürlich analog für die fünf übrigen Systeme von Regelflächen 2. Grades.

Was nun die diskrete Anordnung der Erzeugenden und der Knotenpunkte auf den einzelnen Regelflächen 2. Grades betrifft, so kann dieselbe unmittelbar auf die Anordnung der Geraden und der Knotenpunkte in den Dreiecksnetzen zurückgeführt werden, welche in den Häufungsebenen des Gestänges liegen.

Die grundlegenden Eigenschaften dieser Dreiecksnetze haben wir bereits auf S. 153 besprochen. Wir fügen hier noch folgende Bemerkungen hinzu, welche sich auf die Anordnung der Knotenpunkte auf den Netzgeraden beziehen:

In Figur 7 ist eine beliebige Netzgerade mit den auf ihr liegenden Knotenpunkten $N_1, N_2, N_3, N_4 \ldots$ dargestellt. A ist ein Eckpunkt des Dreiecks der Häufungslinien, B ist der Schnittpunkt der Netzgeraden mit der A gegenüberliegenden Häufungslinie. Für die Anordnung der Knotenpunkte gilt nun stets die Beziehung

Figur 7.

$$A \,.\,.\, N_1 N_2 N_3 \,.\,.\, B \;\overline{\wedge}\; A \,.\,.\, N_2 N_3 N_4 \,.\,.\, B \;\overline{\wedge}\; A \,.\,.\, N_3 N_4 N_5 \,.\,.\, B \text{ usw.},$$

ferner auch

$$A \,.\,.\, N_1 N_2 N_3 \,.\,.\, B \;\overline{\wedge}\; B \,.\,.\, N_3 N_2 N_1 \,.\,.\, A \text{ usw.}$$

Die Punkte N_i häufen sich sowohl in der Umgebung von A wie auch in der Umgebung von B; A und B sind die Doppelelemente für alle vorgenannten Projektivitäten. Durch irgend welche zwei Punkte N_1 und N_2 sowie die Häufungspunkte A und B ist die ganze Reihe diskreter Punkte linear definiert.

Ein ähnlicher Zusammenhang, auf das zweidimensionale Gebiet übertragen, gilt für die Anordnung der Knotenpunkte des gesamten Dreiecksnetzes: Wenn man nämlich die Ebene des Dreiecksnetzes auf sich selbst kollinear so abbildet, daß das Dreieck der Häufungslinien das Fundamentaldreieck der Kollineation wird und irgend ein Netzknotenpunkt D einem beliebigen anderen Netzknotenpunkt D_i entsprechen soll, so geht stets das gesamte Dreiecksnetz projektiv in sich selbst über.

Da das Dreiecksnetz ∞^2 Knotenpunkte umfaßt, kann man sagen:

Das gesamte Dreiecksnetz kann auf ∞^2 verschiedene Arten projektiv in sich selbst transformiert werden.

Was nun aber für die Dreiecksnetze in den Häufungsebenen gilt, die übrigens alle acht untereinander kollinear sind, das gilt in unveränderter Weise für die Anordnung der Erzeugenden in den Regelflächen 2. Grades. Jede Regelfläche 2. Grades schneidet das Oktaeder der singulären Ebenen 1. Grades nach zwei Erzeugenden der einen und zwei Erzeugenden der anderen Art. Diese Erzeugenden sind Strahlen aus vier Büscheln in den Häufungsebenen und treffen sich in zwei Gegenecken des Oktaeders und zwei Punkten auf zwei Gegenkanten des Oktaeders. Als Beispiel betrachte man in Figur 6 das windschiefe Vierseit $AA_0A'A_0'$! Die vier in den Häufungsebenen liegenden Erzeugenden sind Häufungslinien für die Anordnung der übrigen dem Gestänge angehörenden Erzeugenden auf der betreffenden Regelfläche. Das durch die Erzeugenden des Gestänges auf der Regelfläche gebildete Netz windschiefer Vierseite ist auf ∞^2fache Art in sich selbst projektiv transformierbar derart, daß dabei stets die Häufungserzeugenden sich selbst entsprechende Elemente der Projektivität sind.

In Figur 7 ist der hyperbolische Fall bevorzugt, bei dem die Doppelelemente A und B reell sind.

Daneben existiert der elliptische Fall mit konjugiert imaginären Häufungspunkten. Hier können die Punkte N_i eine endliche in sich zurücklaufende Gruppe bilden, eine sogenannte „zyklische Projektivität". Die Punktanordnung ist projektiv zu einer Reihe gleichabständiger Punkte auf einem Kreise. Ein Beispiel bildet die Knotenpunktreihe auf jeder Erzeugenden eines Drehhyperboloids, auf dem durch gleichabständige Erzeugende beider Arten ein windschiefes Vierseitnetz gebildet ist.

Wenn die beiden Punkte A und B zusammenfallen, im parabolischen Falle, bilden die Punkte N_i eine unendliche Reihe und folgen, wenn der Häufungspunkt ins Unendliche verlegt wird, in gleichen Abständen aufeinander.

Bei den ebenen Dreiecksnetzen, deren Umhüllende in einen Kegelschnitt und in einen singulären Punkt zerfällt (vgl. S. 135, Fußnote 1, p. 151, IX, X, XI) treten alle drei Arten von Punktanordnungen auf, wie wir sie eben besprochen haben. Die Kegelschnitt-Tangenten tragen Punktanordnungen des hyperbolischen Typus, wenn der singuläre Punkt außerhalb des Kegelschnitts liegt (XI), bzw. Punktanordnungen des parabolischen oder elliptischen Typus, wenn der singuläre Punkt auf dem Kegelschnitt (X) oder im Inneren desselben (IX) gelegen ist.

Zusammenfassend stellen wir fest:

Satz 6: In jedem Geradengestänge sind sechs Systeme von Regelflächen 2. Grades enthalten. Sie bewerkstelligen eine Raumeinteilung in lauter „Tetraeder" mit gekrümmten Seitenflächen. Diese kann als Zerschränkung der regulären Raumerfüllung aus lauter kongruenten ebenflächigen Tetraedern aufgefaßt werden, wie sie von den Diagonalebenen eines regulären Würfelgefüges gebildet wird. Je vier Kanten eines krummflächigen Tetraeders sind geradlinig, die beiden übrigen Kanten sind Kegelschnittbögen.

Alle Regelflächen 2. Grades eines Systems haben zwei Gegenecken des Oktaeders der singulären Ebenen 1. Grades gemeinsam und sind durch die Geraden des Gestänges in doppelter Weise projektiv so aufeinander bezogen, daß die Oktaedergegenecken und nur diese beiden Punkte sich selbst entsprechen. Die Anordnung der einzelnen Erzeugenden auf einer Regelfläche hat die vier Erzeugenden in den Häufungsebenen des Gestänges zu Häufungslinien. Das von den Erzeugenden einer Regelfläche gebildete Netz windschiefer Vierseite kann durch ∞^2 Kollineationen in sich selbst transformiert werden, wobei stets die Häufungserzeugenden Doppelelemente der Projektivität sind.

Die Unterteilung des Gestänges.

Nachdem wir die diskrete Anordnung der Knotenpunkte und der Erzeugenden auf den Regelflächen 2. Grades diskutiert haben, sind wir unmittelbar in der Lage, die Unterteilung des Gestänges durchzuführen. Erst durch die Erledigung der Unterteilung bekommen dann die Kanten und Seitenflächendiagonalen der zerschränkten mit dem Gestänge verknüpften Würfelgefüge einen wohldefinierten Sinn.

Die Unterteilung läuft lediglich darauf hinaus, die Knotenpunktreihen, deren Gesetzmäßigkeiten wir auf S. 165 studiert haben, zu unterteilen, oder was das nämliche ist, die speziellen Dreiecksnetze in den Häufungsebenen zu verengern. Wenn wir die Unterteilung auf dem Wege der fortgesetzten Halbierung bewerkstelligen, so handelt es sich um lauter Aufgaben 1. und 2. Grades[1]). Dadurch kommt wieder in deutlicher Weise zum Ausdruck, daß die räumlichen Gestänge grundsätzlich einfacher sind als die allgemeinen ebenen Dreiecksnetze. Bei den letzteren ist das Problem der fortgesetzten Halbierung vom 6. Grade, während bei den Gestängen und den besonderen in ihren Häufungsebenen liegenden Dreiecksnetzen die fortgesetzte Halbierung lediglich mit Hilfe des Zirkels und Lineals geleistet werden kann.

Durch fortgesetzte Unterteilung eines vorgegebenen Gestänges gelangt man zu einer unendlich engmaschigen Geradenanordnung.

Zusammengefaßt bekommen wir folgenden Satz:

Satz 7: Die Unterteilung einer Geradenanordnung mit je vier sich schneidenden Geraden kann auf dem Wege sukzessiver Halbierung mit Hilfe des Lineals und Zirkels geleistet werden.

---

[1]) H. Graf, Einteilung der Ebene in Dreiecke usw., Diss., München, Technische Hochschule, 1925.

Die mit dem Gestänge verknüpfte räumliche Konfiguration von Kegelschnitten.

Durch fortgesetzte Unterteilung eines vorgegebenen Gestänges entstehen auf allen Regelflächen 2. Grades infinitesimale Vierseitnetze. Schon früher haben wir gelegentlich (vgl. S. 166) erwähnt, daß ein projektiver Sonderfall der auf den Regelflächen vorliegenden Vierseitnetze durch das Netz gleichabständiger Erzeugender beider Arten auf einem Drehhyperboloid repräsentiert wird. Die Diagonalkurven dieses Netzes sind Kreise mit gemeinsamen unendlich fernen Punkten und kongruente Hyperbeln, welche sich auf der Drehachse in einem imaginären Punktepaar schneiden. Ausgehend von diesem metrischen Beispiel ergibt sich allgemein, daß die auf den Regelflächen eines Gestänges liegenden Vierseitnetze als Diagonalkurven lauter Kegelschnitte haben, welche sich zu zwei Gruppen zusammenfassen lassen, die jeweils ein Punktepaar gemeinsam haben.

Wir fragen nun nach der anschaulichen Bedeutung, welche den Diagonalkegelschnitten in dem Gestänge und den damit verknüpften Würfelgefügen zukommt:

In jedem Knotenpunkt treffen sechs Regelflächen zusammen. Diese schneiden sich, wie wir schon vorne (vgl. S. 163) gesehen haben, zu je dreien nach vier Geraden und zu je zweien nach drei krummen Linien. Diese krummen Linien bilden drei Mannigfaltigkeiten von den hier erörterten Diagonalkegelschnitten. Außerdem laufen in jedem Knotenpunkt noch sechs weitere Diagonalkurven zusammen, welche insgesamt sechs weitere Mannigfaltigkeiten von Kegelschnitten bilden.

