

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

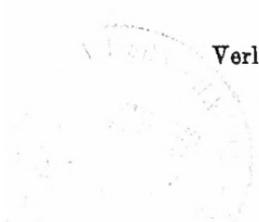
Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1926. Heft I
Januar- bis März-sitzung

München 1926

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München



Achsensymmetrisches Ausknicken zylindrischer Schalen.

Von **Ludwig Föppl** in München.

Vorgelegt von S. Finsterwalder am 16. Januar 1926.

Einleitung.

Die Veranlassung zur vorliegenden Arbeit gaben Versuche, die Herr Dr. Geckeler der Firma Carl Zeiß in Jena im Frühjahr 1925 im mechanisch-technischen Laboratorium der Technischen Hochschule München über das achsensymmetrische Ausknicken dünnwandiger Hohlzylinder aus Messing angestellt hat. Er kam dabei zu dem Resultat, daß die bisher in der Literatur bekannte theoretische Formel für das Ausknicken solcher Hohlzylinder mit den Experimenten nicht übereinstimmt, sondern daß die theoretische Knicklast das Mehrfache der wirklichen beträgt. Dabei zeigten die von der Firma Zeiß mit aller Sorgfalt hergestellten Hohlzylinder beim Ausknicken eine vollkommen achsensymmetrische Gestalt, wie dies bei der Theorie vorausgesetzt wird. Ein ähnlicher großer Unterschied zwischen der experimentellen und theoretischen Knicklast besteht auch bei den Versuchen, die C. v. Bach¹⁾ an dünnwandigen Hohlzylindern aus Flußeisen durchgeführt hat. Es ergab sich damit die Forderung einer genauen Nachprüfung der Grundlagen, auf denen die bisherige Theorie aufbaut. Wie die vorliegende Arbeit zeigen wird, ist die Differentialgleichung vierter Ordnung, die für das achsensymmetrische Ausknicken dünnwandiger Hohlzylinder schon seit längerem bekannt ist²⁾, vollkommen in Ordnung. Sie wird hier nochmals

¹⁾ C. v. Bach, Festigkeitslehre, 7. Aufl., 1917, S. 202.

²⁾ S. Timoschenko, Zeitschrift f. Mathem. u. Physik 1910, S. 378 ff.
R. Lorenz, Zeitschrift d. Vereins deutscher Ingenieure 1908, S. 1706.

abweichend vom üblichen Weg in § 1 abgeleitet. Von den beiden wesentlich verschiedenen Lösungen dieser Differentialgleichung wurde bisher nur die eine Lösung, nämlich $\sin ax$ bzw. $\cos ax$ der Berechnung der Knicklast zu Grunde gelegt, während die andere, nämlich $e^{-ax} \sin \beta x$ bzw. $e^{-ax} \cos \beta x$ gar nicht in Betracht gezogen wurde. Wir werden sehen, daß diese letztere Lösung für das Ausknicken von Hohlzylindern wesentlich ist und daß sich die große Unstimmigkeit zwischen Experiment und Theorie damit beheben läßt.

§ 1.

Ableitung der Differentialgleichung.

Wir setzen voraus, daß die Abmessungen des Hohlzylinders so gewählt sind, daß das Ausknicken vor Überschreiten der Proportionalitätsgrenze des auf Druck beanspruchten Materials eintritt. Wie später näher begründet wird, erreicht man diese Voraussetzung um so eher, je größer das Verhältnis $r:h$ zwischen dem mittleren Radius r und der Wandstärke h des Hohlzylinders ist. Bei den Versuchen von Bach wurde z. B. ein Hohlzylinder aus Flußeisen von den Abmessungen $r = 1,7$ cm; $h = 0,02$ cm verwendet, so daß $r:h = 85$ beträgt. Bei den Versuchen von Dr. Geckeler wurde unter anderen ein Hohlzylinder aus Messing von den Abmessungen $r = 9,55$ cm, $h = 0,323$ cm verwendet, so daß sich $r:h = 296$ berechnet. Damit ein seitliches Ausknicken des Hohlzylinders als Ganzes ausgeschlossen ist, darf die Zylinderhöhe im Vergleich zum Durchmesser nicht zu groß gewählt werden. Jedenfalls kommt ein derartiges Ausweichen, dem die Eulersche Knicklast entsprechen würde, nicht in Frage, so lange die Höhe des Zylinders nicht um das Vielfache größer als der Durchmesser ist. Wir wollen den Eulerschen Knickfall hier ausschließen. Ferner sei noch vorausgesetzt, daß durch sorgfältige Bearbeitung der Hohlzylinder möglichst gleichmäßige Wandstärke h erreicht ist und daß auch alle anderen Vorbedingungen für den Versuch so genau erfüllt sind, daß jede Unsymmetrie nach Möglichkeit vermieden wird.

