J. H. Lamberts
Abhandlung
Von dem
Gebrauche der Mittagslinie
Beym
Land- und Feldmessen.

Abhandlung.

§. I.

Der seltene Gebrauch der Mittagslinie bey Feld- und Landmessungen rühret theils von den Schwürigkeiten her, diese Linie an jedem Orte genau zubestimmen, theils auch, daß man das wesentliche in ihrem Nutzen noch nicht genug untersucht hat. Diese beyde Gründe hängen so zusammen, daß es nnnöthig scheint, den einen zu heben, wenn nicht zugleich auch der andere gehoben wird. Kann man diese Linie leicht ziehen, aber sie dient zu nichts, so ist das erstere überflüßig. Und wäre sie hingegen von ausnehmendem Nutzen, aber man würde sie selten oder nie ziehen können, so fällt dieser Nutze widerum hinweg, und in so ferne muß man beydem nachzuhelfen bedacht seyn.

§. II. Ich glaube bey dem erstern anfangen zu können, weil die Schwürigkeit eine Mittagslinie zu ziehen, in sehr vielen Fällen überwunden werden kann, wenn der Nutze davon beträchtlich genug ist, die Mühe richtet sich ohne dem nach dem Grade der genauigkeit, die man erhalten will, und es kann Fälle geben, wo man sich mit einer Magnetnadel oder mit einer Sonnenuhr zur Bestimmung der Mittagslinie beguügen kann; welches jedesmal angeht, wo man eben nicht die äußerste Schärfe sucht, und man kann leicht zeigen, daß es bey Grundlegung einer ganzen Provinz, welche man in eine Landkarte bringen will, dergleichen Fälle giebt.

§. III. Der Einfall, dir Mittagslinie bey dem Feldmessen zu gebrauchen, scheint von der Erfindung des Compasses herzurühren. Dieses Instrument, welches sich bey der Schiffarth nothwendig gemacht hat, sollte auch zu Lande ähnliche Dienste thun, und man hatte es zu Aufnehmung und Abtragung der Winkel gebraucht, dabey aber immer erinnert, daß man keine große Genauigkeit davon zu gewarten habe. Aus diesem Grunde ist sein Gebrauch auch nur in den Bergwerken geblieben, auf dem Felde aber diente es höchstens, die Lage eines Feldes in Absicht auf die vier Weltgegenden zu bestimmen.

§. IV. Da es aber außer dem Compasse noch andere Mittel giebt, eine Mittagslinie bey hellem Wetter viel genauer zu ziehen, so kömmt die Hauptfrage auf ihren Gebrauch an, und dieser scheint noch weniger, als es seyn könnte, untersucht zu seyn. Um diese Untersuchung desto uneingeschränkter vorzunehmen, werde ich voraus setzen, daß die Mittagslinie an jeden Orten leicht und mit beliebiger Genauigkeit gezogen werden könne. Wie sich diese Genauigkeit nach jeder Absicht bey dem Landmessen richte, wird sodann füglicher untersucht werden können.

§. V. Betrachtet man die Erde als eine Kugel, so ist die Mittagslinie ein Circul, so durch beyde Pole geht. Alle diese Circul durchschneiden den Aequator unter einem rechten Winkel, und sind

daher

daher in diesen Durchschnittspuncten alle einander parallel. Je näher man gegen die Pole kömmt, desto mehr nähern sie sich gegen einander, und unter dem Pole laufen sie in einem Punct zusammen.

§. VI. So sehen sie auf der Erdkugel aus, wo sie als größte Circul betrachtet werden. In dem Feldmessen aber gebraucht man nur kleine Stücke davon, welche man als gerade Linien ansieht. Werden diese Linien verlängert als Tangenten der Mittagscircul angesehen, so laufen die, so in gleicher Entfernung vom Pole gezogen werden, in der verlängerten Erdachse zusammen, und der Abstand dieses Puncts vom Mittelpuncte der Erde wächst wie die Cosecante der Polhöhe; hingegen wächst sein Abstand von dem Orte, wo die Mittagslinie gezogen wird, wie die Cotangente der Polhöhe. Daher wird dieser Abstand unter dem Aequator unendlich groß, und die Tangenten der Mittagscircul sind daselbst unter sich und mit der Erdachse parallel.

§. VII. Ungeachtet demnach diese parallele Lage der Mittagslinien eigentlich nur unter dem Aequator statt hat, so hindert dieses doch nicht, daß sie bey Ausmessung kleinerer Landschaften nicht auch sollten als parallel angesehen werden können, so oft der Ort nicht gar nahe bey dem Pole ist. Es geschieht dabey sehr selten, daß der Winkel, den zwo Mittagslinien machen, in Betrachtung gezogen werden müßte, und wenn auch dieses vorkäme, so gebrauchte man nichts als die Polhöhe, um diesen Winkel sehr genau zu bestimmen.

§. VIII. Man kann daher die Mittagslinien im allgemeinsten Verstande als Linien von gegebener Lage ansehen, hier aber, wo es um ihren Gebrauch bey dem Feld- und Landmessen zu thun ist, werde ich sie schlechthin als parallel betrachten, weil das, so sich hieraus finden läßt, ohne Mühe allgemeiner gemacht werden kann.

§. IX.

§. IX. Hieraus folgt, daß alle Vortheile, so man in der Meßkunst von parallelen Lilien hat, ebenfalls bey der Mittagslinie vorkommen. Ihre Entfernung ist aller Orten gleich groß, jede andere Parallellinien werden dadurch in gleiche Theile geschnitten, und die Winkel, so man an der einen mißt, sind so gut als an der andern auch gemessen.

§. X. Um die Vortheile, so hieraus entstehen, besonders bey Ausmessung kleinerer Felder, noch allgemeiner zu machen, werde ich anmerken, daß jedes weit entfernte Object, in Absicht auf die Linien, so man von dem Felde dahin zieht, ungefehr eben die Dienste thut, wie die Mittagslinie, so oft dieses Object entfernt genug ist, daß man die dahin gezogenen Linien als parallel ansehen kann. Wäre es aber nicht entfernt genug, so würde die Entfernung, auch nur beyläufig bestimmt, noch hinreichend seyn, die Winkel zu finden, welche diese Linien daselbst machen, und daher wären sie gleichfalls wieder von gegebener Lage.

§. II. Aus diesen vorläufigen Betrachtungen läßt sich leicht abnehmen, daß man, um die Vortheile der Mittagslinie bey dem Feldmessen zu finden, nichts anders zu thun habe, als die Fälle zu bestimmen, wo man mit Vortheil Parallellinien gebrauchen kann. Diese werde ich nun, so viel mir beygefallen sind, der Ordnung nach, anführen.

§. XII. Wenn man die Lage zwoer Linien, in Absicht auf die Mittagslinie, oder ihre Abweichung von derselben weis, so weis man auch die Lage, die sie unter sich haben, oder den Winkel, den sie mit einander machen. Es seyen (Fig. 1.) die zwo Linien AC, BC. In A und B habe man die Winkel CAM, CBM, oder ihre Abweichung von den Mittagslinien AM, Bm, gemessen. Da diese Parallel stund, so ist CbM = CBm. Da nun ACb = CbM — CAM

ist

ist, so ist auch ACB = CBM — CAM, und daher der Winkel ACB gefunden.

§. XIII. Was in diesem Lehrsatze von zwoen Linien gesagt worden, gilt aus gleichem Grunde von unzähligen andern, und der Vortheil davon besteht darinn, daß man sich dadurch die Ausmessung aller Winkel erspart, die solche Linien unter sich machen. So z. E. findet man den Winkel C, auch wenn man A aus B, und hinwiederum B aus A nicht sehen kann.

§. XIV. Wären demnach (Fig. 2.) A, B, D, E, Oerter, wo man durchreiset, und an welchen man den Ort C sieht, so darf man nur an jedem messen, wie viel der Ort C von der Mittagslinie abweicht, und man wird daraus die Winkel ACB, BCD, DCE finden, als wenn sie in C wären gemessen worden, ohne daß man nöthig habe, sich an einem der Oerter A, B, D, E um die andern umzusehen. Weil in diesem Fall jedes von den andern unabhängig ist.

§. XV. Wenn die Abweichung der drey Seiten eines Triangels von der Mittagslinie bekannt ist, so läßt sich jeder Winkel desselben finden. Es seye (Fig. 3.) der Triangel ABC, die Lage der Mittagslinie MAm, so sind BAm, mAC, Bbm die Abweichungswinkel der Seiten von derselben. Nun ist

$$CAm + BAm = BAC.$$
$$Bbm - BAm = ABC.$$
$$Cbm - bAC = ACB.$$

daher sind die Winkel und zugleich die Gestalt des Triangels gefunden.

§. XVI. Wir haben hier nur eine einige Mittagslinie gezogen. Denn weil alle einander parallel sind, so kommen einerley Abweichungswinkel heraus, an welchem Orte der Seiten sie gemessen werden. Dieser Vortheil macht, daß man sich jedes mal den bequemsten Ort dazu wählen kann. Uebrigens ist für sich klar, daß, wenn man die Abweichung zwoer und mehrerer Linien auf einmal messen will, man sich an dem Orte befinden müße, wo sie zusammenlaufen.

§. XVII. Es seyen nun (Fig. 4.) A, B zwey Oerter deren Abweichung von der Mittagslinie D m, und Entfernung von einander bekannt ist. Man befinde sich an jedem Orte C, wo man die beyden Oerter A, B, sehen kann. Man messe daselbst die Abweichung der Linien CA, CB, von der Mittagslinie CM, so wird die Lage des Ortes C gegeben seyn. Denn da man in dem Triangel ABC die Abweichung jeder Seite von der Mittagslinie weis, so findet man auch seine drey Winkel (§. 14.): daher ist wegen der gemessenen Seite AB der ganze Triangel bestimmt, und die zwo Seiten AC, CB, lassen sich daraus finden.