Die drei ersten doppelten Kegelschnittmannigfaltigkeiten, die wir kurz als Kegelschnittkongruenzen bezeichnen, sind identisch mit den krummlinigen Kanten der zerschränkten Würfelgefüge und den Verbindungskurven der Mittelpunkte benachbarter Würfel oder, was das nämliche bedeutet, mit den krummlinigen Kanten des auf S. 164 auseinander gesetzten zerschränkten Tetraedergefüges. Wir haben jetzt nachträglich erkannt, daß es sich bei diesen Kurven tatsächlich um Kegelschnitte handelt, wie wir dies früher ohne Beweis behauptet hatten. Jede der drei Kegelschnittkongruenzen hat ein Paar Gegenecken des Oktaeders der Häufungsebenen als zwei feste Grundpunkte.

Die sechs übrigen Kongruenzen der Diagonalkegelschnitte sind diejenigen Kurven, welche im regulären Würfelgefüge den sechs Bündeln der geradlinigen Diagonalen in den Seitenquadraten der Würfel und der Parallelen durch die Würfelmittelpunkte entsprechen. Jede dieser sechs Kegelschnittkongruenzen kann in einer einfachen Reihe von einfachen Mannigfaltigkeiten angeordnet werden derart, daß jede Mannigfaltigkeit zwei feste Grundpunkte auf zwei Gegenkanten des Oktaeders der Häufungsebenen besitzt. Die sechs Paare von Gegenkanten des Oktaeders erscheinen so als Brennlinien für die sechs Kegelschnittkongruenzen.

Die neun Kongruenzen von Kegelschnitten zusammengenommen bilden die nämliche Konfiguration wie im regulären Falle die drei Bündel der Würfelkanten und die sechs Bündel der Diagonalen in den Würfelseitenquadraten samt den Parallelen zu allen diesen Geraden durch die Würfelmittelpunkte. In jedem Knotenpunkte des Gestänges, d. i. in jedem Würfelmittelpunkt und in jeder Würfelecke, treffen demnach neun Kegelschnitte zusammen. Außerdem schneiden sich noch je drei Kegelschnitte in gewissen anderen Punkten. In jedem „Mittelpunkt" der Würfelseitenflächen und in jedem „Mittelpunkt" einer Würfelkante begegnet nämlich ein Kegelschnitt der drei ersteren Kongruenzen zwei Kegelschnitten der sechs letzteren Kongruenzen. Weitere Schnittpunkte gibt es nicht, abgesehen natürlich von den Kanten und Eckpunkten des Häufungsoktaeders, welche für die Kegelschnittkongruenzen singuläre Örter darsellen.

Betrachten wir noch die Seitenflächen des zerschränkten Würfelgefüges. Jede dieser Flächen enthält zwei Kegelschnittsysteme der ersten Art und zwei Kegelschnittsysteme der zweiten Art. Die vier Kegelschnittsysteme bilden auf der Fläche eine Konfiguration, welche den geradlinigen Möbiusschen Netzen in der Ebene analog ist. Im regulären Falle, in dem die Seitenflächen eben werden, gehen in der Tat die auf ihnen ausgebreiteten Kegelschnittnetze in geradlinige Möbiussche Netze über.

Weiter wollen wir auf die Eigenschaften der Seitenflächen nicht eingehen. Lediglich auf die Tatsache sei aufmerksam gemacht, daß unter der Gesamtheit der Flächen, zu denen sich die

Würfelseiten zusammensetzen, die Brennfläche, die Umhüllende des Gestänges, als Grenzfall enthalten ist, in ähnlicher Weise, wie bei den ebenen Dreiecksnetzen die umhüllende Kurve 3. Klasse zu der Gesamtheit der Diagonalkurven gehört.

Alle diese Ergebnisse stellen wir in folgendem Satz zusammen:

Satz 8: Bei der Zerschränkung eines regulären Würfelgefüges, bei der lediglich die vier Systeme von Hauptdiagonalen geradlinig bleiben, gehen die drei Bündel von Würfelkanten und ihre Parallelen durch die Würfelmittelpunkte in drei Kongruenzen von Kegelschnitten über, welche jeweils ein Paar von Gegenecken des Häufungsoktaeders als feste Grundpunkte besitzen. Ferner werden die sechs Systeme von Diagonalen in den Seitenquadraten der Würfel und ihre Parallelen durch die Würfelmittelpunkte bei der Zerschränkung deformiert in sechs Kegelschnittkongruenzen, welche die sechs Paar Gegenkanten des Häufungsoktaeders zu Brennlinien haben.

Die neun diskreten Mannigfaltigkeiten von Kegelschnitten bilden zusammen eine merkwürdige räumliche Konfiguration, bei der durch jeden Knotenpunkt des Geradengestänges neun und nur neun Kegelschnitte hindurchgehen. Zwischen je zwei derartigen Knotenpunkten liegt auf den verbindenden Kegelschnitten jeweils noch ein Punkt, in dem drei und nur drei Kegelschnitte zusammentreffen.

Die Seitenflächen der zerschränkten Würfel haben die bemerkenswerte Eigenschaft, daß sie vier Kegelschnittmannigfaltigkeiten tragen, welche ähnliche Verknüpfungsverhältnisse aufweisen wie die geradlinigen Möbiusschen Netze in der Ebene.

Eine weitere auffällige Eigenschaft der zerschränkten „Würfel“.

Zum Schlusse besprechen wir noch eine auffällige Eigenschaft der Anordnung der Eckpunkte der zerschränkten Würfel.

Der denkbar weitestmaschige Würfel hat die Punkte D, D'; P, P'; Q, Q'; R, R' (vgl. Figur 6, S. 155) zu Eckpunkten und M als Diagonalenschnittpunkt. Nun kann man leicht einsehen, daß die zwölf geradlinigen Sehnen der krummen Kanten dieses Würfels sich nicht zu windschiefen, sondern zu sechs ebenen Vierseiten zusammensetzen. Die zwölf Sehnen schneiden sich zu je vieren in drei Punkten der drei Verbindungsgeraden der Gegenecken des Häufungsoktaeders.

Da die Knotenpunktreihen auf den vier durch M laufenden Geraden des Gestänges zueinander perspektiv sind, müssen auch für alle engeren Würfel mit M als Diagonalenschnittpunkt die Sehnen der krummlinigen Kanten durch die nämlichen eben erwähnten drei Punkte auf den Verbindungslinien der Gegenecken des Häufungsoktaeders hindurchgehen. Ebenso bilden die Sehnen der krummlinigen Kanten aller Würfel mit einem anderen gemeinsamen Diagonalenschnittpunkt drei Bündel, deren Mittelpunkte drei i. a. von den vorerwähnten verschiedene Punkte auf den Verbindungslinien der Oktaedergegenecken sind.

Wenn wir in irgend einem Würfel die krummlinigen Kanten durch die geradlinigen Sehnen ersetzen, so ergibt sich ein Sechsflächner, der kollinear auf einen regulären Würfel bezogen werden kann.

Zusammenfassend haben wir folgenden Satz:

Satz 9: Die acht Eckpunkte eines zerschränkten Würfels können stets projektiv auf die acht Eckpunkte eines regulären Würfels bezogen werden; je vier Eckpunkte liegen in einer Ebene und je vier Sehnen der krummlinigen Kanten schneiden sich in einem Punkt.

Die Sehnen der krummen Kanten aller zerschränkten Würfel mit gemeinsamem Diagonalenschnittpunkt liegen in drei Bündeln, deren Mittelpunkte den Verbindungslinien der Gegenecken des Häufungsoktaeders angehören.

(*Zusatz*: Im Anschluß an den Zusatz auf S. 156 erwähnen wir folgenden aus Satz 9 fließenden stereometrischen Satz:

Die Schwerpunkte der acht Seitendreiecke eines beliebigen Oktaeders mit windschiefen Gegenkanten liegen zu je vieren in sechs Ebenen und bilden die Ecken eines Parallelflachs, dessen Kanten zu je vieren den Hauptdiagonalen des Oktaeders parallel sind.)

Da die acht Punkte DD'; PP'; QQ'; RR' (Figur 6) kollinear in die Eckpunkte eines Würfels deformiert werden können, ergibt sich aus Satz 9 noch diese Folgerung:

Satz 10: Ein Gestänge mit je vier sich schneidenden Geraden kann stets projektiv so transformiert werden, daß die vier von einem bestimmten, aber beliebig wählbaren Knotenpunkt auslaufenden Geraden wie die Hauptdiagonalen eines regulären Würfels gegenseitig liegen und kongruente Knotenpunktreihen tragen, die zu dem gemeinsamen Mittelpunkt symmetrisch angeordnet sind. Eine durchgängige vierfach symmetrische Anordnung der gesamten Gestänge läßt sich i. a. nicht erzielen.

§ 4.

Beispiele von Geradenanordnungen mit je vier sich schneidenden Geraden.

1. Zunächst betrachten wir ein vierfach symmetrisches Gestänge mit lauter reellen Häufungsebenen (hyperbolischer Fall): Die Anordnung der Knotenpunkte auf allen Geraden ist eine hyperbolische (S. 166).

Das Oktaeder der Häufungsebenen ist regulär angenommen und die Schwerpunkte der acht Seitendreiecke sind als Anfangsknotenpunkte für die Dreiecksnetze in den Häufungsebenen gewählt. Daher sind diese Netze dreifach symmetrisch, ebenso wie das in unserer schon mehrfach zitierten Arbeit abgebildete Netz[1]).

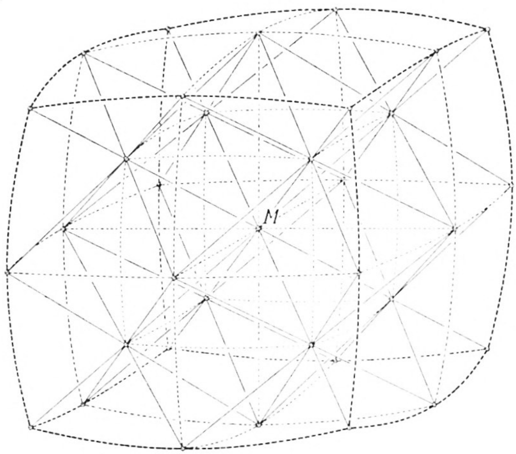
Die Dreiecksnetze in den gegenüberliegenden Häufungsebenen, welche die Cremonaschen quadratischen Verwandtschaften definieren, schneiden sich jeweils in der unendlich fernen Geraden und haben keinen Punkt entsprechend gemeinsam. Durch unsere Erzeugungsweise entstehen also vier konfokale Kongruenzen (4,2), wie wir es in § 2 auseinander gesetzt haben.