Bringen wir den Hohlzylinder achsial unter eine Druckpresse, so wird sich offenbar vor dem Ausknicken ein Längsspannungszustand einstellen, mit der Druckspannung $\sigma_l = \frac{P}{2\pi r h}$, wenn P die gesamte Drucklast bedeutet. Der gedrückte Hohlzylinder wird sich dabei etwas erweitern, so daß sich sein Radius um eine Größe

$$\delta = \frac{1}{m} \cdot \frac{P}{2\pi h \cdot E} \quad (1)$$

vergrößert, worin $1:m$ die Poissonsche Verhältniszahl bedeutet. Hierbei ist allerdings zu beachten, daß durch die Reibung an den Druckplatten die Durchmesserergrößerung des Randes entweder ganz unmöglich ist oder wenigstens nur teilweise erfolgt. Für das Ausknicken der Zylinderschalen ist dies von Wichtigkeit. Um allen Möglichkeiten gerecht zu werden, wollen wir den Einfluß der Reibung an den Druckplatten dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir als Grenzbedingung für den Rand vorschreiben, daß er um $\alpha \cdot \delta$ gegenüber der Mitte der Zylinderschale zurückbleibt, wobei α irgend eine Zahl zwischen 0 und 1 bedeuten kann; $\alpha = 0$ entspricht dabei der vollkommenen Vernachlässigung der Reibung an den Druckplatten, so daß die ganze Zylinderschale eine gleichmäßige Vergrößerung des Radius r um δ erfährt, während $\alpha = 1$ dem anderen Grenzfall entspricht, daß sich der Rand infolge der Reibung überhaupt nicht ausdehnen kann. In diesem letzteren Fall wird sich eine Verbiegung der Zylinderschale in der Nähe des Randes einstellen, die aber längs der Erzeugenden des Zylinders rasch abklingt, wie wir das später noch im Einzelnen sehen werden.

In Abb. 1 ist der Meridian der Zylinderschale im ausgeknickten bzw. verbogenen Zustand gezeichnet, wobei die Ordinaten w des Meridians von dem Radius $r + \delta$ aus nach außen hin positiv gerechnet werden. Am Rand $x = 0$ wirkt auf einen Streifen, der zum Zentriwinkel $d\varphi$ gehört, die Drucklast $P \cdot \frac{d\varphi}{2\pi}$ und