§. XVIII. Dieser Lehrsatz ist von sehr weitläuftigem Gebrauche Es seyen A, B zween Thürme einer Stadt, so kann C ein jeder Ort auf dem Felde seyn, der mit A, B nicht in gerader Linie liegt, und seine Lage wird durch diesen Lehrsatz bestimmt. Wenn demnach die ganze Gegend um eine Stadt herum solle in Grund gelegt werden, so läßt sich dieser Satz vortheilhaft gebrauchen. Wenn man in Entwerfung einer Landschaft zwischen den Oertern A, B, z. E. in D durchreiset, wo man sich mit denselben in gerader Linie befindet, und man mißt daselbst den Abweichungs-Winkel mDB, so wird im Fortgange jeder Ort C, an welchem man sich befindet, durch Ausmessung der Winkel ACM, BCM dergestallt zu Papier gebracht werden können, daß man weiter nichts als den Maasstab dazu nöthig haben wird, weil dieserallemal die ausmessung einer Linie erfordert.

§. XIX.

§. XIX. Dieser Satz kann auch dienen, zween und mehrere Stände, so man bey Grundlegung eines Landes gebraucht, von einander unabhängig zu machen. Es seyen wiederum (Fig. 5.) zwey Oerter A, B, und man wisse ihre Abweichung von der Mittagslinie. C und D seyen zween Stände, an welchen man A und B und zugleich noch jede andere Oerter, Z. E. E, sieht. In C und D messe man die Abweichung der Linien CE, CA, CB, DE, DA, DB von der Mittagslinie, so läßt sich die Lage aller dieser Oerter zu Papier bringen, ohne daß man sich an dem einen Stande um den andern umsieht, denn die beyden Triangel bestimmen sich durch den vorigen Lehrsatz (§. 16.) folglich, wenn AB auf dem Papier angenommen wird, so läßt sich C und D auch auftragen; und wegen der bekandten Winkel ECA, EDA wird der Ort E, und auf gleiche Art, jede andere in C und D beobachtete Oerter, zu Papier gebracht.

§. XX. Sind C und D nur Stände, die eben nicht in den Riß gehören, so ist klar, daß sie nach Bequemlichkeit gewählt werden können, weil die Absicht nur ist, die Oerter E, so man an beyden sehen kann, in den Riß einzutragen.

§. XXI. Ist dieses aber geschehen, so läßt sich ihre abweichung von der Mittagslinie auf dem Risse finden, und in so ferne werden sie im Fortgange eben die Dienste thun, welche A und B zu Bestimmung derselben gethan haben.

§. XXII. Ist Z. E. F ein Ort, an welchem man nur E und A sehen kan, so darf man weiter nichts thun, als die Abweichung der Linien FE, FA von der Mittagslinie messen, und der Ort F wird ebenfalls auf dem Risse eingetragen werden können, und auf gleiche Art alle die, welche man an zween von den dreyen Ständen D, C, F sehen kan.

§. XXIII. Diese Vortheile lassen sich demnach bey Grundlegung einer Landschaft beständig gebrauchen, so lange man noch zwey auf dem Risse bereits eingetragene Oerter sieht. Und es ist für sich klar, daß man, um es hieran nicht ermangeln zu lassen, dergleichen ehender zu viele in Vorrath nehmen müsse, theils weil man nicht allemal voraus sehen kann, welche man werde gebrauchen können, theils auch weil die, so man mehr hat, zur Ausbesserung deß Grundrisses dienen können. Oerter, die man in dem ganzen Lande herum sieht, sind hiezu unstreitig die vortheilhaftesten.

§. XXIV, Was der gebrauch der Mittagslinie hierinn voraus hat, besteht eigentlich darinn: daß man, um die Lage des Ortes C gleichsam aus einer einigen Beobachtung zu finden, weiter nichts als die Abweichung der Linie AB von der Mittagslinie voraus wissen darf. Sollte diese Aufgabe ohne die Mittagslinie aufgelößt werden, so muß man mit Beybehaltung der zwey Oerter A, B, noch einen der Winkel CAB, ABC, oder noch eine Seite wissen, oder man muß zu diesen zween Oertern A, B, noch einen dritten E nehmen, welcher mit A und B bereits in dem Risse eingetragen ist. In diesem letzten Fall läßt sich die Lage des Ortes C blos aus den beyden Winkeln ECA, ACB finden.

§. XXV. Ungeachtet diese letztere Aufgabe von der Mittagslinie nicht abhängt, und bereits schon hin und wieder vorkömmt, so werde ich doch einige Auflösungen davon hersetzen, weil sie als ein leichteres Beyspiel zu dem Folgenden dienen werden. Es sey (Fig. 6.) der Triangel ABC oder seine drey Seiten gegeben, und an jedem Orte D beobachte man die Winkel ADC, CDB, so ist ADB ihre Summe; und man solle die Lage des Ortes C finden. Man zeichne den Triangel ACB, und auf AB beschreibe man einen Circul, so daß der Bogen AEB doppelt so viele Grade habe, als der gemessene

Win-

Winkel ADB, so wird der Ort D nothwendig auf dem Umkreise dieses Circuls liegen. Ferner nehme man den Bogen AE von doppelt so vielen Graden, als der Winkel ADC hat, oder den Bogen BE = 2 BDC, so muß die Linie, so aus D in C gezogen wird, durch den Punct E gehen; wo auch immer der Punct D auf dem Umkreise des Circuls liegen mag. Man ziehe demnach C und E zusammen und verlängere die Linie bis in D, so wird D der gesuchte Punct seyn. Denn weil $\frac{1}{2}$ AE = ADC, und $\frac{1}{2}$ EB = CDB ist, so sind ADC, CDB die vorgegebenen Winkel, und D kann keine andre Lage haben, weil sich durch C und E, nur eine Linie ziehen läßt.

§. XXVI. Diese Auflösung ist einfacher, als diejenige, wobey man zween Circul gebraucht, wovon der andere auf eine der übrigen Seiten des Triangels ABC gestellt wird. Sie zeigt auch zugleich, daß sie desto zuverläßiger ist, je mehr die zween Puncte C und D von einander entfernt sind. Denn treffen diese Puncte zusammen, so läßt sich die Linie CE gar nicht ziehen, und man muß entweder einen andern Triangel, oder einen andern Stand D gebranchen. Es ist aber dieser Fall leicht zu erkennen, weil alsdenn die 4. Puncte A, C, B, D, auf dem Umkreise eines Circuls liegen, und daher die Summe der Winkel ACB, ADB 180 Gr. macht. Da man den Winkel ACB weiß, so darf man ihn nur von 180. Gr. abziehen, und von dem Ueberrest muß der Winkel ADB je mehr je besser verschieden seyn.

§. XXVII. Hieraus folgt die zweyte Auflösung, welche trigonometrisch ist. Man ziehe AE, EB, zusammen, so ist EAB = CDB, und CBA = CDA, und AEB = 180 — ADB; daher

sin. ADB : AB = *sin.* ADE : AE.

hieraus findet man AE. Ferner ist CAE = CAB — CDB. Da man nun in dem Triangel EAC die 2. Seiten AC, AE, und den

Winkel EAC hat, so findet man den Winkel AEC $= 180^\circ -$ AED. $= 180^\circ -$ ABD. Endlich ist DAB $= 180^\circ -$ ABD $-$ ADB $=$ AEC $-$ ADB. Folglich hat man in dem $\triangle$ ADB eine Seite AB, und jede Winkel, woraus die übrigen Seiten gefunden werden.

§. XXVIII. Es seyen nun (Fig. 7.) drey Objecte A, C, B in gerader Linie, und in den beyden Ständen D, E mißt man ihre Abweichung von der Mittagslinie, so lassen sich alle 5. Puncte A, C, B, D, E entwerfen, ungeacht man an dem einen Stand den andern nicht sieht, und folglich beyde von einander unabhängig sind. Denn da man die Abweichung der Linien DC, EC von der Mittagslinie weis, so findet man daraus den Winkel DCE. (§. 12.) Daher läßt sich die Figur folgender maßen construiren. Man nehme die Linie AB an, und stelle zween Circul ADB, AEB darauf, so daß die Bögen AdB, AeB doppelt so viele Grade haben, als die entsprechenden und gemessenen Winkel ADB, AEB. Ferner gebe man den Bögen Ad, Ae doppelt so viele Grade als die Winkel ADC, AEC haben, so ist klar, einmal daß die beyden Stände D, E auf den Umkreisen dieser Circul liegen, und die daraus durch den Punct C gezogenen Linien in d und e laufen müssen. Man ziehe ferner e und d zusammen, und stelle auf ed einen Circul, dessen Bogen efd doppelt so viele Grade habe als der gefundene Winkel DCE, so wird dieser Circul die Linie AB an zweyen Orten durchschneiden, und der eine Durchschnitt wird der gesuchte Ort C seyn. Zieht man sodann die Linien dCD, eCE, so finden sich auch die zween Stände D und E.

§. XXIX. Ueber diese Aufgabe ist verschiedenes anzumerken. Einmal hat sie zwo Auflösungen, weil der Ort C eben so wohl in c liegen könnte. Es muß demnach aus andern Gründen erörtert

werden,

werden, welcher Punct der wahre ist; welches um so leichter ist, weil der Punct c mehrentheils eine solche Lage hat, daß man leicht erkennen kann, daß er der Wahre nicht seye, z. E. er kann außerhalb A oder B fallen, oder diesen Puncten so nahe kommen, daß er es auch dem Augenmaaß nach nicht seyn kann.

§. XXX. Sodann sieht man leicht, daß diese Aufgabe deßwegen auflösbar ist, weil man vermittelst der Mittagslinie den Winkel DCE findet. Weiß man aber diesen Winkel aus andern Umständen, so gebraucht man die Mittagslinie nicht, weil man in der Construction nebst dem Winkel DCE nur die Winkel gebraucht, welche die drey Objecte A, C, D in den Ständen D und E machen.

§. XXXI. Ferners da die beyden Circul ADB, AEB die Linie AB zur gemeinsamen Senne haben, so ist

$$AC. CB = CD. Cd = CE. Ce.$$

demnach liegen auch die 4. Puncte D, E, d, e in einem Circul, und die Triangel CDE, Cde sind einander ähnlich. Wenn man demnach an dem Stand D den Winkel CDE mißt, so wird demselben der Winkel deC gleich gemacht, und daher die Figur ohne den Gebrauch der Mittagslinie construirt. Und auf diese Art muß man sich nicht an beyden Ständen, sondern nur an dem einen derselben nach dem andern umsehen.