In Figur 8 sind die acht um den Schwerpunkt M des Oktaeders herumliegenden zerschränkten Würfel dargestellt. Die Würfel-

---

[1]) H. Graf und R. Sauer, Über dreifache Geradensysteme usw., Sitzgsb. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-nat. Abtg., 1924, p. 148, VIII.

diagonalen, welche das Geradengestänge bilden, sind ausgezogen, die Kegelschnittbögen, welche als Kanten zu den zerschränkten Würfeln gehören, sind gestrichelt gezeichnet.



Figur 8.

Die vier von M ausgehenden Geraden tragen kongruente und hinsichtlich M symmetrische Knotenpunktreihen und liegen gegenseitig so, wie die Diagonalen eines regulären Würfels (vgl. Satz 10, S. 173). Die vierfache Symmetrie ist in dem vorliegenden Beispiel nicht auf die vier von M auslaufenden Geraden beschränkt, sondern gilt für den gesamten Aufbau des Gestänges in Beziehung zu den vier in M sich treffenden Geraden. Daß diese Symmetrie erreicht werden kann, ist eine Folge der speziellen Wahl der Anfangsbedingungen.

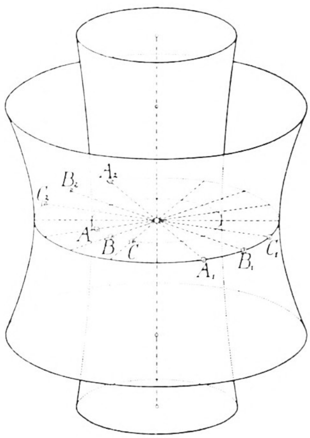
Da die drei Verbindungslinien der Gegenecken des Häufungsoktaeders in unserem speziellen Falle sich schneiden und dieser Schnittpunkt als Anfangsknotenpunkt M gewählt wurde, so sind auch die sechs singulären Ebenen 2. Grades anschaulich gemacht: Die sechs Regelflächen 2. Grades, die in M zusammentreffen, klappen in ebene Vierecksnetze zusammen, welche von den Tangenten an sechs kongruente Kegelschnitte gebildet werden. Diese Kegelschnitte, längs denen die singulären Ebenen 2. Grades die Brennfläche berühren, liegen mitsamt der ganzen Brennfläche außerhalb des von den Häufungsebenen begrenzten regulären Oktaeders. Das Innere des Oktaeders kann daher vollständig von dem Gestänge ausgefüllt werden.

Aus Symmetriegründen sind die neun von M ausgehenden Diagonalkegelschnitte (vgl. S. 169) zu Geraden ausgeartet; insbesondere sind also die drei von M ausgehenden Kanten des Würfelgefüges geradlinig und fallen zusammen mit den drei Verbindungslinien der Gegenecken des Häufungsoktaeders.

Betrachtet man dasjenige zu dem vorgegebenen Gestänge gehörige Würfelgefüge, welches die Würfelecken des in Figur 8 dargestellten Gefüges zu Würfelmittelpunkten hat, so sind die sämtlichen Sehnen zu den krummlinigen Kanten aller Würfel mit dem gemeinsamen Diagonalenschnittpunkt M parallel zu den drei Verbindungslinien der Gegenecken des Häufungsoktaeders und bilden reguläre Würfel mit M als gemeinsamem Mittelpunkt.

2. Als weiteres Beispiel geben wir ein drehsymmetrisches Gestänge mit lauter imaginären Häufungsebenen (elliptischer Fall): Die Anordnung der Knotenpunkte auf den Geraden ist eine elliptische und bildet eine zyklische Projektivität (vgl. S. 165).

Zwei beliebige einschalige Drehhyperboloide Φ und Φ' mit gemeinsamem Mittelpunkt und gemeinsamer Drehachse werden durch die gleiche Anzahl gleichabständiger Erzeugender beider Arten mit Netzen windschiefer Vierseite überdeckt, und zwar so, daß unter den Diagonalkurven der Vierseitnetze beidemale der Kehlkreis enthalten ist, und daß die Diagonalhyperbeln beider Vierseitnetze paarweise in den nämlichen Meridianebenen liegen.



Figur 9.

Die Vierseitnetze werden projektiv aufeinander bezogen in zweifacher Weise derart, daß den Punkten A, B, C ... des einen Kehlkreises die Punkte A_1, B_1, C_1 ... bzw. A_2, B_2, C_2 ... des anderen Kehlkreises entsprechen (Figur 9) und daß in beiden Kollineationen die gleichen Scharen der Erzeugenden einander zugeordnet werden. A_1, A_2, ebenso

B_1, B_2, ferner C_1, C_2 usw. liegen jeweils symmetrisch zu der Meridianebene durch A bzw. B, bzw. C usw. Bei den eben definierten Projektivitäten sind beide Systeme von Diagonalkurven, nämlich sowohl die Breitenkreise wie auch die Meridianhyperbeln, auf Φ und Φ' einander homolog und insbesondere haben die Breitenkreise auf beiden Hyperboloiden ihre zwei unendlich fernen Punkte entsprechend gemeinsam. Andere entsprechend gemeinsame Punkte sind nicht vorhanden. Die Verbindungslinien PP_1 und PP_2 der entsprechenden Knotenpunkte der auf doppelte Weise kollinear bezogenen Flächen Φ und Φ' sind demnach in zwei Kongruenzen (4,2) enthalten (vgl. S. 167, Satz 6)[1]).

Betrachten wir diese Verbindungslinien PP_1 bzw. PP_2, welche zu je zweien von den Knotenpunkten auf Φ ausgehen, die längs eines Breitenkreises aufeinander folgen! Alle diese Geraden bilden die Erzeugenden beider Arten eines Drehhyperboloids, weil stets die beiden von einem Knotenpunkt von Φ ausgehenden Verbindungsstrahlen PP_1 und PP_2 symmetrisch liegen zu der Meridianebene durch den betreffenden Knotenpunkt P. So entstehen auf allen Verbindungsstrahlen PP_1 und PP_2 Reihen von Punkten, in welchen je zwei Verbindungsstrahlen sich schneiden und welche eine zyklische Projektivität bilden. Die Punkte sind also gerade so angeordnet, wie es in der Theorie der Gestänge verlangt wird (vgl. S. 166). In der Tat überzeugt man sich, daß durch jeden Schnittpunkt zweier Verbindungsstrahlen jeweils noch zwei weitere Gerade so gelegt werden können, daß insgesamt eine zerschränkte Geradenanordnung mit je vier sich schneidenden Geraden schließlich entsteht.

Das gesamte Gestänge ist drehsymmetrisch und außerdem noch symmetrisch in Bezug auf die gemeinsame Kehlkreisebene von Φ und Φ'. Es wird durch eine endliche Anzahl von Geraden zum Abschluß gebracht.

Wir diskutieren nun die sechs Systeme von Regelflächen 2. Grades, die in dem Gestänge enthalten sind:

Ein erstes System S_1 von Regelflächen besteht aus koaxialen Drehhyperboloiden, deren Erzeugende die Verbindungslinien PP_1 und PP_2 sind, und welche mit Φ und Φ' je zwei Breitenkreise

[1]) Vgl. auch R. Sturm, Liniengeometrie II. Teil, 1893, p. 294.

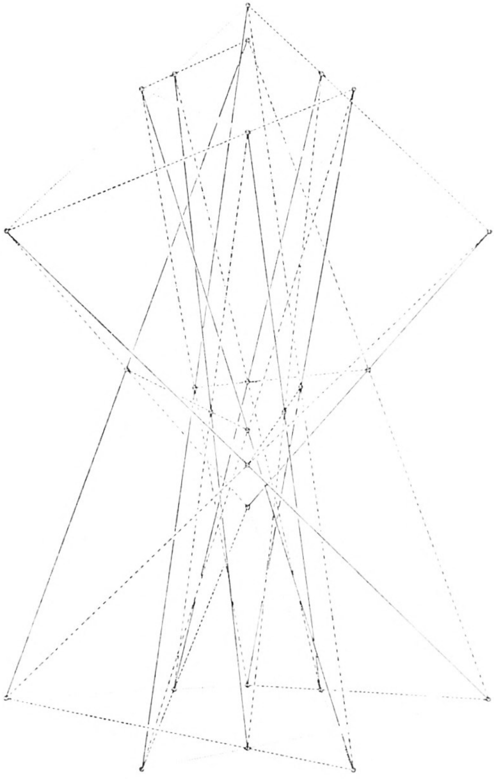
gemeinsam haben. Unter der diskreten Folge dieser Drehhyperboloide ist stets die Kehlkreisebene als Ausartung enthalten, und falls die Zahl der Knotenpunkte längs einer Erzeugenden eine gerade Zahl ist, auch die unendlich ferne Ebene. Die Geraden des Gestänges in diesen zwei Ebenen umhüllen je einen Kreis und bilden zusammen mit den Büscheln von Kreisdurchmessern zwei Dreiecksnetze (vgl. S. 187, Figur 14). Die beiden genannten Ebenen werden von der Brennfläche nach den eben erwähnten Kreisen berührt. Je zwei Drehhyperboloide des Systems S_1 gehen durch Spiegelung an der Kehlkreisebene ineinander über.

Ein zweites System S_2 von Regelflächen wird von koaxialen und konzentrischen Drehhyperboloiden gebildet. Die Erzeugenden sind die dritten und vierten Geraden, welche durch die Schnittpunkte der Verbindungslinien entsprechender Punkte von Φ und Φ' gelegt wurden. Zu diesem Regelflächensystem gehören insbesondere Φ und Φ' selbst.

Die vier weiteren Systeme S_3, S_4, S_5, S_6 von Regelflächen 2. Grades ergeben sich, wenn man die Verbindungslinien PP_1 bzw. die Verbindungslinien PP_2 längs der Erzeugenden der einen oder der anderen Art auf Φ und Φ' hingleiten läßt. Alle Regelflächen aus einem dieser vier Systeme sind kongruent und gehen ineinander über durch Drehung um die Symmetrieachse des Gestänges. Die Systeme S_3 und S_4 sind zueinander symmetrisch, ebenso die Systeme S_5 und S_6.