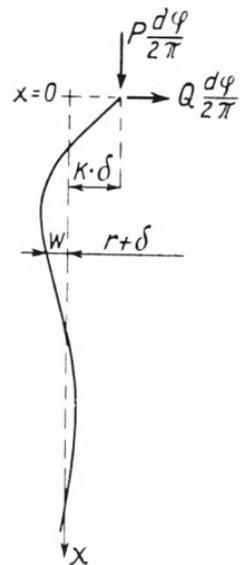


Abb. 1

infolge der Reibung der Druckplatte eine Reibungskraft $Q \cdot \frac{d\varphi}{2\pi}$, die ein Zurückbleiben des Randes um $\varkappa \cdot \delta$ gegenüber den mittleren Teilen der Zylinderschale bewirkt. Die Größe von Q ist dabei zunächst unbekannt. Wegen der Achsensymmetrie genügt es, sich auf einen Streifen vom Zentriwinkel $d\varphi$ zu beschränken. Wäre überall $w = 0$, so würde die Zylinderschale nur die Längsspannung σ_t aufnehmen. Infolge der Abweichung w von der x -Achse treten aber noch Tangentialspannungen σ_t hinzu, die für positives w Zugspannungen, für negatives w Druckspannungen sind. Der Zusammenhang zwischen w und σ_t geht aus folgender Überlegung hervor, wobei jetzt immer r statt $r + \delta$ geschrieben werden soll. Es ist einerseits $\varepsilon_t = \frac{w}{r}$ und andererseits $\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E}$, so daß sich der folgende Zusammenhang zwischen den Tangentialspannungen und der Ausweichung w ergibt:

$$\sigma_t = \frac{w}{r} E. \quad (2)$$

Wir können den betrachteten Streifen als einen auf Knicken beanspruchten Stab ansehen, der am einen Ende mit $P \frac{d\varphi}{2\pi}$ achsial und $Q \frac{d\varphi}{2\pi}$ normal beansprucht wird und außerdem entlang der Stabachse eine Belastung senkrecht zur Stabachse von der Intensität

$$q = \sigma_t \cdot h d\varphi \quad (3)$$

aufzunehmen hat.

Wir wollen gleich den allgemeinsten Fall heranziehen, daß am Schalenrand noch ein Einspannmoment $M_0 \frac{d\varphi}{2\pi}$ infolge einer Einspannung herrscht.

Die Gleichung der elastischen Linie lautet dann:

$$EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = - \left[\frac{P}{2\pi} d\varphi \cdot (w + \varkappa \cdot \delta) + \int_{\xi=0}^{\xi=x} q(\xi)(x - \xi) d\xi + \frac{Q}{2\pi} d\varphi \cdot x + \frac{M}{2\pi} d\varphi \right]; \quad (4)$$

durch einmalige Differentiation nach x ergibt sich daraus:

$$EJ \cdot \frac{d^3 w}{dx^3} = - \left[\frac{P}{2\pi} d\varphi \cdot \frac{dw}{dx} + \int_{\xi=0}^{\xi=x} q(\xi) d\xi + \frac{Q}{2\pi} d\varphi \right]$$

und durch nochmalige Differentiation nach x :

$$EJ \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} = - \left[\frac{P}{2\pi} d\varphi \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} + q(x) \right].$$

Mit Berücksichtigung von Gl. (2) und (3) und indem man

$$J = \frac{r h^3}{12} d\varphi \quad (5)$$

einsetzt, ergibt sich

$$E \frac{r h^3}{12} \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} + E \frac{h}{r} \cdot w = 0. \quad (6)$$

Dies ist die bekannte Differentialgleichung für das achsensymmetrische Ausknicken von Hohlzylindern, die unter der Voraussetzung gilt, daß beim Ausknicken des Zylinders die Proportionalitätsgrenze des Materials nirgends überschritten ist. In Gl. (6) ist P als Drucklast angenommen.

Es sei hier auf zwei Sonderfälle der Gl. (6) hingewiesen.

Wächst der Radius r des Zylinders über alle Grenzen, so wird $r d\varphi = b$ eine endliche Größe und ebenso $\frac{P}{2\pi} d\varphi = P'$. Gl. (6) vereinfacht sich alsdann zu:

$$E \frac{b h^3}{12} \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} + P' \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

die nach zweimaliger Integration auf die gewöhnliche Differentialgleichung für den auf Knicken beanspruchten Stab führt.

Der andere Sonderfall betrifft die nicht oder kaum biegesteife zylindrische Haut. Ist nämlich die Wandstärke h außerordentlich klein, so daß $E \frac{r h^3}{12} \approx 0$ (z. B. dünnes Papier), so vereinfacht sich Gl. (6) zu:

$$\frac{P}{2\pi} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} + E \frac{h}{r} \cdot w = 0.$$