§. XXXII. Endlich haben diese Vortheile deßwegen statt, weil die drey Objecte A, C, B in gerader Linie liegen. Ist dieses nicht, so muß man noch über dieß dessen Winkel wissen, den sie mit einander in C machen, und die Aufgabe wird in allen angeführten Fällen noch auflösbar seyn. Denn in diesem Fall wird C auf einem Circulbogen liegen, dessen Senne die Linie A B ist, und welcher doppelt so viele Grade hat, als der Zusatz des Winkels ACB zu 180 Gr.

und dieser Bogen wird von dem Circul ed gleichfalls da durchschnitten, wo der Punct C liegt.

§. XXXIII. Diese Aufgabe, wo nämlich die drey Objecte A, C, B in gerader Linie liegen, kömmt bey Grundlegung einer Landschaft sehr selten vor. Eine lange und gerad gezogene Straße, oder eine sehr lange Wand, woran außer den beyden Enden A, B noch ein ander kenntliches Object C ist, kann etwan dazu dienen. Und wenn man sie sehr weit herum sieht, aber nicht dazu gehen will, so mag es sich zuweilen der Mühe lohnen, vermittelst zweener willkührlich gewählten Stände D, E und der Mittagslinie ihre Abweichung von derselben zu bestimmen, welches durch diese Aufgabe geschehen kann. Denn weis man diese, so kann man die beyden Ende A, B eben so gebrauchen, wie wir es vorhin (§. 16. seqq.) beschrieben haben. Außer diesen Fällen kömmt die Aufgabe nicht wohl anderst vor, als wenn man Gelegenheit hat, ein Zeichen zu setzen, welches mit zween Oertern in gerader Linie sey.

§. XXXIV. Sind aber die drey Objecte A, C, B nicht in gerader Linie und von ganz unbekannter Lage, so ist das beste, wenn man zu den beyden Ständen D, E noch einen dritten annimmt, und an allen dreyen die Abweichung der Oerter A, C, B von der Mittagslinie beobachtet, so werden sich alle sechse in Grund legen lassen, ohne daß man nöthig habe, sich an einen Stande um die beyden andern umzusehen. Diese letztere Bequemlichkeit wird öfters sehr nützlich, weil die vortheilhafteste Stände vielmalen so liegen, daß man den einen an dem andern nicht sehen kann, und die Mühe, zeichen an die Stände zu setzen, fällt dabey weg. Man kann, indem man seinen Weg fortgeht, an 3. Oertern (Fig. 8.) D, E, F die Abweichung der in A, B, C gezogenen Linien von der Mittagslinie nehmen, und dadurch nicht nur die Oerter, D, E, F, A, C, B, son-

B, sondern auch jede andere, die man an zweenen von den Ständen D, E, F sehen kann, auf einmal in Grund legen.

§. XXXV. Um diese Aufgabe, welche in den schwersten Fällen noch bequem bleibt, aufzulösen, wollen wir aus dem §. 12. anmerken, daß, indem man die Abweichung der aus D, E, F in A, B, C gezogenen Linien von der Mittagslinie weis, zugleich auch alle Winkel bekannt sind, die sie unter sich machen. Von diesen werden wir die in D, E, F und C gebrauchen, weil diese allein zureichend sind, die in A und B zu bestimmen.

§. XXXVI. Hiedurch aber wird die Aufgabe noch allgemeiner, und wird eben so aufgelößt, *wenn man statt der Mittagslinie schlechthin die Winkel in C, D, E, F gemessen hat.*

§. XXXVII. Es seyen nun (Fig. 9.) die sechs Puncte A, C, B, D, E, F. Man ziehe durch ADB, AEB, AFB Circul, und verlängere, wenn es nöthig ist, die Linien DC, EC, FC in d, e, f, so sind die Bögen Af, Ae, Ad, AfB, AeB, AdB von doppelt so vielen Graden, als die Winkel in F, E, D, welche auf diesen Bögen stehen. Da diese Winkel bekannt sind, so kann man die zween Puncten A, B auf dem Papiere annehmen, und vermittelst der Winkel ADB, AEB, AFB die Circul ziehen, weil die auf AB stehenden Bögen doppelt so viele Grade haben müssen. Ferner lassen sich die Puncte f, e, d finden, weil Af = 2 AFC, Ae = 2 AEC und Ad = 2 ADC ist.

§. XXXVIII. Ferner bemerken wir daß die Winkel in C und daher auch ihre Scheitelwinkel fCe, eCd bekannt sind. Da nun die Puncte f, e, d gefunden worden, so ist es eben so viel, als wenn auf dem Felde in f, e, d Objecte von bekannter Lage gewesen wären, und die Winkel fCe, eCd in C wären gemessen worden. Hiedurch aber verfallen wir auf die Aufgabe des §. 25. und der Punct C läßt sich vermittelst der Puncte f, e, d und der Winkel fCe, eCd finden. Ist dieses geschehen, so darf man nur die Linien fC, eC, dC in F, E, D verlängern, und alle sechs Oerter werden construirt seyn.

§. XXXIX. Diese Construction hat das besonders, daß man statt der drey Stände D, E, F erst drey andere Puncten d, e, f findet, und mit denselben in Absicht auf den Ort C eben so verfährt, als man mit D, E, F würde verfahren seyn, wenn diese Puncte von bekannter Lage gewesen wären. Man kann die Aufgabe nach Anleitung dieser Construction ebenfalls trigonometrisch auflösen, ungeachtet es etwas weitläuftiger wird.

§. XL. Zu diesem Ende stelle man sich vor, als wenn von C, d, e, f Linien in A und B gezogen wären, welche wir weglassen, um die Figur nicht zu überhäufen; So hat man erstlich die Seiten des Triangels fed zu finden, welches folgendermaßen geschehen kann. Es ist der Winkel

$$ABf = AFf \qquad AfB = 180^\circ - AFB$$
$$ABe = AEe \qquad AeB = 180^\circ - AEB$$
$$ABd = ADe \qquad AdB = 180^\circ - ADB$$

folglich

$$\sin AFB : AB = \sin AFf : Af.$$
$$\sin AEB : AB = \sin AEe : Ae.$$
$$\sin ADB : AB = \sin ADd : Ad.$$

hieraus findet man Af, Ae, Ad in eben den Theilen in welchen AB angenommen wird, welches willkührlich geschehen kann, wenn man es nicht in einem bekannten Maaße weis.

Ferner ist der Winkel

$$fAB = fFB$$
$$eAB = eEB$$
$$dAB = dDB$$

folglich

$$fAe = fFB - eEB$$
$$eAd = eEB - dDB$$
$$fAd = fFB - dDB.$$

Man hat demnach in den dreyen Triangeln fAD, eAd, fAe die Seiten Af, Ae, Ad und die Winkel fAe, fAd, eAd, folglich können auch die drey Seiten fd, fe, ed und der Winkel dfA gefunden werden.

§. XLI. Aus den drey Seiten fd, fe, ed und den bekannten Winkeln fCe, eCd wird durch die Aufgabe des §. 27. die Linie fC und der Winkel Cfd gefunden, welcher von dem Winkel dfA abgezogen den Winkel CfA giebt. Dieser Winkel nebst den Seiten Af, fC giebt ferner AC und den Winkel fAC, welcher von fAB = fFB abgezogen, den Winkel CAB übrig läßt, und folglich die Lage des Puncts C in Absicht auf die beyden Oerter A, B bestimmt. Aus dieser aber läßt sich die Lage der drey Stände D, E, F durch durch die Aufgabe des §. 27. finden.

§. XLII. Diesen zwoen Auflösungen wollen wir noch die dritte beyfügen, welche ebenfalls trigonometrisch ist, aber auf algebraischen Formeln beruhet, und zugleich kürzer ist. Es seyen demnach die Winkel (Fig. 10.) in D, E, F und C gegeben. Man nenne

$$ADC = a \qquad AFC = e$$
$$CDB = b \qquad CFB = f$$
$$AEC = c \qquad DCE = g$$
$$CEB = d \qquad ECF = h$$

Da hieraus die Winkel in A und B auch gefunden werden, so setze man

$$DAE = i = g+c-a$$
$$DAF = k = e+g+h-a$$
$$DBF = l = b+g+h-f$$
$$EBD = m = g+b-d$$

Endlich ziehe man AC, CB, und setze die Winkel

$$DAC = x$$
$$DBC = y$$

so hat man folgende sechs Analogieu

1°. $\sin x : DC = \sin a : AC$

2°. $\sin(x-i) : EC = \sin c : AC$

3°. $\sin(x-k) : FC = \sin e : AC$

4°. $\sin y : DC = \sin b : BC$

5°. $\sin(y+l) : FC = \sin f : BC$

6°. $\sin(y+m) : EC = \sin d : BC$

Aus diesen hat man

$$DC = \frac{AC . \sin x}{\sin a} = \frac{BC . \sin y}{\sin b}$$

$$EC = \frac{AC . \sin(x-i)}{\sin c} = \frac{BC . \sin(y+m)}{\sin d}$$

$$FC = \frac{AC . \sin(x-k)}{\sin e} = \frac{BC . \sin(y+l)}{\sin f}$$

Folglich

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin y . \sin a}{\sin x . \sin b} = \frac{\sin(y+m) . \sin c.}{\sin(x-i) . \sin d.} = \frac{\sin e . \sin(y+l)}{\sin(x-k) \sin f}$$

Und hieraus

$$\frac{\sin(y+m)}{\sin y} = \frac{\sin . (x-i)}{\sin x} \frac{\sin d . \sin a}{\sin b . \sin c}$$

$$\frac{\sin(y+l)}{\sin y} = \frac{\sin(x-k)}{\sin x} \quad \frac{\sin f.\ \sin a}{\sin e.\ \sin b}$$

Man setze $\sin d.\ \sin a : \sin b.\ \sin c = p$

$\sin f.\ \sin a : \sin b.\ \sin e = q.$

Weil diese Verhältnisse ohnehin in Zahlen müssen berechnet werden; so ist

$$\frac{\sin y.\ \cos m + \cos y.\ \sin m}{\sin y} = p. \quad \frac{\sin x.\ \cos i - \cos x.\ \sin i}{\sin x}$$

$$\frac{\sin y.\ \cos l + \cos y.\ \sin l}{\sin y} = q. \quad \frac{\sin x.\ \cos k. - \cos x.\ \sin k}{\sin x.}$$

folglich

$$\cos m + \sin m.\ \cot y = p.\ \cos i - \sin i.\ p.\ \cot x.$$
$$\cos l + \sin l.\ \cot y = q.\ \cos k - q.\ \sin k.\ \cot x.$$

Welches zwo Gleichungen vom ersten Grade sind. Man multiplicire die erste mit $\sin l$, die andere mit $\sin m$. und ziehe die erste von der zweyten ab, so bleibt

$$\sin m.\ \cos l. - \cos m.\ \sin l. = q.\ \sin m.\ \cos k - p.\ \sin l.\ \cos i. + \cot x.\ q.\ \sin k.\ \sin m. - p.\ \sin i.\ \sin l.$$

Daher hat man

$$\cot.\ x = \frac{\sin(l-m) + q.\ \sin m.\ \cos k - p.\ \sin l.\ \cos i.}{p.\ \sin i.\ \sin l - q.\ \sin k.\ \sin m.}$$

Hieraus findet man den Winkel x = DAC. Ferner hat man

$$\cot y = \frac{qp \sin(k-i) + p \sin i.\ \cos l - q \sin k.\ \cos m}{q \sin m.\ \sin k - p.\ \sin i.\ \sin l.}$$

Oder, wenn x schon gefunden,

$$\cot.\ y = \frac{p \cos i - p.\ \sin i.\ \cot x.\ \cos m.}{\sin m.}$$

Ist y auch gefunden, so hat man vollends alle Winkel, und welche Linie man als bekannt annimmt, so werden die übrigen daraus leicht gefunden werden können.