Die Flächen der Systeme S_1 und S_2 haben zwei imaginäre Kreispunkte entsprechend gemeinsam. Die Flächen der Systeme S_3 und S_4 haben zwei imaginäre Punkte auf der Drehachse des Gestänges entsprechend gemein, zwei andere imaginäre Punkte auf der Drehachse haben schließlich auch die Flächen der Systeme S_5 und S_6 entsprechend gemeinsam. Die sechs genannten Punkte, von denen vier in gerader Linie liegen, bilden die Eckpunkte des ausgearteten Häufungsoktaeders. Alle Häufungsebenen sind imaginär.

In dem in Figur 10 dargestellten Beispiel sind auf Φ und Φ' je drei Erzeugende beider Arten gezeichnet. Dadurch entsteht das denkbar weitestmaschige Gestänge. Es umfaßt 36 gerade Linien, die sich zu vieren in 27 Knotenpunkten schneiden. Die jeweils zum nämlichen Strahlensystem gehörenden neun Geraden sind ausgezogen bzw. gestrichelt bzw. punktiert bzw. strichpunktiert. Jede Gerade trägt drei Knotenpunkte. Aus der Geradenanordnung lassen sich 18 Regelflächen 2. Grades herausgreifen, je drei für jedes der sechs Systeme. Eine der Regelflächen ist in die Kehlkreisebene zusammengeklappt. Besonders sei darauf aufmerksam gemacht, daß sämtliche Geraden und Knotenpunkte des Gestänges in der Figur angegeben sind.

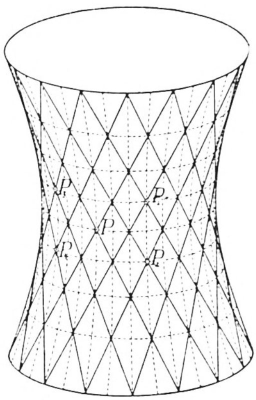


Figur 10.

Während in dem diskutierten und in Figur 10 dargestellten Beispiel die sechs Eckpunkte des Häufungsoktaeders eine sehr spezielle Lage haben, indem vier von ihnen in gerader Linie liegen, kann das allgemeinste Gestänge mit lauter imaginären Eckpunkten des Häufungsoktaeders nach projektiver Umformung stets dadurch erzeugt werden, daß man zwei allgemeine einschalige Hyperboloide Φ und Φ' in ähnlicher Weise aufeinander doppelt projektiv bezieht wie Φ und Φ' in dem speziellen drehsymmetrischen Beispiel. Die Vierseitnetze auf Φ und Φ' sollen jeweils ein System von Kreisschnitten als das eine System von Diagonalkurven haben und diese beiden Kreissysteme auf Φ und Φ' sollen in dem nämlichen Parallelebenenbüschel liegen. Die beiden unendlich fernen Punkte der Diagonalkreise sind als die beiden einzigen sich selbst entsprechenden Punkte bei den beiden Kollineationen zwischen Φ und Φ' einzuführen. Das jeweils zweite Diagonalkurvensystem besteht aus Hyperbeln. Die Knotenpunktreihen auf den Diagonalkreisen von Φ und Φ' müssen so angeordnet sein, daß sie jeweils durch parallele Kreisdurchmesser ausgeschnitten werden.

2a. Statt noch auf Übergangsbeispiele zwischen dem rein hyperbolischen Gestänge des 1. Beispiels und dem rein elliptischen Gestänge des 2. Beispiels einzugehen, wollen wir noch kurz einen sehr speziellen elliptischen Fall erwähnen, bei dem die das Gestänge enthaltenden Kongruenzen (4,2) ausgeartet sind.

Ein einschaliges Drehhyperboloid Φ wird durch die gleiche Anzahl gleichabständiger Erzeugender beider Arten mit einem Netz windschiefer Vierseite überdeckt. Jedem Knotenpunkt P werden vier Knotenpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 zugeordnet, indem man von P zunächst in der Kreisdiagonale des Vierseitnetzes um stets m halbe „Knotenpunktsabstände" nach rechts und links und dann in den Diagonalhyperbeln um stets n halbe „Knotenpunktabstände" nach oben und unten vorwärts schreitet. Die Zuordnung ist in Figur 11 schematisch angedeutet. Die ausgezogenen Geraden bezeichnen die Erzeugenden, die punktierten Linien die Diagonalkurven.



Figur 11.

Das Drehhyperboloid Φ wird auf die angegebene Weise durch vier Kollineationen in sich selbst transformiert, wobei jedesmal die vier imaginären Erzeugenden, die sich in den unendlich fernen Punkten des Kehlkreises und in den imaginären Punkten auf der Achse des Drehhyperboloids schneiden, die sich selbst entsprechenden Fundamentalelemente sind.

Die Gesamtheit aller Verbindungslinien PP_1, PP_2, PP_3, PP_4 ergibt eine Gruppe von Schnittpunkten, in denen je zwei Gerade zusammentreffen. Durch diese Schnittpunkte können ähnlich wie im 2. Beispiel jeweils noch zwei weitere Gerade so gelegt werden, daß insgesamt ein Gestänge entsteht mit je vier sich schneidenden Geraden. In den Knotenpunkten von Φ selbst treffen jedoch stets sechs Gerade zusammen. Dadurch, daß neben den Knotenpunkten mit je vier sich schneidenden Geraden noch Knotenpunkte mit je sechs sich schneidenden Geraden existieren, unterscheidet sich das in Rede stehende Gestänge in charakteristischer Weise von den bisher besprochenen Geradenanordnungen. Das gesamte Gebilde erscheint gewissermaßen als ein zusammengestecktes Gefüge von zwei Gestängen mit je vier sich schneidenden Geraden.

Das besprochene Geradengefüge bietet dadurch ein gewisses Interesse, daß es im Gegensatz zu den allgemeinen von uns untersuchten Gestängen zu sich selbst dual deutbar ist. Es kann aufgefaßt werden als eine Anordnung von Geraden, von denen je vier in einer Ebene liegen. Die Tangentialebenen von Φ dagegen enthalten je sechs Gerade des Gestänges. Natürlich ist auch die Entstehungsweise der Geradenanordnung dual übertragbar; die Geraden PP_1, PP_2, PP_3, PP_4 sind nicht nur die Verbindungslinien homologer Punkte, sondern auch die Schnittlinien homologer Ebenen in vier Kollineationen, durch die Φ in sich selbst transformiert wird.

Das Gestänge ist symmetrisch zur Kehlkreisebene von Φ und drehsymmetrisch. Die Drehachse und die unendlich ferne Gerade der Kehlkreisebene von Φ sind in ihrer Beziehung zu dem Gestänge einander durchaus gleichwertig.

3. Angedeutet wenigstens sei noch der Fall, wenn Gegenecken des Häufungsoktaeders zusammenfallen (parabolischer Fall). Dann haben die Regelflächen 2. Grades durch die beiden zusammenfallenden Gegenecken diesen Punkt und in ihm eine Tangente entsprechend gemeinsam. Die Anordnung der Knotenpunkte auf den Erzeugenden dieser Regelflächen ist eine parabolische (vgl. S. 167); anstelle der je vier Häufungserzeugenden der Regelflächen treten je zwei jeweils doppelt zu rechnende Erzeugende, welche von dem sich selbst entsprechenden Punkte ausgehen.

§ 5.

Die Geradenanordnungen mit je sechs sich schneidenden Geraden.

In den bisherigen Untersuchungen wurden die Zerschränkungen der regulären Gestänge mit je drei und je vier sich schneidenden Geraden besprochen. Um nun zu Geradenanordnungen zu gelangen, in deren gleichberechtigten Knotenpunkten mehr als vier Gerade sich schneiden, gehen wir wiederum von einem zerschränkten Würfelgefüge aus und verlangen, daß außer den vier Systemen von Raumdiagonalen noch weitere Geradensysteme auftreten. So können wir in naheliegender Weise fordern, daß noch Systeme von Seitendiagonalen oder Systeme von Kanten der „Würfel" bei der Zerschränkung als gerade Linien erhalten bleiben.

Wenn wir zunächst nur ein weiteres System von geraden Linien zu den vier Systemen der Raumdiagonalen dazu nehmen, gelangen wir zu Gestängen mit je fünf sich schneidenden Geraden. Schon in der Einleitung wurde klar gestellt, daß die Geradenanordnungen mit je fünf sich schneidenden Geraden keinen regulären oder halbregulären Grundtypus besitzen. Sie gehören also nicht zum eigentlichen Gegenstande unserer Untersuchungen. Wir beschränken uns infolgedessen darauf, nur einige wesentliche Tatsachen über diese Gestänge mitzuteilen:

Je nachdem wir als fünftes System von Geraden ein System von Seitendiagonalen oder ein System von Kanten der „Würfel" einführen, — wobei immer die „Parallelen" durch die „Mittelpunkte" der „Würfel" mitzurechnen sind —, ergeben sich zwei verschiedene Typen von Geradenordnungen mit je fünf sich schneidenden Geraden.

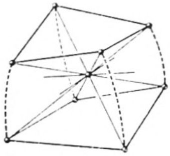
Beim ersten Typus ist neben den vier Systemen der Hauptdiagonalen der „Würfel" noch ein System von Seitendiagonalen geradlinig. Hier tritt ein System von Ebenen auf, in denen von Geraden des Gestänges besondere Dreiecksnetze erzeugt werden. Ein Gestänge dieser Art ergibt sich als Ausartung des auf S. 175 ff. beschriebenen Beispiels: Die Drehhyperboloide Φ und Φ' müssen so gewählt sein, daß ihre in der gleichen Ebene liegenden Meridiane zueinander affin sind, wobei die gemeinsame Drehachse der Hyperboloide Affinitätsachse und die dazu senkrechte Richtung Affinitätsrichtung ist. Die Regelflächen 2. Grades des Systems S_1

arten in parallele Ebenen aus. Die in diesen Ebenen liegenden Geraden des Gestänges sind Tangenten an Kreise. Wenn man als fünftes Geradensystem die Durchmesser dieser Kreise einführt, welche die Netze der Kreistangenten zu Dreiecksnetzen ergänzen, so ergibt sich ein Gestänge des ersten Typus mit je fünf sich schneidenden Geraden.