Man kann diese Gleichung ohne weiteres aus der Differentialgleichung der Seilkurven ableiten. Wie man aus der Lösung dieser Gleichung entnehmen kann, tritt eine sehr enge Fältelung ein, sobald die zylindrische Haut axial gedrückt wird. Dieser Sonderfall läßt schon erkennen, wie wichtig es ist, sich über die

vorausgesetzte Größenordnung der maßgebenden Größen genauen Aufschluß zu geben. Um diese für die weitere Untersuchung grundlegende Frage gleich jetzt zu erledigen, gehen wir von der Voraussetzung aus, daß bis zum Eintritt des Zusammenknickens des Hohlzylinders nirgends die Proportionalitätsgrenze des Materials überschritten wird; d. h. es muß die folgende Ungleichung bestehen:

$$\frac{P}{2\pi r h} < \sigma_p, \quad (7)$$

wenn mit σ_p die Proportionalitätsgrenze bezeichnet wird. Nun gilt für die meisten Materialien: $\sigma_p : E \approx 1 : 1000 \ll 1$, d. h. $\sigma_p : E$ ist klein von 1. Ordnung. Wir nennen eine Größe, die höchstens 1 : 1000 einer anderen Größe ist, klein von nächst höherer Ordnung. Auf Grund dieser Definition der Größenordnung folgt aus Ungleichung (7):

$$\frac{P}{2\pi r h E} \ll 1, \quad (8)$$

d. h. $\frac{P}{2\pi r h E}$ ist klein von 1. Ordnung, da diese Zahlengröße kleiner als 1 : 1000 ist.

Dagegen ist die Größe $\frac{P}{2\pi h^2 E}$, die aus der letzten Zahl durch Multiplikation mit $r : h$ gewonnen wird, wegen der Größe dieses Faktors im allgemeinen nicht als klein von 1. Ordnung anzusehen, sondern als endliche Größe.

Letzteres erkennt man auch aus der Differentialgleichung (6).

Dividiert man nämlich Gl. (6) durch $Eh \sqrt{\frac{h}{r}}$, so erhält man:

$$\frac{1}{12} (\sqrt{r h})^3 \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{P}{2\pi E h^2} \sqrt{r h} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{w}{\sqrt{r h}} = 0. \quad (9)$$

Aus dieser Darstellung sieht man zunächst, daß die für das Ausknicken des Zylinders maßgebende Zylinderabmessung $\sqrt{r h}$ ist, im Vergleich zu der w als klein von 1. Ordnung anzusehen ist. Die Größen $\frac{w}{\sqrt{r h}}$, $\sqrt{r h} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2}$ und $(\sqrt{r h})^3 \cdot \frac{d^4 w}{dx^4}$ sind dimensionslos und untereinander von gleicher Größenordnung, wie sich mit Hilfe der Lösung der Differentialgleichung zeigen ließe; ebenso

sind die Koeffizienten dimensionslos und alle von gleicher Größenordnung, wenn wir nicht einen Sonderfall vor uns haben. Daraus folgt, daß auch $\frac{P}{2\pi h^2 E}$ als endliche Größe anzusehen ist. Da aber dieser Ausdruck aus der in Ungleichung (8) auftretenden, unendlich kleinen Größe $\frac{P}{2\pi r h E}$ durch Multiplikation mit $r:h$ gewonnen wird, so muß dieses Verhältnis sehr groß sein als Voraussetzung für die Gültigkeit unserer Entwicklungen.

§ 2.

Lösung der Differentialgleichung.

Die bisher dem Knickvorgang zu Grunde gelegte Lösung der Differentialgleichung (6) lautet:

$$w = A \sin ax + B \cos ax. \quad (10)$$

Durch Einsetzen ergibt sich für a^2 :

$$a^2 = \frac{3P}{\pi r h^3 E} \pm \sqrt{\left(\frac{3P}{\pi r h^3 E}\right)^2 - \frac{12}{r^2 h^2}}. \quad (11)$$

Damit eine reelle Lösung für a möglich ist, muß

$$\left(\frac{3P}{\pi r h^3 E}\right)^2 \geq \frac{12}{r^2 h^2}$$

oder

$$P > \frac{2\pi}{\sqrt{3}} E h^2 \quad (12)$$

sein. Wir wollen den kritischen Wert für die Knicklast als „Knicklast nach Timoschenko“ und mit P_t bezeichnen:

$$P_t = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot E h^2. \quad (13)$$

Wie schon in der Einleitung erwähnt, ist der experimentell gefundene Wert der Knicklast nur ein kleiner Bruchteil von P_t . Beim Druck P_t müßte die Meridiankurve des Zylinders in eine Sinuskurve ausknicken, mit der Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{a_t}$, wobei $a_t = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{r h}}$ wird.