§. XLIII. Diese letztere Auflösung demnach ist von den vorhergehenden darinn verschieden, daß man dadurch, ohne eine Seite zu gebrauchen, die Winkel x und y findet, welche die Figur vollends bestimmen. Man kann sie demnach in jeder Größe entwerfen, und der Maaßstab dazu wird sich finden, sobald man eine Linie in bekanntem Maaße hat.

§. XLIV. Wir können ferner anmerken, daß sich die Figur stückweise aus den gemessenen Winkeln ohne weitere Rechnung construiren lasse. Man nehme (Fig. 8.) die Linie AD an, so lassen sich AE, AF, DC, DB ziehen. Nimmt man CE an, so kann CD, CF, EA, EB, gezogen werden, und wenn BF angenommen wird, so kann man BD, BE, FA, FC ziehen. Diese einzele Stücke würden leicht zusammen gefügt werden können, wenn man zwischen AD, CE, FB die wahren Verhältnisse wüßte. Indessen aber findet man die Verhältnisse zwischen den Theilen eines jeden Stückes besonders, welche zur Zusammenfügung derselben dienen können, und dte Aufgabe wird dadurch in eine andere verwandelt. Denn, da man die Verhältnisse ac : cd, und be : ef als bekannt annehmen, und das Viereck CcEe gleichfalls von beliebiger Größe construiren kann, so ist die Frage: *in dem Vierecke CcEe zwo Linien af, bd dergestalt zu ziehen, daß sie mit den Seiten gegebene Winkel machen, und die abgeschnittene ac, cd, ingleichem be, ef in gegebener Verhältniß seyen?*

§. XLV. Um diese Frage noch aufzulösen, wollen wir das Viereck CcEe (Fig. 11.) nebst den Linien af, db besonders zeichnen. Es sey demnach

$$ac = y \qquad ef = x$$
$$cd = my \qquad eb = nx$$

da

da die Winkel a, b gegeben sind, so kann man eG, eH mit af, bd parallel ziehen. Man setze ferner

$$cH = M$$
$$eG = N$$

so findet man

$$y.\ \sin a = (N - x) \sin f$$
$$nx \sin b = (M - my) \sin d$$

folglich

$$y = \frac{M \sin d - nB. \sin b}{m \sin d - n \sin a. \sin b : \sin f}$$

§. XLVI. In dieser letzten Auflösung muß man (Fig. 8.) die Linie CE entweder in einem bekannten Maaße oder willkührlich annehmen, welches letztere nothwendig ist, so oft man nicht CE, sondern eine andere Linie gemessen hat. Dieses hat aber nichts zu sagen, weil, wenn die Figur einmal entworfen ist, der Maaßstab leicht kann darnach gerichtet, oder die Figur nach dem Maaßstabe vergrößert oder verkleinert werden.

§. XLVII. Diese Aufgabe, wobey wir wegen ihrer Verschiedenheit vier Auflösungen gegeben haben, mag besonders dienen, wenn man anfängt ein Land in Grund zu legen, weil man dabey auf einmal sechs Oerter, und so viel man noch an zween von den angenommenen 3. Ständen sehen kann, in Grund legt, und zugleich die Abweichung jeder zwey Oerter von der Mittagslinie findet, welches dienen kann, jeden folgenden Stand mittelst einer einzigen Observation auf den Riß zu bringen, wenn man an demselben nur noch zwey in den Riß eingetragene Oerter sieht. Ueber dieß sind die drey Stände D, E, F von einander ganz unabhängig, und jeder kann für sich gewählt werden.

§. XLVIII. Aus diesem Grunde kann diese Aufgabe auch zu Schiffe gebraucht werden, wenn man drey Objecte A, C, B am Ufer sieht, und zu dreymal an beliebigen Oertern D, E, F ihre Abweichung von der Mittagslinie beobachtet: so findet man nicht nur die Entfernung des Schiffes vom Ufer, sondern auch die Lage der drey Objecte A, C, B, und die von jeden andern, die man an zwoen von den 3. Stellen D, E, F observirt hat. Ist dieses geschehen, so ist aus dem §. 17. klar, daß so lang man noch zwey von diesen Objecten sieht, die Lage des Schiffes in Absicht auf dieselbe noch immer kann gefunden werden. Uebrigens ist der Weg, den das Schif aus D in E und F macht, zum Maaßstabe anzunehmen, wenn der Abstand der Objecte A, C, B nicht sonst bekannt ist. Wir können noch anmerken, daß, so lange man den Weg des Schiffes für gerade annehmen kann, nicht mehr als zwey Objecte nöthig sind, weil man dabey die Aufgabe des §. 28. gebrauchen kann, indem man an den drey Stellen (Fig. 7.) A, C, B vermittelst der Mittagslinie auch die Winkel ADC, CDB, AEC, CEB findet. Kann man noch über dieß die Geschwindigkeit des Schiffes durch A, C, B gleichförmig setzen, so gebraucht man nur ein Object: und da man die Winkel ADC, CDB findet, und die Linien AC, CB weis, so wird das Uebrige durch die Aufgabe des §. 25. gefunden. Weis man noch überdieß, wie viel Grade der Weg des Schiffes von der Mittagslinie abweicht, so gebraucht man nach §. 12. 17. nur 2. Observationen und nur ein einziges Object: Wir merken dieses nur im Vorbeygange an, um zu zeigen, daß es in vielen Fällen Mittel giebt, den Compaß zu Schiffe noch auf andere Arten, als nur zur Bestimmung der Richtungslinie des Schiffes zu gebrauchen, ungeachtet dieser letzte Gebrauch immer der wesentlichste bleibt, so könnten die vorerwähnten Aufgaben doch zur Bestimmuug der Lage der Seeküsten

gebraucht

gebraucht werden. Daß sie sich auf den Seen zu Lande bequemer gebrauchen lassen, ist für sich klar.

§. XLIX. Kömmt man bey Grundlegung einer Landschaft an Oerter, wo man nur noch ein einziges in den Riß eingetragenes Object sieht, so läßt sich die letzte Aufgabe wieder gebrauchen, wenn man zu diesem Objecte noch zwey andere, und zugleich auch noch zween neue Stände wählt. Diese sechs Stücke können eben so wieder entworfen werden; hingegen aber muß man eine neue Messung einer Linie vornehmen, um diese Stücke in den vorigen Riß zu bringen. Dieses ist aber immer der äußerste Nothfall, und um desto mehr ist darauf zu sehen, Objecte in Vorrath auf den Riß zu bringen.

§. L. Aus dem bisher gesagten wird nun genugsam erhellen, daß sich die Mittagslinie bey Grundlegung einer Landschaft mit vielfachem Vortheile gebrauchen läßt, und demnach die Schwürigkeit nur darauf ankömmt, wie man sie leicht und genau finden könne Diese zwey Bedingnisse stehen einander fast immer im Wege. Indessen giebt es Fälle, wo man die äußerste Schärfe nicht gebraucht, und da kann man sich an das Leichteste halten, und hingegen muß man sich mehr Mühe geben, wenn man eine größere Genauigkeit erreichen will. Solle es bey Entwerfung einer Landschaft bey dem gemachten Risse sein Bewenden haben, so kömmt es auf die Größe desselben an, und da wäre es überflüßig, die Länge der Linien bis auf einen 10000ten oder noch kleinern Theil zu suchen, wenn auf dem Risse schon 100 Theile nicht mehr zu erkennen sind. Denn bey dem Auftragen gehen die kleinere Theile dennoch verlohren. In solchen Fällen wird ein Compaß, der $\frac{1}{4}$ Grade anzeigt, noch zureichende Dienste thun, weil der Bogen eines solchen Winkels kaum der 230te Theil seines Halbmessers ist. Dieser kann demnach auf dem Risse zween bis drey Zolle lang seyn, ohne daß der Fehler merklich wäre. Im Fortgange können sich solche kleine Fehler ersetzen, hingegen aber können sie sich auch aufhäufen, und ungeachtet dieses letztere seltener geschieht, so ist es doch gut, einige Observationen mehr zu machen, als nothwendig wäre, weil sich die Fehler dadurch erkennen und ausbessern lassen.

§. LI. Bey hellem Wetter thut die Sonne zu Bestimmung der Mittagslinie bessere Dienste, und man hat bereits schon verschiedene Sonnenuhren ausgedacht, welche man dazu gebrauchen kann. Sind diese, wie es mehrentheils geschieht, so klein, daß man $\frac{1}{4}$ Grade darauf nimmer erkennen kann, so haben sie vor einer längren und sehr beweglichen Magnetnadel weiter keine Vorzüge, als daß man bey dem Magneten besorgen muß, es möchten Gänge von Eisen in der Erde seyn, die ihn verrücken, oder die fast stündliche Abänderungen desselben möchten beträchtlich genug seyn, um die parallele Lage der Nadel unzuverläßig zu machen. Fielen diese Schwürigkeiten hinweg, so würde man dieses Instrument so weit brauchen können, als man die Mittagslinien als parallel ansehen kann.