Beim zweiten Typus wird neben den vier Systemen von Raumdiagonalen noch ein System von Kanten des Würfelgefüges geradlinig angenommen. Es treten hier zwei Systeme von Ebenen auf, in denen von Geraden des Gestänges gebildete besondere Dreiecksnetze liegen. Ein einfaches Beispiel ergibt sich folgendermaßen: Auf einem Drehparaboloid wird durch zwei Systeme paralleler und kongruenter Parabeln ein Vierecksnetz hergestellt, welches sich in der Richtung der Drehachse des Paraboloids als Quadratnetz projiziert. Zieht man in jedem Knotenpunkt des Vierecksnetzes die beiden Tangenten der dort sich treffenden Parabeln und außerdem durch diese Knotenpunkte und die Schnittpunkte der Tangenten die Durchmesser des Paraboloids, so erhält man ein Gestänge des zweiten Typus. Die in dem Gestänge enthaltenen Ebenen tragen Dreiecksnetze, die von Tangenten und Durchmessern einer Parabel erzeugt werden.

Wir kehren nun zu unserem Thema zurück und untersuchen, wie wir zu den Zerschränkungen der in der Einleitung angegebenen halbregulären Gestänge mit je sechs sich schneidenden Geraden gelangen können.

Wenn wir zu den vier Systemen der Raumdiagonalen noch zwei Systeme von Kanten samt den „Parallelen" durch die Diagonalenschnittpunkte als gerade Linien einführen, erhalten wir Gestänge mit je sechs sich schneidenden Geraden. Daß diese Gestänge die Zerschränkungen des in der Einleitung besprochenen regulären Typus der Geradenanordnung mit je sechs sich schneidenden Geraden darstellen, werden die nachfolgenden Betrachtungen alsbald zeigen.



Figur 12.

In Figur 12 ist ein Würfel des Gefüges dargestellt. Man sieht unmittelbar, daß vier von den sechs Diagonalflächen durch die Würfelgegenkanten in Ebenen ausgeartet sind, welche Dreiecksnetze tragen. Die beiden übrigen

Diagonalflächen sind wie im allgemeinen Falle der Gestänge mit je vier sich schneidenden Geraden Regelflächen 2. Grades. Ein drittes System von Regelflächen 2. Grades wird von den Würfelseitenflächen gebildet, deren Kanten geradlinig sind.

In Figur 12 sind wiederum die geraden Linien ausgezogen, die krummen Linien gestrichelt. Zu den zwei Systemen geradliniger Würfelkanten sind noch je zwei Gerade durch die Würfelmittelpunkte hinzu zu nehmen, welche die Mittelpunkte solcher Würfel verbinden, die Seitenflächen mit je zwei geradlinigen und je zwei krummlinigen Würfelkanten gemeinsam haben. (Vgl. in Figur 12 die fünfte und sechste von M auslaufende Gerade!) Alle Knotenpunkte sind dann miteinander gleichberechtigt und von jedem Knotenpunkt gehen sechs gleichberechtigte Gerade aus, welche zu je dreien in den vier Diagonalebenen der Würfel liegen. Das Gestänge hat offenbar den in der Einleitung angegebenen halbregulären Grundtypus.

Die Gleichberechtigung der sechs von einem Knotenpunkt ausgehenden Geraden kommt in der durch Figur 12 angedeuteten Raumeinteilung nicht klar zum Ausdruck. Vielmehr scheinen je zwei Gerade als Würfelkanten ausgezeichnet zu sein vor den vier übrigen Geraden als Würfeldiagonalen. Nun überzeugt man sich aber leicht, daß man zu dem vorgegebenen Gestänge noch zwei weitere Würfelgefüge angeben kann, welche von den sechs sich schneidenden Geraden jeweils zwei andere Gerade, die mit keiner dritten in der nämlichen Ebene liegen, als Kanten und die vier übrigen Geraden zu Diagonalen haben. Jedes dieser Würfelgefüge hat ein anderes der drei in dem Gestänge enthaltenen Systeme von Regelflächen 2. Grades zu einem System von Seitenflächen und jeweils die beiden anderen Systeme von Regelflächen 2. Grades zu Diagonalflächen. Betrachtet man alle drei der erwähnten Würfelgefüge zusammen genommen, so wird die Gleichberechtigung der sechs sich schneidenden Geraden deutlich.

Wir richten unser Augenmerk nun insbesondere auf die vier Ebenensysteme, die in jedem der drei zu dem Gestänge gehörenden zerschränkten Würfelgefüge Diagonalebenen sind, und erkennen, daß es sich um eine Anordnung von Ebenen handelt, von denen je vier durch einen Punkt hindurchgehen. Umgekehrt ist klar, daß jede Anordnung von je vier sich schneidenden Ebenen zu einem Gestänge der verlangten Art führt. Die allgemeinsten Ebenenanordnungen mit je vier sich schneidenden Ebenen sind schon in einer früheren Arbeit[1]) besprochen worden und wurden bereits in der Einleitung dieser Abhandlung erwähnt. Sie bewerkstelligen eine Raumerfüllung durch Oktaeder mit windschiefen Gegenkanten und durch Tetraeder. Die Gesamtheit der Kanten dieser Polyedergefüge ist identisch mit den hier untersuchten Gestängen; die Theorie der Gestänge mit je sechs sich schneidenden Geraden, die zu je dreien in vier Ebenen liegen, fällt also zusammen mit der Theorie der von Ebenen erzeugten Tetraeder-Oktaeder-Gefüge. Im halbregulären Grundtypus bildet das Gestänge die Gesamtheit der Kanten eines durch reguläre und kongruente Oktaeder und Tetraeder aufgebauten Raumgefüges.

Die sämtlichen Ebenen eines Tetraeder-Oktaeder-Gefüges gehören alle zu der nämlichen Developpablen 4. Klasse 1. Spezies[1]), d. h. sie umhüllen eine Schar von Flächen 2. Klasse. Umgekehrt können die Ebenen jeder beliebigen Developpablen 4. Klasse 1. Spezies so angeordnet werden, daß sie ein Tetraeder-Oktaeder-Gefüge erzeugen und demnach zu je vieren in den Knotenpunkten sich schneiden. Die Tetraeder-Oktaeder-Gefüge können durch lineare Konstruktionen schrittweise hergestellt werden, welche nach Festsetzung der Anfangsbedingungen zwangsläufig weitergehen.

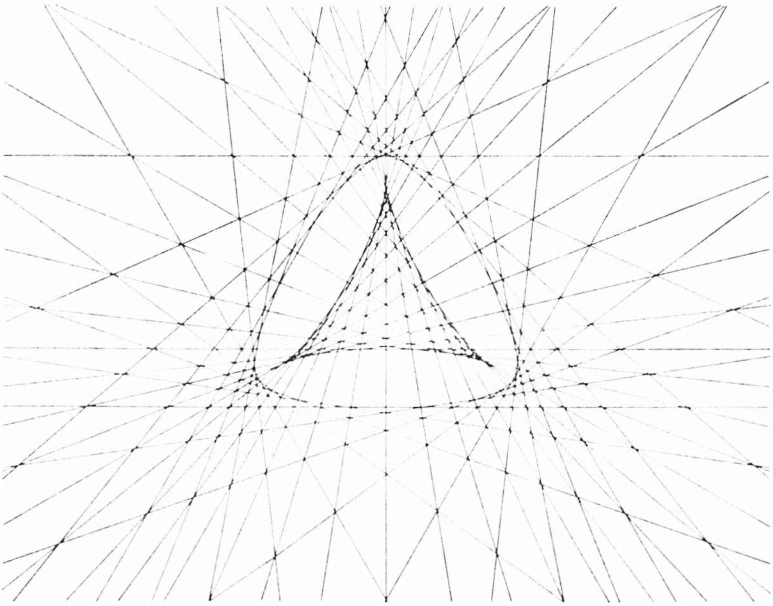
Die Diagonalflächen durch die Gegenkanten der Oktaeder in dem Tetraeder-Oktaeder-Gefüge werden von den drei Systemen von Regelflächen 2. Grades gebildet, die in dem Gestänge enthalten sind und als Seitenflächen bzw. Diagonalflächen zu den auf S. 183 beschriebenen Würfelgefügen gehören. Alle diese Regelflächen 2. Grades bilden eine Schar und haben zur Umhüllenden die mit dem Tetraeder-Oktaeder-Gefüge verknüpfte Deloppable 4. Klasse 1. Spezies.

Jede Ebene eines der vier in dem Gestänge enthaltenen Ebenensysteme trägt ein Dreiecksnetz, das von den in der betreffenden Ebene liegenden Geraden des Gestänges gebildet wird.

---

[1]) R. Sauer, Die Raumeinteilungen, welche durch Ebenen erzeugt werden, von denen je vier sich in einem Punkte schneiden. Sitzungsber. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-nat. Abt., 1925, p. 41 ff.

Wie aus unseren früheren Untersuchungen der Tetraeder-Oktaeder-Gefüge hervorgeht, sind diese Dreiecksnetze vom allgemeinen Typus, d. h. die Umhüllende ist i. a. eine singularitätenfreie Kurve 3. Klasse[1]). Ein Beispiel eines solchen Netzes ist in Figur 13 angegeben. Die Anordnung der Knotenpunkte auf den Geraden wird durch elliptische Funktionen geregelt.



Figur 13.

Es zeigt sich also, daß die Anordnung der Geraden und der Knotenpunkte eine viel allgemeinere ist als bei den in §§ 2, 3 erörterten Gestängen mit je vier sich schneidenden Geraden. Dort nämlich bilden die in den singulären Ebenen 1. Grades liegenden Geraden des Gestänges nicht Dreiecksnetze des allgemeinen Typus, sondern spezielle Dreiecksnetze, deren Umhüllende in drei Strahlenbüschel zerfällt. Die Anordnung der Knotenpunkte wird bei den in §§ 2, 3 untersuchten Gestängen nicht wie bei den allgemeinen

---

[1]) Hinsichtlich dieser Dreiecksnetze verweisen wir auf die schon mehrfach zitierte Arbeit: H. Graf und R. Sauer, Über dreifache Geradensysteme usw., Sitzungsber. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abt., **1924**, S. **145—150**.