Gl. (6) hat aber noch folgende Lösung:

$$w = e^{-ax} (a \sin \beta x + b \cos \beta x). \quad (14)$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung findet man mit der Abkürzung $z = \frac{P}{P_t}$:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{rh}} \sqrt{1-z}, \\ \beta &= \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{rh}} \cdot \sqrt{1+z} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

und die Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt[4]{3}} \frac{\sqrt{rh}}{\sqrt{1+z}}.$$

Es fragt sich, ob ein Ausknicken des Hohlzylinders nach einer gedämpften Sinuskurve, wie sie durch Gl. (14) dargestellt wird, möglich ist und wie groß in diesem Fall die Knicklast ist. Ein Blick auf die Ausdrücke für a und β zeigt zunächst, daß $P < P_t$ sein muß, damit a reell ist.

Für $P = P_t$ oder $z = 1$ wird $a = 0$ und $\beta = \frac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt{rh}}$; d. h. die neue Lösung geht in die Timoschenko'sche über.

Auf den Sonderfall $P = 0$ sei hier hingewiesen. Er entspricht der auf Biegung durch die Randkräfte Q bzw. das Einspannmoment M_0 beanspruchten Zylinderschale. In diesem Fall würden a und β einander gleich und zwar $a = \beta = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{rh}}$ sein.

Die in Gl. (14) noch unbestimmten Integrationskonstanten a und b ergeben sich aus den Grenzbedingungen am Rand $x = 0$. Hier ist nämlich $w_0 = -z \delta$ und ferner $\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)_0 = 0$, wenn wir kein Einspannmoment M_0 annehmen. Wegen

$$\left. \begin{aligned} w &= e^{-ax} (a \sin \beta x + b \cos \beta x), \\ \frac{dw}{dx} &= e^{-ax} [-(a a + b \beta) \sin \beta x + (a \beta - b a) \cos \beta x], \\ \frac{d^2 w}{dx^2} &= e^{-ax} [(a(a^2 - \beta^2) + 2 b a \beta) \sin \beta x + (-2 a a \beta + \\ &\quad + b(a^2 - \beta^2)) \cos \beta x] \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

wird

$$w_0 = b = -z\delta,$$

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)_0 = -2\alpha a\beta + b(\alpha^2 - \beta^2) = 0.$$

Mit der Abkürzung $\frac{P}{P_t} = z$ wird

$$\delta = \frac{1}{m} \frac{P}{2\pi h E} = \frac{h}{m\sqrt{3}} \cdot z$$

und damit

$$b = -z \frac{h}{m\sqrt{3}} \cdot z;$$

$$a = b \cdot \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} = z \frac{h}{m\sqrt{3}} \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Die Lösung lautet folglich:

$$w = z \cdot \frac{h}{m\sqrt{3}} \cdot z \cdot e^{-\alpha x} \left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \cdot \sin \beta x - \cos \beta x \right). \quad (17)$$

Wegen des Faktors $e^{-\alpha x}$ klingt die Randstörung w sehr rasch ab. Voraussetzung für die Gültigkeit der Lösung nach Gl. (17) ist eine Länge des Hohlzylinders, die groß ist gegenüber $\sqrt{r h}$, so daß sich eine große Zahl von Einzelwellen ausbildet, die aber sehr schnell abklingen, so daß im Abstand einiger Wellenlängen vom Rand $w \approx 0$ wird, d. h. sich der normale Längszustand σ_t ausbildet.