§. LII. Alle Sonnenuhren, wodurch sich die Lage der Mittagslinie bestimmen läßt, hängen von der Höhe der Sonne und der Polhöhe ab. Die erstere verursacht, daß man sie um die Mittagszeit nicht wohl gebrauchen kann, weil sich die Höhe der Sonne alsdann sehr wenig ändert. Bey Grundlegung einer Landschaft, wo man gegen Mittag oder gegen Mitternacht viele Meilen fortrückt, ändert sich die Polhöhe auch beträchtlich genug. Indessen, da man nunmehr die Größe eines Grades der Erde in Schuhen sehr genau weiß, so läßt sich die Polhöhe jedes Ortes, der in dem Risse schon eingetragen ist, auf dem Risse finden, sobald

bald man die von einem einzigen Orte darauf genau weis, und der Sonnenuhr kann demnach eine solche schiefe Lage gegeben werden, daß sich der Zeiger an jedem Orte nach dem Pole richtet.

§. LIII. Solle aber die Mittagslinie genauer gefunden werden, so werden auch größere und genauere Instrumente erfordert, und ein an einer Azimuthalscheibe befestigter Quadrant, wodurch man zugleich die Höhe und den Azimuthalwinkel der Sonne oder eines Sterns findet, wird nicht nur zu dieser Absicht, sondern auch zur Ausmessung der Winkel, welche die Objecte mit der Mittagslinie machen, bequem gebraucht werden können.

§. LIV. Will man damit vor- und nachmittags auf gleiche Höhen der Sonne warten, so ist die Lage der Mittagslinie zur Zeit der Sonnenwenden, ohne Polhöhe, ohne Uhr und ohne die Abweichung der Sonne gefunden. In jeden andern Jahrszeiten gebraucht sie einer Ausbesserung, weil sich während der Zeit der Beobachtung, die Abweichung der Sonne merklich ändert.

§. LV. Dieses Mittel ist zwar leicht, aber eben bey Grundlegung einer Landschaft nicht das Bequemste, weil man an jedem Stande einen Tag zubringen müßte. Man muß daher einige astronomische Data mehr zu Hülfe nehmen, wohin man vornehmlich die Declination der Sonne rechnen kann, wie sie ungefehr zur Stunde der Beobachtung ist. Kann man hiezu noch die Polhöhe als bekannt annehmen, wie es nach der Anmerkung des §. 52. möglich ist, so wird die Arbeit erleichtert, und sie wird am kürzesten, wenn man zu der Abweichung der Sonne, und der Polhöhe noch die Zeit weis, weil man aus diesen Stücken das Azimuth der Sonne unmittelbar findet.

§. LVI. Eben so läßt sich die Mittagslinie aus einer Observation finden, wenn man statt der Zeit, die Höhe der Sonne mißt. Diese nebst der Polhöhe und Abweichung der Sonne, giebt nicht nur ihr Azimuth, sondern auch die Zeit. Da aber dieses Mittel um die Mittagszeit nicht sicher gebraucht werden kann, so mag es vormittags dienen, eine gute Uhr darnach zu richten, welche sich auf den Abend durch eben dieses Mittel wieder verbessern läßt. Uebrigens muß die Uhr, wenn man alle Schärfe sucht, nicht nur Minuten sondern auch Secunden anzeigen, weil eine Minute Unterschied in der Zeit bald mehr bald minder, als einen $\frac{1}{4}$ Grad Unterschied in dem Azimuthalwinkel giebt. So genau aber würde der Compaß oder eine Sonnenuhr auch seyn.

§. LVII. Bey diesen Aufgaben gebraucht es nur eine Observation. Will man aber zwo anstellen, so giebt es noch mehrere. So kann man aus dem Unterschied der Zeit und des Azimuths, vermittelst der Polhöhe und Abweichung der Sonne, die Zeit und das Azimuth selbst finden. Es sey (Fig. 12.) AB eine vertical aufgerichtete Linie, welche nach Verfluß einer beliebigen Zeit die Schatten AC, AD auf eine horizontale Fläche werfe. Man mißt den Winkel CAD, welcher der azimuthalische Unterschied ist, und bemerkt die verflossene Zeit, so man in Grade und Minuten verwandelt. Aus diesen beyden Stücken läßt sich die Lage der Mittagslinie ziehen. Allein so leicht die Beobachtung ist, so schwer ist die Auflösung. Indessen läßt sie sich folgender gestalt auf eine Quadratgleichung bringen.

§. LVIII. Es sey (Fig. 13.) PV der Mittagscircul, P der Pol, V der Scheitelpunct, M, N die zwey Oerter der Sonne, so ist MPN der beobachtete Unterschied der Zeit, MVN der Unterschied der Azimuthe. Man setze nun

$$PM = PN = c \quad MPN = 2b$$
$$PV = e \quad MVN = 2a$$

Ferner

$$VPM = y - b \quad PVM = x + a.$$
$$VPN = y + b \quad PVN = x - a.$$

so ist

$$\cot c . \sin e = \cos (y - b) \cos e + \sin (y -). \cot (x + a)$$
$$\cot c . \sin e = \cos (y + b) \cos e + \sin (y +) \cot (x - a)$$

Es sey Kürze halber

$$\tang x = \xi$$
$$\tang a = \alpha$$

so ist

$$\left(\frac{1 - \alpha\xi}{\alpha + \xi}\right). (\sin y \cos b - \cos y \sin b) = \cot c . \sin e - \cos e \cos y \cos b - \cos e \sin y \sin b.$$

$$\left(\frac{1 + \alpha\xi}{\xi - \alpha}\right). (\sin y \cos b + \cos y . \sin b) = \cot c . \sin e - \cos e \cos y \cos b + \cos e \sin y . \sin b$$

Wird die erste dieser Gleichung mit $(\alpha + \xi)$, die zweyte mit $(\xi - \alpha)$ multiplicirt, und sodann beyde zusammen addirt, und von einander abgezogen, so bekömmt man

$$\sin y . \cos b + \alpha \xi \cos y \sin b = + \xi \cot c \sin e - \xi \cos e \cos y \cos b - \alpha \cos e \sin y \sin b.$$

$$\cos y \sin b + \alpha \xi \sin y \cos b = - \alpha \cot c \sin e + \alpha \cos e \cos y \cos b + \xi \cos e \sin y \sin b.$$

Und hieraus

$$\xi = \frac{\sin y (\cos b + \alpha \cos e \sin b)}{\cot c \sin e - \cos y (\cos e \cos b + \alpha \sin b)}$$

$$= \frac{\alpha \cot c \sin e + \cos y (\sin b - \alpha \cos e \cos b)}{\sin y (\cos e \sin b - \alpha \cos b)}$$

Werden die bekannten Glieder und Coefficienten dieser Gleichung berechnet, so hat sie folgende Form:

$$\xi = \frac{A\,\sin y}{B + C\,\cos y} = \frac{D + E.\,\cos y}{F.\,\sin y}$$

Folglich

$$BD + (BE + DC)\,\cos y + CE\,\cos y^2 = AF\,\sin y^2$$

hieraus wird

$$(CE + AF)\,\cos y^2 + (BE + DC)\,\cos y = AF - BD$$

welches die gesuchte Gleichung ist. Sie ist vom zweyten Grade, und hat daher zween mögliche Fälle, wovon der Wahre aus andern Umständen muß erörtert werden, welches mehrentheils geschehen kann, wenn man auch nur beyläufig die Zeit der einen Observation, oder den Winkel VPM $= y - a$ weis. Uebrigens ist noch anzumerken, daß diese Aufgabe zuverläßiger ist, wenn die eine Observation um die Mittagszeit, die andre aber viel früher oder später angestellt wird.

§. LIX. Wenn man in dieser Aufgabe statt der Polhöhe oder statt des Bogens PV die Höhe der Sonne zur Zeit der einen Observation gebraucht, so läßt sie sich durch die gemeine Trigonometrie auflösen. Denn in dem Triangel NPM hat man die zwo Seiten PM, PN und den Winkel P, daher findet man NM, und den Winkel PNM oder PMN, von welchen man den wählt, wo die Höhe der Sonne war gemessen worden. Z. E. PNM. Ferner hat man in dem Triangel NVM die Seiten NM und NV, und den Winkel V, woraus man den Winkel VNM findet, welcher von PNM abgezogen, PNV übrig läßt. Dieser Winkel nebst den Seiten NP, NV, giebt in dem Triangel PNV, die Seite PV oder die Erfüllung der Polhöhe, und den Stundenwinkel NPV, nebst dem gesuchten Azimuthalwinkel PVN.

§. LX. Wird endlich bey dieser Abänderung annoch, statt des Stundenwinkels MPN, der andere Verticalbogen VM auch gebraucht, indem man beyde Höhen der Sonne, und ihren azimu-

thali-

thalischen Unterschied observirt, so läßt sich die Aufgabe gleichfalls durch die gemeine Trigonometrie auflösen. Man hat nemlich NV, MV, NVM, und hieraus wird NM und VNM gefunden. Ferner hat man NM, PN, PM. Hieraus findet man PNM. Dieser Winkel mit VNM verglichen giebt den Winkel PNV, welcher nebst PN, und NV, wie vorhin NPV, PV, PVN giebt.

§. LXI. Eben so kann man zwo Höhen nebst dem Unterschiede der Zeit beobachten. Und da wird aus PN, PM, NPM die Seite NM, und der Winkel PNM gefunden. Sodann giebt NM, NV, MV, den Winkel VNM, wodurch wiederum PNV, und daher wie vorhin alle Stücke des Triangels PVN gefunden werden. Wenn aber die Zeit nicht sehr genau gemessen wird, so ist die vorhergehende Aufgabe (§. 60.) ungleich besser. (§. 56.)