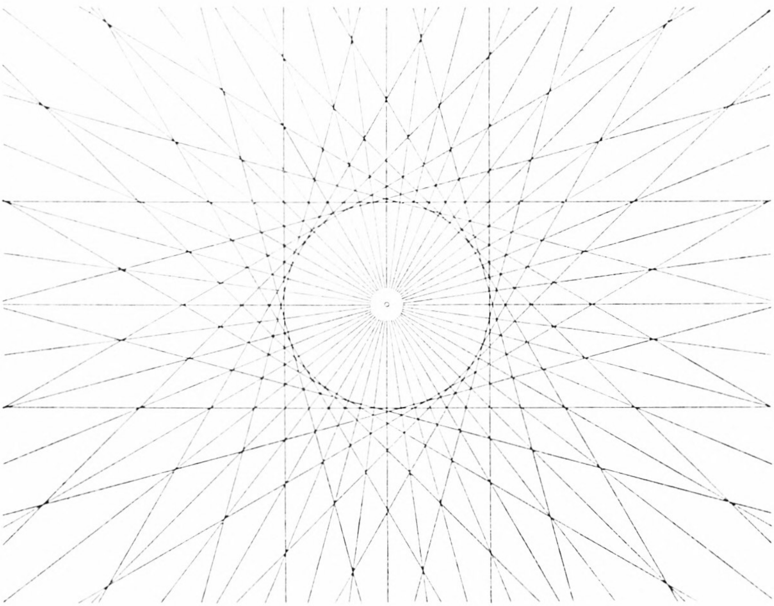
Dreiecksnetzen und wie bei den in diesem Paragraphen betrachteten Gestängen durch elliptische Funktionen geregelt, sondern ist die nämliche wie die Anordnung der Knotenpunkte auf den Kegelschnitt-Tangenten der ausgearteten Dreiecksnetze und, was das nämliche besagt, wie die Anordnung der Knotenpunkte auf den Geraden der von drei Strahlenbüscheln gebildeten Netze. In diesem Sinne haben wir auf S. 161 festgestellt, daß die Gestänge mit je vier sich schneidenden Geraden nur zu ganz speziellen Dreiecksnetzen ein sinnvolles Analogon darbieten. Jetzt sehen wir, daß erst die Gestänge mit je sechs sich schneidenden gleichberechtigten Geraden zu den allgemeinen ebenen Dreiecksnetzen die naturgemäßen Verallgemeinerungen sind. Der Grund dafür, daß die Gestänge mit sechs sich schneidenden Geraden plötzlich einen wesentlich allgemeineren Charakter der Anordnung der Knotenpunkte mit sich bringen, liegt darin, daß nicht nur mehr einzelne Regelflächen 2. Grades, sondern vier ganze Systeme von Regelflächen 2. Grades in Ebenen ausarten und dadurch für die Anordnung der Geraden gewissermaßen eine neue Bewegungsmöglichkeit zur Geltung kommt.

Der allgemeinere Charakter der hier behandelten Gestänge gegenüber den früher untersuchten Geradenanordnungen zeigt sich auch deutlich in den auf S. 182 besprochenen Würfelgefügen (vgl. Figur 12). Für diese Würfeleinteilungen behält Satz 9, S. 172 keine Gültigkeit mehr: die geradlinigen Kanten sowie die Sehnen der krummlinigen Kanten sind im allgemeinen zueinander windschief. Außerdem sind die krummlinigen Kanten der Würfel nicht mehr wie früher Kegelschnitte, sondern Raumkurven 4. Ordnung 1. Spezies.

Einen Übergangsfall zwischen den in §§ 2, 3 behandelten Gestängen mit je vier sich schneidenden Geraden und den hier diskutierten allgemeinen Geradenanordnungen mit je sechs sich schneidenden Geraden bietet ein spezielles Gestänge mit je sechs sich schneidenden Geraden, das schon bei der Untersuchung der Tetraeder-Oktaeder-Gefüge erwähnt ist[1]):

[1]) R. Sauer, Die Raumeinteilungen, welche durch Ebenen erzeugt werden, von denen je vier sich in einem Punkte schneiden. Sitzungsber. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-nat. Abt., 1925, p. 55, I.

Die Developpable 4. Klasse 1. Spezies artet in zwei Kegel 2. Klasse aus, die sich nach zwei Kegelschnitten schneiden. Um anschauliche metrische Beziehungen vor Augen zu haben, legen wir einen Drehkegel und einen dazu koaxialen Drehzylinder zugrunde. Dann ergibt sich aus den Tangentialebenen des Drehkegels und aus den Tangentialebenen des Drehzylinders eine drehsymmetrische Raumeinteilung in Tetraeder und Oktaeder. Die Kanten bilden ein spezielles Gestänge mit je sechs sich schneidenden gleichberechtigten Geraden. Das Gestänge kann in seinem reellen Teil durch eine endliche Anzahl von geraden Linien zum Abschluß gebracht werden. Die Polyederebenen tragen Dreiecksnetze, deren Umhüllende in einen Kegelschnitt und einen innerhalb des Kegelschnitts liegenden Punkt zerfällt. Diese Dreiecksnetze sind projektiv zu dem schon wiederholt zitierten Netz der Durchmesser und Tangenten eines Kreises (vgl. z. B. S. 177), wie es in Figur 14 dargestellt ist. Die Anordnung der Knotenpunkte auf den Kegelschnitt-Tangenten des vorliegenden Gestänges ist die nämliche wie bei den Geraden der in §§ 2, 3 erörterten Gestänge.



Figur 14.

Die Kanten der Oktaeder des hier besprochenen speziellen Gefüges lassen sich jeweils zu zwei windschiefen und einem ebenen Vierseit zusammenfassen. Von den drei Systemen der Regelflächen 2. Grades ist ein System in die Meridianebenen des eingangs genannten Kegels und Zylinders ausgeartet. Die beiden übrigen Systeme bestehen aus Drehhyperboloiden, die den vorgegebenen Kegel und den vorgegebenen Zylinder berühren.

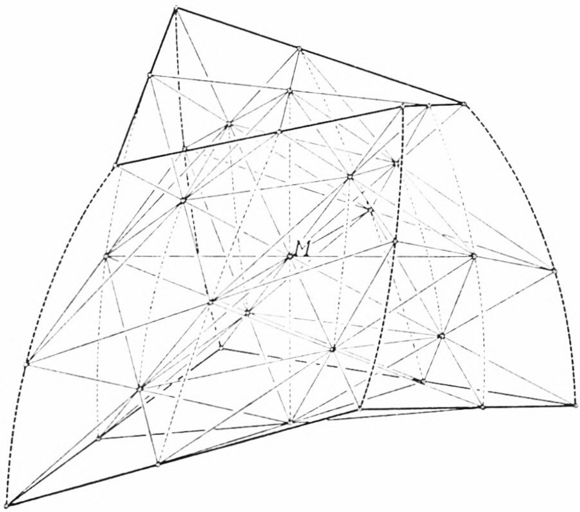
(*Zusatz*: Wenn man zu den Tangentialebenen des Kegels und Zylinders noch die Meridianebenen dazu nimmt, erhält man die allgemeinste Anordnung von Ebenen, bei der durch jeden Schnittpunkt fünf Ebenen hindurchgehen. Diese Tatsache ist bei der früheren Untersuchung der Tetraeder-Oktaeder-Gefüge nicht bemerkt worden.)

Durch die Meridianebenen, ferner durch die zu dem vorgegebenen Drehkegel koaxialen und konzentrische Drehkegel und die zu dem vorgegebenen Zylinder koaxialen Drehzylinder ergibt sich ein zerschränktes Würfelgefüge von der auf S. 182 beschriebenen Art (vgl. Figur 12). Die beiden Systeme der geradlinigen Kanten sind in diesem Übergangsbeispiel in gewissem Sinne ausgezeichnet vor den übrigen Geraden des Gestänges; sie bilden ein Parallelstrahlenbündel, dessen Strahlen parallel sind zu den Achsen der koaxialen Zylinder, und ein Bündel von Geraden durch die Spitze der konzentrischen Kegel. Die vier Systeme der geradlinigen Diagonalen gehören zu einer speziellen Strahlenkongruenz 4. Ordnung 2. Klasse, welche den vorgegebenen Drehzylinder und den vorgegebenen Drehkegel, also die zerfallende Developpable 4. Klasse 1. Spezies des Tetraeder-Oktaeder-Gefüges, als Brennfläche besitzt. Die Brennfläche ist die Umhüllende des Gestänges und des Tetraeder-Oktaeder-Gefüges. Die krummlinigen Kanten der zerschränkten Würfel sind Kreisbögen. Die Sehnen aller krummlinigen Kanten aller Würfel mit gemeinsamem Diagonalenschnittpunkt sind zueinander parallel. Satz 9, S. 172 ist also in der Tat für das hier besprochene Übergangsbeispiel noch gültig.

(*Bemerkung*: Die Diagonalkurven der Dreiecksnetze, welche in dem Gestänge enthalten sind, bilden eine merkwürdige Konfiguration von Kegelschnitten derart, daß in jedem Knotenpunkt 12 Kegelschnitte zusammentreffen.)

Die allgemeinen Gestänge mit je sechs sich schneidenden gleichberechtigten Geraden gehören, wie wir bereits festgestellt haben, zu allgemeinen nicht zerfallenden Developpablen 4. Klasse 1. Spezies. Sie sind herausgegriffen aus der Achsenkongruenz 6. Ordnung 2. Klasse dieser Developpablen und haben die Developpable zur umhüllenden Brennfläche[1]). Ferner wissen wir, daß die Gestänge entweder in zentrischer Symmetrie angeordnet werden können oder in vierfacher Symmetrie in Bezug auf die Seiten eines windschiefen Vierseits.

Beispiel.



Figur 15.

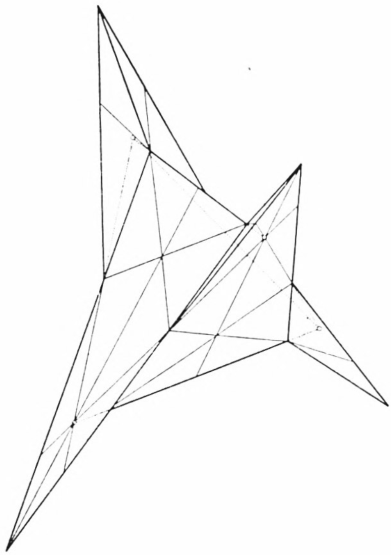
Als Beispiel betrachten wir ein allgemeines vierfach symmetrisches Gestänge. Die Seiten des Vierseits, in Bezug auf welches das Gestänge symmetrisch ist, sind gleichlang und schließen miteinander gleiche Winkel ein. In Figur 15 sind die acht um den Symmetriemittelpunkt herumliegenden Würfel einer zu dem Gestänge gehörigen Raumeinteilung gezeichnet. Die Würfel sind von der in Figur 12 skizzierten und auf S. 182 beschriebenen Art:

---

[1]) R. Sauer, Die Raumeinteilungen, welche von Ebenen erzeugt werden, von denen je vier sich in einem Punkt schneiden. Sitzungsb. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-nat. Abt., 1925, p. 46 bzw. p. 49 ff.