Die bisherige Lösung nach Gl. (17) stellt noch kein Ausknicken der Zylinderschale dar, sondern eine Randstörung, die von der Achsiallast P und der Randkraft Q herrührt. Immerhin unterscheidet sich diese Lösung von der Lösung für die reine Verbiegung einer Schale dadurch, daß das Gleichgewicht an der deformierten Schale zum Ausdruck gebracht worden ist, wie es sonst nur bei Stabilitätsuntersuchungen nötig ist. Es ist aus diesem Grunde zweckmäßig, für diese Art der Verformung einen besonderen Namen zu prägen. Ich will sie mit „Stemmen“ oder „Verstemmen“ bezeichnen.

Daß das Verstemmen der Zylinderschale wesentlich von der Randkraft Q abhängig ist, geht aus dem Faktor z in Gl. (17) hervor. Es ließe sich ein Versuch ausführen, bei dem zwischen

der Platte der Druckmaschine und dem Zylinderrand eine sehr nachgiebige Zwischenlage verwendet wird, die dem seitlichen Ausdehnen des Zylinderrandes keinen großen Widerstand entgegensetzt, so daß Q und damit der Faktor z sehr klein wird. Trotzdem wird w an einzelnen Stellen groß, wenn wir uns $z = 1$ d. h. mit P der Timoschenko'schen Knicklast P_t nähern.

Die Größe von Q ergibt sich aus

$$\text{zu } E \cdot \frac{r h^3}{12} \cdot \left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right)_0 = - \frac{Q}{2\pi}$$

$$\text{oder } Q = z \cdot \frac{E}{m} \cdot \frac{\pi \sqrt[3]{3}}{3} h^2 \sqrt{\frac{h}{r}} \cdot \frac{z}{\sqrt{1-z}} \quad (18a)$$

$$\frac{Q}{P_t} = z \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2\sqrt[3]{3}} \sqrt{\frac{h}{r}} \cdot \frac{z}{\sqrt{1-z}} \quad (18b)$$

oder schließlich durch Multiplikation mit $\frac{P_t}{P} = \frac{1}{z}$:

$$\frac{Q}{P} = z \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2\sqrt[3]{3}} \sqrt{\frac{h}{r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z}}. \quad (18c)$$

Legt man das Coulombsche Reibungsgesetz zu Grunde, so bedeutet $Q:P = \nu$ den Reibungskoeffizienten ν für gleitende Reibung. Da $\sqrt{\frac{h}{r}}$ eine kleine Zahl ist, so ist für Werte von z , die nicht gerade nahe an $z = 1$ gelegen sind, der Faktor von z in Gl. (18c) eine sehr kleine Zahl; d. h. im allgemeinen kann kein Gleiten des Randes eintreten, wenn nicht besondere Vorkehrungen getroffen werden, wie z. B. eine Zwischenlage aus sehr nachgiebigem Material. Wir sehen aus dieser Überlegung, daß beim normalen Druckversuch an einem dünnwandigen Hohlzylinder mit $z = 1$ zu rechnen ist, so lange man sich nicht der Timoschenko'schen Knicklast, die $z = 1$ entspricht, nähert.

Da das Ausknicken aber tatsächlich schon viel früher eintritt, so kommt dieser Fall nicht in Betracht. Auf Grund dieser Überlegungen werden wir uns nunmehr dem Ausknicken der Zylinderschale zuwenden, wobei wir $z = 1$, d. h. Unnachgiebigkeit des Randes voraussetzen.

§ 3.

Ausknicken der Zylinderschale durch Verstemmen.

Wir gehen von der Lösung nach Gl. (17) aus. Mit zunehmendem Wert z wächst w und damit die Biegebungsbeanspruchung, die sich infolge des Verstemmens der Schale dem Längsspannungszustand aus σ_l und σ_r überlagert. Es fragt sich, an welcher Stelle die größte Beanspruchung der Schale auftritt. Jedenfalls wird die Stelle, an der die größte positive Ausbauchung w_m erfolgt, mit am stärksten beansprucht. Diese Stelle ergibt sich aus der Bedingung, daß dort $\frac{dw}{dx} = 0$ ist; folglich bestimmt sich die Abszisse x_m , die zu dem maximalen Wert w_m gehört, als kleinste Wurzel der transzendenten Gleichung:

$$\operatorname{tg} \beta x_m = \frac{a\beta - ba}{aa + b\beta} = - \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}. \quad (19)$$