§. LXII. So ferne man annehmen kann, daß sich während beyden Observationen die Abweichung der Sonne nicht merklich ändert, oder diese Aenderung in Absicht auf den Gebrauch von keinen Folgen ist, so läßt sich das Azimuth ohne Declination und Polhöhe finden, wenn man zween Höhen der Sonne, ihren azimuthalischen Unterschied, und den Unterschied der Zeit beobachtet. Denn so hat man VN, VM, MVN, NPM, und der Triangel NPM solle gleichschenklicht seyn. Aus NV, MV, NVM wird NM und VNM gefunden. Wird NM in zween gleiche Theile getheilt, und aus P ein Bogen auf den Theilungspunct gezogen, so zerfällt der Triangel NPM in zween rechtwinklichte, welche einander gleich und ähnlich sind. Daher findet man vermittelst $\frac{1}{2}$NM und $\frac{1}{2}$NPM die Seite PN und den Winkel PNM, von welchem der gefundene VNM abgezogen, den Winkel PNV übrig läßt. Da man nun PN, PNV und NV hat, so findet sich der Azimuthalwinkel PNV, und zugleich auch die Zeit, Declination und Polhöhe.

§. LXIII. Uebrigens ist anzumerken, daß hier nicht schlechthin von dem Azimuthalwinkel PVN die Frage ist, sondern dieser soll dienen, die Lage der Mittagslinie an dem Orte der Beobachtung zu finden. Daher muß nothwendig nach diesem Azimuth eine Horizontallinie gezogen, oder an dem Horizonte ein Punct bemerket werden, auf welchem der durch den Mittelpunct der Sonne herabgelassene Verticalcircul zur Zeit der Observation aufsteht, damit man diese Linie, und sodann vermittelst des gefundenen Azimuthalwinkels PVN oder PVM auch die Mittagslinie selbsten ziehen könne.

§. LXIV. Gebraucht man hiebey einen Azimuthalquadranten, so wird diese Linie, wie auch immer das Instrument gestellt wird, auf der Azimuthalscheibe angemerkt. Da man durch dieses Instrument zugleich die Höhe der Sonne und die Weltgegend, über welcher sie steht, oder die Lage ihres Verticalcirculs beobachten kann, so wird die Aufgabe des §. 60. welche auch zur See häufig gebraucht wird, dadurch sehr bequem, und alle Mühe fällt auf die Berechnung. Die Zeit zwischen beyden Observationen wird füglich zur Beobachtung der Oerter, die in Grundriß kommen sollen, angewandt.

§. LXV. Da sich die Genauigkeit der durch diese Aufgaben gefundenen Mittagslinie nach den Instrumenten richtet, so man dabey gebraucht, so müssen diese von solcher Größe und Güte gewählt werden, daß sie die Richtigkeit geben, welche man bey Grundlegung einer Landschaft zur Absicht hat. Je größer diese ist, desto mehr muß man auch auf kleinere Umstände sehen, und wenn wir den äußersten Grad der Schärfe annehmen, so fällt die bisher vorausgesetzte Parallellage der Mittagslinie weg, und die Erde selbsten kann nicht mehr als eine Kugel betrachtet werden. Daher werden die oben angeführte Aufgaben in etwas geändert, und es kommen

noch

noch verschiedene neue dazu, welche in vielen Fällen eben so gute Dienste thun können. Laßt uns demnach noch sehen, wie ferne diese Umstände etwas ändern können, und wie diese Abänderung könne gefunden und nachgeholt werden.

§. LXVI. Zu diesem Ende wollen wir anfangs setzen, daß man in einem Parallelstriche fortrücke. Es sey (Fig. 14.) APB ein Mittagscircul, P der Pol, AB der Aequator, EMD der Parallelstrich, auf welchem die Beobachtungen angestellt werden, M, N zween Stände, wo man die Abweichung der Oerter von den Mittagscirculn MP, NP beobachtet. CP seye die Erdachse, und MQ, NQ Tangenten der Mittagscircul: so ist klar, daß, wenn die in M, N gezogene Mittagslinien verlängert werden, dieselben in Q zusammentreffen, und daselbst den Winkel MQN mit einander machen.

§. LXVII. Um diesen Winkel zu finden, so sey der Abstand der Oerter M, N vom Pole P, oder der Bogen MP = e, der der Winkel MPN = c, so ist die Chorde MN = $2. \sin e. \sin \frac{1}{2}c.$

$$QM = \tan e.$$

daher

$$\sin \tfrac{1}{2} MQN = \sin \tfrac{1}{2}c. \cos e.$$

§. LXVIII. Da bey Grundlegung einzeler Landschaften der Bogen MN nicht größer als einige Grade ist, so kann man statt der *sinus* die Winkel nehmen, und setzen

$$MQN = c. \cos e.$$

§. LXIX. Wird der Bogen MN in Meilen gemessen, Z. E. in deutschen, deren 15. auf einen Grad gehen, so läßt sich MQN in Minuten eines Grades finden. Es sey MN von a Meilen, folglich von $\frac{1}{15}$a Graden, so ist

$$c. \sin e = \tfrac{1}{15}a \text{ Gr.} = 4a. \text{ Minuten}$$

$$MQN = c. \cos e = 4a. \cot e$$

folglich

$$MQN = 4a. \cot e \text{ Minuten.}$$

§. LXX. Unter der Breite von 45. ist $\cot e = 1$, daher müssen daselbst für jede $\frac{1}{4}$ Meil, um welche man bey dem Landmessen gegen Osten oder Westen fortrückt, die Mittagslinien um 1 Minute von der parallelen Lage abgelenket werden.

§. LXXI. Diese Ablenkung wächst wie die Tangenten der Polhöhe. Man setze der Bogen MN sey von einer Meile, so ist unter der Polhöhe die Ablenkung MQN.

°		°	'	"
45	- -	0	4	0
46	- -	0	4	$8\frac{1}{2}$
47	- -	0	4	$17\frac{1}{3}$
48	- -	0	4	$26\frac{1}{2}$
49	- -	0	4	36.
50	- -	0	4	40.

Man sieht demnach, daß sobald die Instrumente Minuten und noch kleinere Theile angeben, diese Abweichung der Mittagslinien von der parallelen Lage nicht könne weggelassen werden, weil sie mitten in dem gemäßigten Erdgürtel, auf jede Meile, um welche man östlicher oder westlicher ist, 4 und mehr Minuten beträgt.

§. LXXII. Hingegen nimmt diese Ablenkung nicht so merklich zu, wenn man von Süd nach Norden geht, weil ihre Zunahme, wie aus gegenwärtiger Tabelle zu ersehen, auf einen Grad Unterschied in der Breite, in dem gemäßigten Erdstriche, nur etwann 10 Secunden beträgt, welches auf eine Meile $\frac{2}{3}$ Secunden giebt.

§. LXXIII. Durch diese Berechnung kann man den Fehler, welcher aus der Versäumniß dieses Unterschiedes entstehen würde, auf eine leichte Art und ziemlich genau verbessern, wenn man einen Mittagscircul wählt, welcher durch die Landschaft geht, so man in Grund legen will, und alle übrigen auf diesen bezieht. Es sey der zum Grund gelegte Mittagscircul PM. Weiß man nun an jedem Stand N wie viel Meilen man von M hinweg ist, so läßt sich daraus und aus der Polhöhe der Winkel MQN finden, um welchen die Mittagslinien in M und N von der parallelen Lage abweichen. Hat man demnach in N eine Mittagslinie gezogen, so läßt sich vermittelst des Winkels MQN eine andere Linie ziehen, welche mit der zum Grunde gelegten Mittagslinie in M in der That, oder, so genau als man verlangt, parallel ist. Und diese muß man bey der Anwendung obiger Aufgaben statt der Mittagslinie gebrauchen. (§. 8. seqq.)

§. LXXIV. Sollte man, wie es bey vielen von den obigen Aufgaben geschieht, die Lage des Standes N erst aus der Beobachtung finden müssen, so ist es genug, wenn man Anfangs die Mittagslinien MQ, NQ als parallel annimmt, und die Figur construirt. Denn daraus ergiebt sich die Lage des Orts C genau genug, daß man den Winkel MQN daraus finden, und daher in N eine mit MQ gleichlaufende Linie ziehen könne. Wäre auch diese zweyte verrichtung noch nicht scharf genug, so müßte man die dadurch gefundene Lage des Ortes C nochmals zu genauerer Bestimmung des Winkels MQN gebrauchen, welches aber selten nöthig ist, weil man, um N zu construiren, die zwischen M und N liegende und bereits in Riß eingetragene Oerter zu der ersten Construction gebrauchen kann. Von der Polhöhe des Standes C gilt hier ebenfalls, was wir oben (§. 52.) angemerkt haben.

§. LXXV. So lange man bey der Berechnung des Winkels NQM den Winkel MPN oder den Unterschied der Länge gebraucht, kömmt die abgeplattete Figur der Erde hiebey nicht in Betrachtung, und man wird immer

$$\sin \tfrac{1}{2}\, NQM = \sin \tfrac{1}{2}c.\ \cos e$$

finden, weil der Winkel MQC allemal die Polhöhe vorstellt. Es stehe MK auf der Axe senkelrecht, so ist diese Linie der Halbmesser des Parallels EMD, und daher der Bogen

$$MN = MK.\ c.$$

folglich die Senne $MN = 2MK.\ \sin.\ \tfrac{1}{2}c.$

Und daher

$$\sin \tfrac{1}{2}\, MQC = \frac{MK.\ \sin \tfrac{1}{2}c.}{QM}$$

Es ist aber

$$MK : QM = \sin MQP = \cos e$$

folglich

$$\sin \tfrac{1}{2}\, MQC = \sin \tfrac{1}{2}c.\ \cos e$$

Welches eben die Formel ist, die wir für die sphärische Erde *gefunden* haben.

§. LXXVI. Will man hingegen diese Formel so verwandeln, daß MN in Meilen oder Schuhen ausgedrückt werde, so muß man die Figur der Erde annehmen, und daraus finden, wie viele Meilen oder Schuhe ein Grad des Parallels EMD enthält. Wird durch diese Zahl die, so dem Bogen MN entspricht, getheilt, so findet man C in Graden, und kann demnach die erst gefundene Formel, oder die daraus abgekürzte

$$MQN = c.\ \cos e.$$

Zu Bestimmung des Winkels MQC gebrauchen.

§. LXXVII. Wir wollen nun die Aufgabe des §. 17. welche bey wirklich parallelen Mittagslinien von so weitläuftigem und bequemen Gebrauche ist, wiederum vornehmen, und sie in Absicht

auf

auf die zusammenlaufenden Mittagslinien etwas umständlicher betrachten. Es seyen demnach (Fig. 15.) A, B zwey in den Riß schon eingetragene Oerter, AP die Mittagslinie des Ortes A, BM die Mittagslinie des Ortes B, und BQ sey mit AP parallel gezogen. Man befinde sich an dem Stande C, dessen Mittagslinie Cm sey, und messe daselbst die Winkel ACm, mCB, welches die Abweichungswinkel von der Mittagslinie Cm sind. Man solle hieraus die Lage des Puncts C finden.