Zwei Systeme von Kanten sind geradlinig, ebenso sämtliche Hauptdiagonalen. In Figur 15 sind wiederum die geraden Linien ausgezogen, die aus Raumkurven 4. Ordnung 1. Spezies bestehenden krummlinigen Würfelkanten sind gestrichelt. Das Gebilde hat zwei Symmetrieebenen durch je zwei Gegenecken des windschiefen Vierseits, in Bezug auf welches die Anordnung symmetrisch ist. Die von den in den Symmetrieebenen liegenden Würfelecken ausgehenden krummen Kanten sind aus Symmetriegründen nicht Raumkurven 4. Ordnung, sondern arten in Kegelschnitte aus, welche in den Symmetrieebenen verlaufen.

Das gesamte Gestänge, von dem in Figur 15 nur die acht um den Mittelpunkt herum liegenden Würfel dargestellt sind, kann durch eine endliche Anzahl von geraden Linien zum Abschluß gebracht werden. Es wird in seiner Gesamtheit in denkbar weitestmaschiger Form durch Figur 16 veranschaulicht[1]).



Figur 16.

Die in diesem Paragraphen untersuchten Geradengestänge haben wir ursprünglich aufgefaßt als die vier Systeme von Diagonalen und als zwei Systeme von geradlinigen Kanten zerschränkter Würfelgefüge.

Im Verlaufe der Untersuchungen ergab sich dann eine naturgemäßere Deutung, indem wir die Raumeinteilung ins Auge faßten, welche durch die vier Systeme von Ebenen, die in dem Gestänge enthalten sind, bewerkstelligt wird. Die Elemente dieser Raumeinteilung sind Oktaeder mit im allgemeinen windschiefen Gegen-

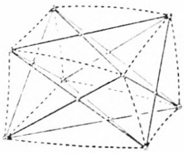
[1]) Figur 16 ist entnommen aus der früheren Arbeit „Die Raumeinteilungen, welche durch Ebenen erzeugt werden usw." Sitzungsbericht vom 13. Juni 1925, S 51; Figur 13 und 14 sind entnommen aus der wiederholt zitierten Arbeit „Über dreifache Geradenanordnungen in der Ebene usw." Sitzungsbericht vom 12. Juli 1924, S. 146 und 149.

kanten und Tetraeder. Die Anordnung der Polyeder ist die nämliche wie im regulären Falle, wenn nämlich alle Oktaeder und Tetraeder regulär und kongruent sind. Es liegen also um jeden Knotenpunkt sechs Oktaeder und acht Tetraeder herum, an jeder Kante treffen zwei Oktaeder und zwei Tetraeder zusammen, jedes Seitendreieck trennt ein Oktaeder von einem Tetraeder.

Schließlich weisen wir noch auf eine letzte mit dem Gestänge anschaulich verknüpfte Raumeinteilung hin:

In dem Gestänge sind drei Systeme von Regelflächen 2. Grades enthalten, welche in dem zugehörigen Tetraeder-Oktaeder-Gefüge als Diagonalflächen durch die Oktaedergegenkanten erscheinen. Alle diese Regelflächen 2. Grades, welche bekanntlich einer Schar von Flächen 2. Klasse entnommen sind, schneiden sich zu je dreien in den Knotenpunkten des Gestänges. Dadurch entsteht eine Einteilung des Raumes in achteckige Sechsflächner (vgl. Figur 17).

Die Seitenflächen der Sechsflächner werden von Regelflächen 2. Grades gebildet und die Diagonalen in den Seitenflächen sind gerade Linien. Die Kanten der Sechsflächner sind Raumkurven 4. Ordnung 1. Spezies. Die geraden Linien sind wiederum ausgezogen, die krummen Linien gestrichelt.



Figur 17.

In diesem Zusammenhange kann das Gestänge aufgefaßt werden als Zerschränkung eines regulären Würfelgefüges derart, daß die sechs Systeme der Diagonalen in den Seitenquadraten der Würfel geradlinig bleiben, während die Hauptdiagonalen und Kanten in krumme Linien deformiert werden.

Besonders bemerkenswert ist die zuletzt beschriebene Raumerfüllung deswegen, weil die Flächen jeder beliebigen Schar von Flächen 2. Klasse so angeordnet werden können, daß sie ein zerschränktes Würfelgefüge der beschriebenen Art bilden.

§ 6.

Die Geradenanordnungen mit je sieben sich schneidenden Geraden.

Nachdem wir die zerschränkten Würfelgefüge untersucht haben, bei denen außer den vier Systemen von Hauptdiagonalen noch zwei Systeme von Kanten geradlinig sind, wenden wir uns jetzt zu den Würfelgefügen, bei denen neben den Hauptdiagonalen sämtliche drei Systeme von Würfelkanten aus geraden Linien bestehen. Wir kommen damit zu dem dritten in der Einleitung besprochenen Problem (Frage c) zurück (vgl. S. 137 und Figur 1 c).

Bereits auf S. 138 haben wir einige unmittelbar anschauliche Eigenschaften dieser Gestänge mit je sieben sich schneidenden Geraden angegeben. Insbesondere haben wir erkannt, daß die sechs Systeme der Würfeldiagonalflächen zu Ebenen ausgeartet sind. Mit dem Gestänge ist also in gegenseitig eindeutiger Beziehung eine Ebenenanordnung verknüpft, bei der in jedem Knotenpunkt sechs Ebenen zusammentreffen. Das vollständige Schnittliniensystem der Ebenenanordnung ergibt das Gestänge der zu je sieben sich schneidenden Geraden.

Bei den in § 5 behandelten Gestängen mit je sechs sich schneidenden Geraden sind sämtliche Knotenpunkte und Geraden miteinander gleichberechtigt. Bei den hier zur Rede stehenden Gestängen sind die Knotenpunkte ebenfalls alle gleichwertig, dagegen müssen wir zwei grundsätzlich verschiedene Arten von Geraden auseinander halten, die Würfeldiagonalen und die Würfelkanten. In jeder Würfelkante treffen zwei mit dem Gestänge verknüpfte Ebenen zusammen, während in jeder Würfeldiagonale sich drei Ebenen schneiden. In jeder der sechs sich schneidenden Ebenen liegen je drei der von dem betreffenden Knotenpunkt ausgehenden Geraden, nämlich jeweils zwei Würfeldiagonalen und eine Würfelkante. Die gesamte Geradenanordnung geht von einem halbregulären Grundtypus aus, wie schon in der Einleitung auseinander gesetzt wurde.

Statt nun die Untersuchung des Gestänges direkt zu betreiben, erörtern wir zunächst die mit dem Gestänge verknüpften Ebenenanordnungen. Dadurch, daß wir die allgemeinsten Ebenenanordnungen der verlangten Art auffinden, gewinnen wir in dem vollständigen System der Schnittlinien dieser Ebenen die allgemeinsten gesuchten Gestänge.

In § 5 sind die Ebenenanordnungen behandelt, von denen je vier Ebenen sich in einem Punkte schneiden und welche dadurch ein Tetraeder-Oktaeder-Gefüge erzeugen. Unter diesen Gebilden müssen die gesuchten spezielleren Ebenengefüge, vorausgesetzt, daß sie überhaupt existieren, enthalten sein. In der Tat sieht man, wenn man die verschiedenen Ausartungsmöglichkeiten der

Tetraeder-Oktaeder-Gefüge der Reihe nach betrachtet, daß der folgende besondere Fall der Tetraeder-Oktaeder-Gefüge als einziger zu den gesuchten Anordnungen mit je sechs sich schneidenden Ebenen führt:

Die umhüllende Developpable 4. Klasse 1. Spezies ist in ein windschiefes Vierseit $ABCD$ ausgeartet[1]). Das Tetraeder-Oktaeder-Gefüge hat dann sehr spezielle Eigenschaften: Die Kanten eines jedes Oktaeders des Gefüges lassen sich jeweils zu einem windschiefen und zwei ebenen Vierseiten zusammenfassen. Unter den drei Systemen der Diagonalflächen durch die Oktaedergegenkanten ist zunächst das ausgeartete Büschel von Flächen 2. Ordnung enthalten, welches das windschiefe Vierseit $ABCD$ als Grundkurve besitzt. Die übrigen Diagonalflächen arten in die Ebenen zweier Büschel aus, deren Achsen mit dem windschiefen Vierseit die Kanten eines Tetraeders bilden.

Die vier Büschel der Seitenebenen und die beiden Büschel der Diagonalebenen des Tetraeder-Oktaeder-Gefüges ergeben eine Ebenenanordnung mit je sechs sich schneidenden Ebenen, welche alle verlangten Eigenschaften besitzt und die allgemeinste Ebenenanordnung der gewünschten Art ist. Die Gesamtheit der Schnittlinien stellt das gesuchte Gestänge dar.

> (*Zusatz*: Die Tatsache, daß die sechs Ebenenbüschel durch die Kanten eines Tetraeders den allgemeinsten Typus einer Ebenenanordnung mit je sechs sich in einem Punkt schneidenden Ebenen ergeben, wurde bei der früheren Untersuchung der Tetraeder-Oktaeder-Gefüge übersehen.)

Bei der im vorangehenden beschriebenen Erzeugungsweise sind die Kanten AB, BC, CD, DA des Tetraeders $ABCD$ und die Ebenenbüschel durch diese Kanten bevorzugt. Tatsächlich sind alle sechs Ebenenbüschel für das schließlich entstandene Gebilde gleichberechtigt: Die von einem Knotenpunkt ausgehenden sechs Ebenen sind die sechs Ebenen durch die Kanten des Tetraeders $ABCD$, die sieben in dem Knotenpunkt sich schneidenden Geraden sind die vier Verbindungslinien mit den Tetraedereck-

[1]) R. Sauer, Die Raumeinteilungen, welche durch Ebenen erzeugt werden, von denen je vier sich in einem Punkt schneiden. Sitzungsb. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abt., 1925, p. 55, II.

punkten A, B, C, D und die drei Geraden, welche den betreffenden Knotenpunkt mit je zwei Gegenkanten des Tetraeders $ABCD$ verbinden.