Ferner ist

$$\sin \beta x_m \sqrt{\frac{1+z}{z}}; \quad \cos \beta x_m = - \sqrt{\frac{1-z}{z}};$$

und damit erhält man

$$\frac{w_m}{h} = z \cdot \frac{z}{m \sqrt{6}} \cdot \frac{z}{\sqrt{1-z}} \cdot e^{-\sqrt{\frac{1-z}{1+z}} (z - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}})}. \quad (20)$$

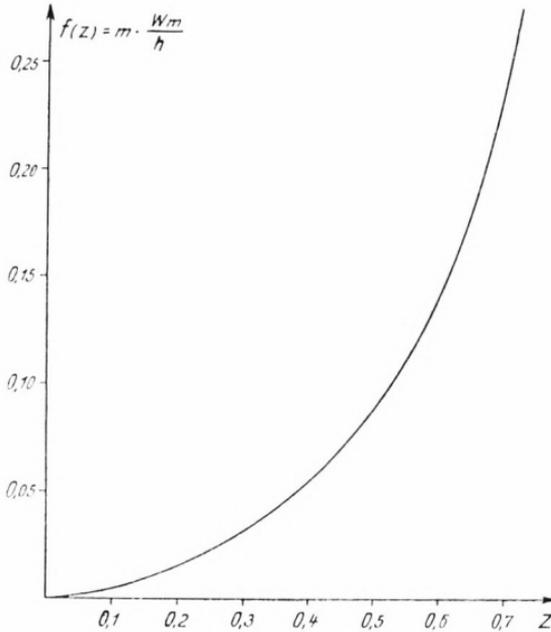
Darin ist noch auf Grund der Überlegungen des vorigen Paragraphen $z = 1$ einzusetzen.

In Abb. 2 ist

$$m \cdot \frac{w_m}{h} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{z}{\sqrt{1-z}} \cdot e^{-\sqrt{\frac{1-z}{1+z}} (z - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}})} = f(z) \quad (21)$$

graphisch dargestellt. Man erkennt aus der Kurve, daß w_m bei wachsendem z stark zunimmt, sobald $z = \frac{1}{2}$ überschritten ist.

An der Stelle w_m setzt sich der Spannungszustand aus drei Anteilen zusammen: die Druckspannung $\sigma_l = \frac{P}{2\pi r h}$ in Richtung der Achse, ferner die Zugspannung $\sigma_l = \frac{w_m}{r} E$ und schließlich die Biegungsspannung, die an der Innenwand eine Druckspannung ist:



$$(\sigma_b)_m = \frac{M_m}{W} = \frac{6 \cdot M_m}{r h^2}, \quad (22)$$

wobei sich das Biegemoment M_m berechnet aus

$$M_m = -EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_m = EJ e^{-\alpha x_m} \sin \beta x_m (a(\alpha^2 - \beta^2) + 2b\alpha\beta)$$

oder nach einfacher Umrechnung:

$$M_m = \frac{1}{2\sqrt{3}} E h^2 \cdot w_m \quad (23)$$

und damit

$$(\sigma_b)_m = \sqrt{3} \cdot E \cdot \frac{w_m}{r}. \quad (24)$$

Berechnet man für die betrachtete Stelle die reduzierte Spannung, so findet man dafür

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_t + (\sigma_b)_m + \frac{1}{m} \sigma_t. \quad (25)$$

Eigentlich hätte vor $\frac{1}{m} \sigma_t$ das negative Zeichen gehört. Wegen des positiven Zeichens müssen wir die Zugspannung σ_t in

der letzten Gleichung zu den Druckspannungen σ_t und $(\sigma_h)_m$ additiv hinzufügen.