§. LXXVIII. Man ziehe CR mit AP parallel, so zeigt der Winkel mCR an, wie viel sich Cm gegen AP neiget, und es ist klar, daß wenn man ACR, RCB gemessen hätte, oder auch den Winkel mCR wüßte, die Auflösung von der obern (§. 17.) gegebenen nicht verschieden wäre. Der Winkel mCR muß aber erst durch die Lage des Puncts C gefunden werden, und diese hingegen hängt wieder von dem Winkel mCR ab.

§. LXXIX. Um demnach beydes zu finden, so bemerke man, daß die Winkel mCR, QBM sich gegen einander verhalten, wie die Entfernungen der Linien CR, BQ von der Linie AP. Setzet man demnach Cm sey mit AP oder BQ wirklich parallel, so müßte mCB = CQB seyn. Es ist aber mCB = cBQ, und demnach müßte der Ort in c liegen. Denn weil der ganze Winkel ACB gegeben ist, so läßt sich der Circul APB wie §. 25. ziehen, auf welchem der Ort C nothwendig liegen muß. Der Punct c kann demnach immer gefunden werden. Ferner trage man den Bogen QM aus c in g, so muß sich cC zu Cg verhalten, wie die Entfernung des Puncts g von der Linie BQ. Hierdurch aber wird der wahre Punct C gefunden.

§. LXXX. Nach dieser Anleitung kann die Aufgabe auch trigonometrisch aufgelößt werden, welches um so mehr nothwendig ist, weil man hier so kleine Theile sucht, die man durch die Construction nicht erhalten würde. Es ist aber

AcB = ACB
cAB = ACm
cBQ = mCB

Demnach hat man in dem Triangel AB, weil PAB gegeben, und QB mit AP parallel ist, alle Winkel und die Seite AB. Wodurch man Ac findet. Ist Ac gefunden, so giebt diese Seite nebst dem Winkel cAC die aus c auf AP fallende Perpendicularlinie, und folglich den Abstand dieses Puncts von derselben. Eben so wenn man Ag, Bg mit Linien zusammen zieht, wird in dem Triangel gAB die Seite gB, und die aus g auf BQ fallende Perpendicularlinie gefunden. Endlich verhält sich die Summe dieser Perpendicularlinien zu der kleinern, wie der Bogen cg zu dem kleinern Abschnitte cC, oder wie QBM zu mCR. Hiedurch werden die wahre Winkel CAP, BAQ gefunden.

§. LXXXI. Diese Auflösung ist zwar nicht von geometrischer Schärfe, indessen aber so genau, als man sie in der Ausübung verlangen kann. Man kann auch die Probe darüber anstellen, wenn man nämlich durch den gefundeuen Punct C eine wahre Mittagslinie zieht, und dabey sieht, ob die Winkel ACR, ACB genau so heraus kommen, wie sie gemessen worden sind.

§. LXXXII. Da hiebey die Triangel als auf einer ebenen Fläche liegend betrachtet werden, in der That aber auf einer Kugelfläche sind, so äußert sich in Ansehung der Winkel ein kleiner Unterschied, weil die Summe der Winkel eines sphaerischen Triangels allemal größer ist als 180 Grad. Man kann aber diesen Ueberschuß aus dem Innhalt des Triangels finden, weil er demselben proportional ist. Wenn wir setzen, dieser Innhalt werde in Quadratgraden gemessen, welches bey so kleinen Triangeln nach Art der flach liegeuden geschehen kann, so läßt sich diese Verhältniß folgender maßen bestimmen:

Die beyden Coluri und der Aequator dnrchschneiden sich unter rechten Winkeln, und theilen die ganze Kugelfläche in 8 gleiche Triangel. Jeder Winkel hält 90°, und daher die Summe von dreyen 270 Gr. Daher ist für jeden Triangel der Ueberschuß seiner Winkel über $180° = 90°$, welches für alle 8 Triangel, und daher für die ganze Kugelfläche 720 Grade giebt. Man kann demnach sagen: wie sich der Innhalt der ganzen Kugelfläche zu 720 verhält, so verhält sich der Innhalt eines jeden Triangels zu dem Ueberschuß seiner Winkel über 180 Gr.

§. LXXXIII. Ferner sey die Verhältniß des Diameters zu dem Umkreyse $= 1 : \pi$, der Umkreyß $= 360^{\circ}$, so ist der Diameter $= \frac{360}{\pi}$ Grad, und daher der Innhalt der Kugelfläche $= \frac{360.\ 360}{\pi}$ Quadratgrade, welches 41252, 96 Quadratgrade giebt.

§. LXXXIV. Man setze nun einen Triangel, dessen Innhalt ein Quadratgrad sey, so wird man den Ueberschuß seiner Winkel durch §. 82. finden.

$$= \frac{720.\ \pi}{360.\ 360} = \frac{\pi}{180}\ \text{Gr.} = \frac{3,\ 1415926\ \text{rc.}}{180}$$

folglich

$$= 0^{\circ}\ 1^{\prime}\ 2^{\prime\prime}\ 49^{\prime\prime\prime}\ 54^{\prime\prime\prime\prime}\ 40^{\mathrm{v}}\ 15^{\mathrm{v}\prime}\ 48^{\mathrm{v}\prime\prime}\ 38^{\mathrm{v}\prime\prime\prime}\ \text{rc.}$$

oder wenn Decimalbrüche bequemer sind

$$= 62,\ 8318530718.\ \text{Secunden.}$$

mit dieser Zahl muß die Anzahl der Quadratgrade eines Triangels multiplicirt werden, wenn man finden will, wie viel die Summe seiner drey Winkel größer ist als 180. Gr.

§. LXXXV.

§. LXXXV. Um nun das bisher gesagte durch ein ausführliches Beyspiel zu erläutern, so sey (Fig. 16.) P der Pol, A, B, C drey Oerter; PA, PB, PC die dadurch gezogenen Mittagscircul. Man setze

$$\begin{array}{ll} APC = 1^\circ\ 10' & AP = 41^\circ\ 16' \\ APB = 1\ \ 50 & CP = 41\ \ 50 \\ CPB = 0\ \ 40 & BP = 41\ \ 2 \end{array}$$

so findet man

$$\begin{array}{ll} PAB = 78^\circ\ 21'\ 50'' & ACB = 81^\circ\ 58'\ 28'' \\ PBA = 100\ \ 15\ \ 20 & BAC = 47\ \ 24\ \ 49 \\ PAC = 125\ \ 46\ \ 39 & ABC = 50\ \ 37\ \ 9 \\ PCA = 53\ \ 20\ \ 57 & AB = 1\ \ 13\ \ 43 \\ PCB = 28\ \ 37\ \ 31 & BC = 0\ \ 54\ \ 49 \\ PBC = 150\ \ 52\ \ 29 & AC = 0\ \ 57\ \ 33 \end{array}$$

und die aus C auf AB fallende Perpendicular — 42 22. = 0, 7061 Gr. Da nun AB = $1^\circ\ 13'\ 43''$ = 1, 2284 Gr. ist, so ist der Innhalt des Triangels ABE = 0, 4337 Quadratgrade, und demnach (§. 84.) der Ueberschuß seiner drey Winkel über 180 Gr. = $27\frac{1}{4}''$. Die vorige Rechnung gibt $81^\circ\ 58'\ 28'' + 47^\circ\ 24'\ 49'' + 50^\circ\ 37'\ 9'' - 180^\circ = 26''$, welches nun eine Secunde weniger ist, und blos daher kömmt, weil hiebey für die Secunden der Proportionaltheil gesucht, und die Brüche von Secunden weggelassen worden.

§. LXXXVI. Die Winkel, so die in A, B, C gezogenen Mittagslinien miteinander machen, finden sich bey der Beybehaltung der sphärischen Figur auf eine gedoppelte Art. Einmal ist

$$\begin{array}{l} 180 - PAC - PCA = 0^\circ\ 52'\ 24. \\ 180 - PCB - PBC = 0\ \ 30\ \ 0. \\ 180 - PAB - PBA = 1\ \ 22\ \ 50. \end{array}$$

Sodann

Sodann hat man (§. 68.)

$$ACP. \cos \frac{AP + CP}{2} = 0\ 52\ 23\tfrac{1}{3}.$$

$$EBP. \cos \frac{PC + PB}{2} = 0\ 30\ 0.$$

$$ABP. \cos \frac{PA + PB}{2} = 1\ 22\ 50.$$

§. LXXXVII. Diese beyden Rechnungen treffen dannoch bis auf Secunden zusammen, ungeachtet keine nach geometrischer Schärfe die Abweichung der Mittagslinien von einander vorstellt, weil diese bey sphärischen Triangeln zwar alle die Erdachse durchschneiden, aber nicht auf gleicher Fläche liegen. Indessen sieht man, daß man die letztere für die erstere zuverläßig gebrauchen kann, so oft sie bequemer fällt, und daß man dabey zwischen den Polhöhen das Mittel nehmen muß. Wir haben ferner den Triangel ABC von solcher Größe angenommen, dergleichen bey Landmessungen selten vorkommen, und demnach ist die Rechnung bey kleinern um desto zuverläßiger.

§. LXXXVIII. Wir merken aber ferners an, daß die erst gefundenen Abweichungen, wenn die größere von der Summ der kleinern abgezogen wird, $1^\circ\,22'\,50'' + 0^\circ\,30'\,0'' - 1^\circ\,52'\,24'' = 0^\circ\,0^\circ\,26''$ oder den Innhalt des Triangels ABC in solchen Theilen übrig lassen, deren die Kugelfläche 720 enthält. (§. 82.) Denn die Summ der kleinern ist

$$= + 180 - PAC - PCA.$$
$$+ 180 - PBC - PCB.$$

die größere aber

$$= + 180 - PBA - PAB.$$

folglich der Unterschied

$$= + ACB + ABC + BAC - 180^\circ$$

 und

und daher der Ueberfluß der drey Winkel des Triangels über 180. Gr.