Das gesamte Gebilde kann aufgefaßt werden als der Inbegriff von drei Tetraeder-Oktaeder-Gefügen. Jedes dieser drei Polyedergefüge hat als umhüllende Developpable eines der drei von den Kanten des Tetraeders $ABCD$ gebildeten windschiefen Vierseite.

Das vorliegende Gestänge der zu je sieben sich schneidenden Geraden und die drei damit verknüpften Polyedergefüge haben die Ebenen des Tetraeders $ABCD$ zu Häufungsebenen. Das Gestänge kann also nicht durch eine endliche Anzahl gerader Linien zum Abschluß gebracht werden. Die Häufungsebenen teilen den Raum in acht Gebiete ein, welche alle bis auf eine beliebig schmale Umgebung der Häufungsebenen von dem Gestänge ausgefüllt werden können. Alle in dem Gestänge enthaltenen Ebenen tragen von den Geraden des Gestänges gebildete Dreiecksnetze, deren Umhüllende in drei nicht in gerader Linie liegende Punkte zerfällt (vgl. S. 153 und Figur 5). Das hier untersuchte Gestänge geht aus dem in Figur 16, S. 190 dargestellten Gefüge durch einen Grenzprozeß hervor, bei dem die Rückkehrkante der umhüllenden Developpablen in ein windschiefes Vierseit ausartet.

Legt man als Tetraeder der Häufungsebenen ein reguläres Tetraeder zugrunde und geht von dem Tetraederschwerpunkt als Anfangsknotenpunkt aus, so hat das entstehende Gestänge natürlich die Symmetrieeigenschaften des regulären Tetraeders.

Die Strahlenkongruenzen, aus denen die Geraden des Gestänges herausgegriffen sind, bestehen zunächst aus vier Strahlenbündeln durch die Eckpunkte des Tetraeders der Häufungsebenen. Die diesen Bündeln entnommenen Geraden des Gestänges sind die Hauptdiagonalen in den mit dem Gestänge verknüpften Würfelgefügen. Die Kanten des Würfelgefüges gehören zu drei linearen Kongruenzen, welche je zwei Gegenkanten des Tetraeders der Häufungsebenen zu Brennlinien haben.

Die hier behandelten Gestänge repräsentieren nur eine teilweise Zerschränkung, weil die Würfeldiagonalen nach wie vor Strahlenbündel bilden. Allerdings liegen die Scheitel dieser Bündel nicht mehr in einer Ebene wie im regulären Falle.

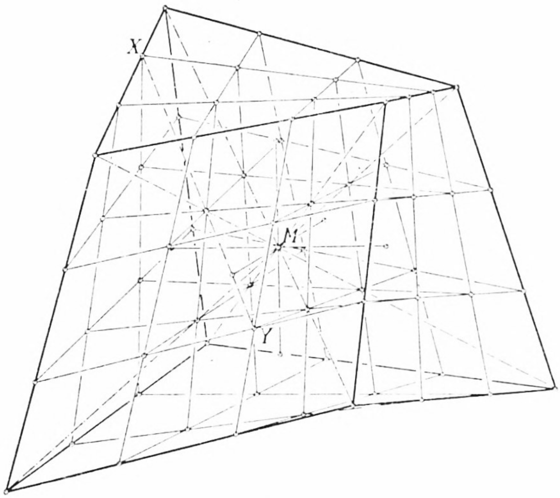
Die Diagonalflächen durch die windschiefen Oktaedergegenkanten in den drei zu dem Gestänge gehörigen Tetraeder-Oktaeder-Gefügen ergeben die in dem Gestänge enthaltenen Regelflächen 2. Grades. Alle diese Flächen bilden drei spezielle Büschel, welche die drei windschiefen Vierseite, die von den Kanten des Tetraeders der Häufungsebenen gebildet werden, zu Grundkurven haben. In den mit dem Gestänge verknüpften Würfelgefügen erscheinen die hier besprochenen Regelflächen 2. Grades als die drei Systeme der Seitenflächen. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß für diese Würfelgefüge die Aussagen des Satzes 9, S. 172 nicht mehr gültig sind.

Alle in diesem Paragraphen besprochenen Gestänge können bei passender Wahl der Maschenweite projektiv aufeinander bezogen werden. Dabei entsprechen sich stets die Tetraeder der Häufungsebenen. Läßt man die Projektivität dadurch ausarten, daß das Tetraeder der Häufungsebenen allmählich in eine Ebene zusammenklappt, so ergeben sich die zu dem nicht zerschränkten Gestänge der Kanten und Hauptdiagonalen eines regulären Würfelgefüges kollinearen Gebilde. Dabei werden die in dem Gestänge enthaltenen ebenen Dreiecksnetze kollinear zu dem regulären Dreiecksnetz der gleichseitigen kongruenten Dreiecke.

Die zerschränkten Gestänge der zu je sieben sich schneidenden Geraden bilden ein Zwischenglied zwischen den in § 5 besprochenen Gestängen, welche als Verallgemeinerungen der allgemeinen ebenen Dreiecksnetze aufgefaßt werden können, und den zu den regulären Würfelgefügen gehörenden nicht zerschränkten Gestängen mit je sieben sich schneidenden Geraden, welche den ebenen Möbiusschen Netzen analog sind. Es ist bemerkenswert, daß im Raume ein derartiger Übergangsfall existiert, zu dem ein Analogon in der Ebene nicht angegeben werden kann; untersucht man nämlich in der Ebene Geradenanordnungen mit mehr als drei sich schneidenden Geraden, so kommt man unmittelbar zum Möbiusschen Netz, während im Raume die Gestänge mit mehr als sechs sich schneidenden Geraden im allgemeinen noch nicht den zum regulären kollinearen Fall ergeben.

In Figur 18 sind siebenundzwanzig zerschränkte „Würfel" dargestellt, welche zusammen einen größeren zerschränkten „Würfel" aufbauen und zu einem Gestänge mit je sieben sich schneidenden

Geraden gehören. Die sämtlichen Kanten sind ausgezogen. Von den Raumdiagonalen der Würfel, welche hier auch geradlinig sind, haben wir nur die vier im Mittelpunkt M des innersten Würfels zusammentreffenden Geraden strichpunktiert eingezeichnet, ferner noch eine beliebige weitere Diagonalgerade XY. Die vierte, fünfte und sechste von M auslaufende Gerade des Gestänges ist jeweils bis zu den benachbarten Knotenpunkten angegeben. Die Tatsache, daß in jedem Knotenpunkt sieben Gerade zusammentreffen, ist also in der Figur nur für den Punkt M anschaulich gemacht, kann aber an der Zeichnung für alle übrigen Knotenpunkte leicht nachgeprüft werden. Das Tetraeder der Häufungsebenen ist regulär und hat M als Mittelpunkt.



Figur 18.

(*Bemerkung*: Die Diagonalkurven der Dreiecksnetze, welche von den in diesem Paragraphen besprochenen Gestängen gebildet werden, stellen eine merkwürdige Konfiguration von Kegelschnitten dar derart, daß in jedem Knotenpunkt 18 Kegelschnitte zusammentreffen.)

Zu den Gestängen der zu je sieben sich schneidenden Geraden gehören, wie wir gesehen haben, drei spezielle Tetraeder-Oktaeder-Gefüge, welche von jeweils vier aus den sechs mit dem Gestänge verknüpften Ebenenbüscheln erzeugt werden. Wir betrachten jetzt noch die Raumeinteilung, welche durch sämtliche sechs Ebenenbüschel zusammengenommen hervorgerufen wird:

Die Zusammenhangsverhältnisse sind die nämlichen wie bei der auf S. 163 beschriebenen Raumeinteilung, welche die sechs Systeme von Regelflächen 2. Grades bewerkstelligen, die zu einem Gestänge mit je vier sich schneidenden Geraden gehören. Anstelle der Regelflächen 2. Grades treten jetzt lauter Ebenen und die Elemente der Raumeinteilung sind eigentliche Tetraeder mit lauter geradlinigen Kanten und ebenen Seitenflächen. Durch Übertragung der auf S. 164 festgestellten Beziehungen gewinnen wir unmittelbar folgendes Ergebnis:

> Die mit dem Gestänge der zu je sieben sich schneidenden Geraden gehörigen sechs Ebenenbüschel bewerkstelligen eine Raumeinteilung in lauter Tetraeder. Um jeden Knotenpunkt liegen 24 Tetraeder herum. Jeweils vier Kanten der Tetraeder sind je sechs, die beiden übrigen Kanten je vier Tetraedern gemeinsam.

Das hier erwähnte Tetraedergefüge stellt das anschaulichste und unmittelbarste Analogon zu den ebenen Dreiecksnetzen dar, indem anstelle der Dreiecke Tetraeder gesetzt werden. Ausdrücklich sei darauf hingewiesen, daß bei dieser nächstliegenden Übertragung auf den Raum der allgemeine Charakter der Anordnung, wie er bei den allgemeinen ebenen Dreiecksnetzen vorhanden ist, in hohem Maße eingeschränkt werden muß.

Geht man von den hier behandelten Gestängen mit je sieben sich schneidenden Geraden noch weiter, indem man fordert, daß in jedem Knotenpunkt mehr als sieben Gerade zusammentreffen, so muß das Tetraeder der Häufungsebenen ausarten, d. h. in eine Ebene zusammenklappen und es ergibt sich das räumliche Analogon des Möbiusschen Netzes.

Schlussbemerkung.

In der vorliegenden Arbeit sind alle diejenigen Gestänge untersucht worden, welche aus einem regulären oder halbregulären Grundtypus durch Zerschränkung hervorgehen. Natürlich kann man in sehr mannigfaltiger Weise Geradenanordnungen definieren, welche keinen regulären oder halbregulären Grundtypus besitzen. Von dieser Art sind die zu Beginn des § 5 erwähnten Gestänge mit je fünf sich schneidenden Geraden. Beispielsweise kann man auch Geradenanordnungen mit je vier sich schneidenden Geraden angeben, welche nicht auf einen regulären oder halbregulären Typus zurückgeführt werden können. Um ein solches Gestänge zu gewinnen, braucht man nur zu den drei Systemen der geradlinigen Kanten eines Würfelgefüges als viertes System solche Gerade dazu zu nehmen, welche die „Mittelpunkte“ und Ecken nicht benachbarter „Würfel“ in gesetzmäßiger Weise verbinden. Man kann zeigen, daß auch diese Gestänge ebenso wie die in § 2 untersuchten Geradenanordnungen wesentlich mit der Theorie der Strahlensysteme (4,2) verknüpft sind.