Es sei nun als Bedingung für das Ausknicken die nahe-
liegende Annahme zu Grunde gelegt, daß σ_{red} gleich der Pro-
portionalitätsgrenze σ_p des betreffenden Materials wird, so daß
die Bedingung für das Ausknicken lautet:

$$\sigma_p = 2\pi r h + \left(\sqrt{3} + \frac{1}{m} \right) \frac{r}{w_m} \cdot E$$

oder nach Einführung von $z = \frac{P}{P_t}$:

$$\frac{r}{h} \cdot \frac{\sigma_p}{E} = z + \frac{1}{m} \left(\sqrt{3} + \frac{1}{m} \right) \cdot f(z), \quad (26)$$

worin $f(z)$ durch Abb. 2 oder durch Gl. (21) dargestellt wird.

Um die vorliegende Theorie am Experiment zu prüfen, wollen
wir ihr Ergebnis, das durch Gl. (26) zum Ausdruck kommt, mit
den bisher vorliegenden Versuchen vergleichen. C. v. Bach hat
Röhre aus Flußeisen von den Abmessungen $r = 1,7$ cm, $h = 0,02$ cm
ausgeknickt und hat dabei einen durchschnittlichen Wert von
 $P_k = 120$ kg als Knicklast erhalten.

Setzen wir in Gl. (26)

$$\frac{r}{h} = 85; \quad \frac{\sigma_p}{E} = \frac{2400}{2200000} = \frac{1}{920}; \quad m = \frac{10}{3}$$

ein, so liefert die Gleichung (26), die sich durch Probieren an
Hand der Abbildung 2 leicht lösen läßt: $z = 0,15$ oder

$$P_k = 0,15 \cdot P_t = 0,15 \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot 2200000 \cdot 0,0004 = 480 \text{ kg.}$$

Die Theorie liefert einen etwas größeren Wert als der Ver-
such, was darauf zurückgeführt werden muß, daß jede Störung
der Symmetrie, die sich beim Versuch nicht ganz vermeiden läßt,
die Knicklast herabdrückt.

Herr Dr. Geckeler hat bei seinen Versuchen mit Messing-
röhren ungefähr $z = 0,25$ gefunden.

Setzt man in Gl. (26): $\sigma_p = 800$ at; $E = 1000000$ at und
 $m = 3$ ein, was den durchschnittlichen Werten von Messing ent-
spricht, so ergibt sich bei der Zylinderschale mit $r = 9,45$ cm,

$h = 0,032$ cm, also $r : h = 296$ aus Gl. (26) der Wert $z = 0,35$; also auch etwas größer als nach dem Versuch, was zum Teil auf die unvermeidlichen Versuchsfehler, zum Teil aber wohl auch auf die recht unzuverlässigen Werte von σ_p , E und m , die der Rechnung zu Grunde liegen, zurückzuführen ist.

Man kann jedenfalls sagen, daß die vorliegende Theorie die Versuchsergebnisse recht gut wiedergibt. Auch die Stelle, wo sich beim Ausknicken der erste Wulst bildet, stimmt mit der errechneten Stelle von w_m gut überein.

Eigentlich müßte man die Stelle der stärksten Beanspruchung aus der Bedingung ableiten, daß dort $\pm E \frac{J}{W} \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{m} \frac{w}{r} E$ zum Maximum wird, wobei der Quotient $J : W$ aus Trägheitsmoment und Widerstandsmoment des Querschnittes $h/2$ ist. Die genaue Berechnung zeigt aber, daß sich namentlich für die hier in Betracht kommenden Werte von z , die der Berechnung der Knicklast zu Grunde liegende Gl. (26) kaum merklich ändert, so daß man sie beibehalten kann.

Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß mit der vorliegenden Arbeit noch nicht die Frage des elastischen Ausknickens einer dünnwandigen Zylinderschale erklärt ist, wenn durch geeignete Vorrichtungen ein Wert von z , der sehr viel kleiner als 1 ist, erreicht wird. Es sei hier bemerkt, daß sich diese Frage durch Berücksichtigung ∞ kleiner Glieder zweiter Ordnung lösen läßt. Ich will die theoretische Lösung, die ich fertig vorliegen habe, aber erst nach der Ausführung von entsprechenden Versuchen bekannt geben. Die Versuche sind im mechanisch-technischen Laboratorium der Technischen Hochschule München in Vorbereitung.