§. LXXXIX. Dieser Unterschied würde nicht seyn, wenn der Triangel ABC flach wäre, und rührt demnach schlechterdings von seiner sphärischen Ründung her. Indessen aber sehen wir daraus, daß der Innhalt des Triangels dienen könne, aus den Winkeln, welche eine der Mittagslinien mit den beyden übrigen macht, die zu finden, welche diese beyde unter sich machen, und daher auch die Ausmessungen auf die Probe zu stellen.

§. XC. Wir haben ferner gesetzt, (§. 79.) daß die Abweichungen der Mittagslinien den Winkeln, die sie in P unter sich machen, proportional wären, welches auch nicht nach aller Schärfe richtig ist, so bald die Seiten AB, BC, CA merklich groß, und die Oerter A, B, C von verschiedener Breite sind. Wir können dieses nun auf die Probe setzen, wenn wir die Winkel in P (§. 85.) und die Unterschiede (§. 86.) mit einander vergleichen. Demnach wäre

$$1^\circ\,50' : 1^\circ\,10' = 1^\circ\,22'\,50'' : 52'\,32\tfrac{3}{4}''$$

$$1^\circ\,50' : 40' = 1^\circ\,22'\,50'' : 30'\,7\tfrac{1}{4}''$$

Es sollte aber (§. 86.) $52'\,24''$ und $30'$ seyn, daher ersteres um $8\tfrac{3}{4}''$ letzteres um $7\tfrac{1}{4}''$ von dem wahren abgeht. Dieser Fehler ist bey kleinern Triangeln geringer, indessen giebt es bey Landmessungen wenige Fälle, wo er nicht unerheblich seyn sollte, weil wenige Instrumente Unterschiede von Secunden anzeigen.

§. XCI. Man kann aber diesem Fehler auf eine andere Art abhelfen. Denn, da man (Fig. 15.) in der Aufgabe des §. 77. den Punct c findet, und daher in dem Risse auch seine Polhöhe

hat,

hat, so nehme man zwischen dieser Polhöhe und der von dem Punct A das Mittel, und multipliciere dessen Sinus mit der Anzahl von Graden, so die Seite Pc enthält, so wird man einen Winkel finden, von welchem mCR fast gar nicht unterschieden ist. Man mache diesem Winkel cBC gleich, und so kann man mit dem Punct C eben so, wie erst mit c verfahren, und damit den wahren Punct C so genau man will bestimmen.

§. XCII. Die Fälle, wo man solche Schärfe sucht, sind allerdings sehr selten, und es ist klar, daß die besten Instrumente dazu erfordert werden. Ist dieses aber, so läßt sich die Aufgabe ohne solche Umwege auflösen. Wir wollen sie daher mit andern, die damit eine Verwandtschaft haben, vortragen.

§. XCIII. Da man vermittelst guter Instrumente, nebst der Lage der Mittagslinie, zugleich auch die Polhöhe genau finden kann: (§. 59. seqq.) so werden wir setzen, daß beydes zugleich gesucht werde. Auf diese Art hat man, (Fig. 16.) wenn A aus B und hinwiederum B aus A gesehen werden kann, die Seiten AP, BP und die Winkel PPB, PBA, und folglich in dem Triangel BPA ein Stück mehr als nöthig wäre, um ihn zu berechnen. Dieses mag aber dienen, die Zuverläßigkeit der übrigen zu prüfen, und da, wo man leichter hätte fehlen können, eine Verbesserung anzubringen. Ist die Entfernung AB sonst bekannt, so bedarf man der Beobachtung an einem der Oerter A, B nicht, weil man in dem Triangel APB immer drey Stücke hat. Dieser wird demnach als gegeben angenommen.

§. XCIV. Es sey nun C ein jeder Ort, an welchem man A, und B sieht. Man observire daselbst die Winkel ACP, BCB; so läßt sich die Lage des Ortes C finden. Wir können noch anmerken, daß diese Aufgabe allgemeiner wird, wenn P nicht der

Pol, sondern ein anderes Object ist, welches man in C sehen kann, und dessen Lage bekannt ist. Denn auf diese Art verfallen wir auf die Aufgabe des §. 25. und der Unterschied besteht nur darinn, daß, weil hier die Ründung der Erde in Betrachtung kömmt, der Triangel APB in einem solchen Maaße müsse bekannt seyn, daß man dessen Seiten in Graden und Minuten bestimmen könne.

§. XCV. Man setze nun

$$\begin{array}{lll} PAB = a & AP = E & AB = c \\ PBA = b & BP = e & ACB = \kappa \\ ACP = f & PAC = x & \\ PCB = g & PBC = y & \end{array}$$

so hat man

$$\sin PC = \frac{\sin E.\ \sin x}{\sin f} = \frac{\sin e\ \sin y}{\sin g}$$

daher

$$\sin x = \frac{\sin e.\ \sin f.\ \sin y}{\sin E.\ \sin g}$$

wofür Kürze halber gesetzt wird

$$\sin x = m.\ \sin y.$$

Ferner hat man in dem Triangel ABC die Verhältniß zwischen den drey Winkeln und der Seite AB, oder

$$\cos \kappa = \sin (x-a).\ \sin (y-b).\ \cos c - \cos (x-a).\ \cos (y-b)$$

Welches die zweyte Gleichung ist, und sich in folgende verwandelt:

$$\cos \kappa = (\sin x.\ \cos a - \cos x.\ \sin a)\ (\sin y.\ \cos b - \cos y.\ \sin b)\ \cos c$$
$$- (\cos x.\ \cos a + \sin x.\ \sin a).\ (\cos y.\ \cos b + \sin y.\ \sin b)$$

Es ist aber

$$\sin x = m.\ \sin y$$
$$\cos x = \sqrt{(1 - m^2 \sin y^2)}$$

Ferner setze man:

$$\tang \tfrac{1}{2} y = z$$

so

so ist

$$\sin y = \frac{2z}{1+zz}$$

$$\cos y = \frac{1-zz}{1+zz}$$

$$\sin x = \frac{2\,mz}{1+zz}$$

$$\cos x = \frac{\surd\,(1+(1-m^2)\,z^2)}{1+zz}$$

Diese Werthe substituirt geben

$$\cos \varkappa.\,(1+zz)^2 = (2mz.\cos a - \surd\,(1+zz\,(1-4m^2))).\sin a).\,(2z\cos b - (1-zz)\sin b.).\cos c$$
$$- \cos a \surd\,(1+(1-4m^2)\,zz) + 2\sin a.\,mz).\,(\cos b\,(1-zz) + \cos b.\,2z)$$

§. XCVI. Da diese Gleichung vom 8ten Grade und daher fast unbrauchbar wird, so wollen wir die Auflösung bequemer durch Näherung suchen, uud zu dem Ende nur die erstere

$$\sin x = m.\sin y$$

beybehalten. Es sey in dem Triangel ABC der Ueberschuß seiner Winkel über 180° Gr. $= \alpha$, so stellt α seinen Innhalt in $\frac{1}{720}$sten Theilen der ganzen Kugelfläche vor (§. 82.), und ist daher bey Landmessungen kaum eine Minute. Hiedurch haben wir

$$x + y - a - b + \varkappa = 180^\circ + \alpha$$

folglich

$$x = 180^\circ + a + b - \varkappa + \alpha - y$$

Man setze

$$180^\circ + a + b - \varkappa = \lambda.$$

so hat man

$$x = \lambda + \alpha - y$$

Folglich

$$\sin(\lambda + \alpha - y) = m . \sin y$$

Hieraus wird

$$\sin(\lambda + \alpha) \cos y - \cos(\lambda + \alpha) \sin y = m . \sin y$$

folglich

$$\cot y = \frac{m + \cos(\lambda + \alpha)}{\sin(\lambda + \alpha)} = \frac{m + \cos\lambda . \cos\alpha - \sin\lambda . \sin\alpha}{\sin\lambda . \cos\alpha + \cos\lambda . \sin\alpha}$$

Weil α so klein ist, so setzt man ohne erheblichen Fehler

$$\cos\alpha = 1.$$
$$\sin\alpha = \alpha.$$

Und läßt in der Theilung die Höhen, Dignitäten von α hinweg, so ist endlich

$$\cot y = \frac{m + \cos\lambda}{\sin\lambda} - \frac{(m + \cos\lambda)\cos\lambda . \alpha}{\sin\lambda^2} - \alpha$$

Das erste Glied dieser Gleichung würde allein dienen, wenn der Triangel flach wäre. Denn in solchem Fall ist $\alpha = 0$. Dieses nimmt man wirklich an, und berechnet daraus den Innhalt des Triangels ABC, welcher zu dieser Absicht durch eine Construction zureichend genau gefunden werden kann. Dieser Innhalt in $\frac{1}{720}$ Theile der Kugelfläche verwandelt (§. 84.) giebt den Werth α, welcher keiner weitern Verbesserung bedarf. Widrigen Falls müßte man α in der erstgefundenen Gleichung gebrauchen, um den Winkel y und sodann α noch näher zu finden.

§. XCVII. Um diese Methode durch ein Beyspiel zu erläutern, wollen wir das obige wieder vornehmen, bey welchem wir ohnehin schon alle Theile und den Innhalt des Triangels ABC wissen. Es ist demnach

$$\begin{array}{rl} & \ \ {}^{\circ}\quad {}'\quad {}'' \\ a = & 78\ \ 21\ \ 50 \\ b = & 100\ \ 15\ \ 20 \\ & 180 \\ \hline & 358\ \ 37\ \ 10 \\ \varkappa = & 81\ \ 58\ \ 28 \\ \hline \end{array}$$

folglich $\lambda = 276\ 38\ 42$

Ferner

$$\begin{aligned} \log \sin e &= \log \sin 41^{\circ}\ 2'\ 0'' = 9{,}8172334 \\ \log \sin f &= \log \sin 53\ \ 20\ \ 57 = 9{,}9043304 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\ \ \overline{19{,}7215638} \\ \log \sin E &= \log \sin 41\ \ 16\ \ 0 = 9{,}8192573 \\ \log \sin g &= \log \sin 28\ \ 37\ \ 31 = 9{,}6804072 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\ \ \overline{19{.}4996645} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log m &= 0{,}2218993 \\ \log \sin \lambda &= 9{,}9970756 - 10 \\ \log \cos \lambda &= 9{,}0633981 - 10 \\ \hline \log \frac{m}{\sin \lambda} &= 0{,}2248237 \\ \log \frac{m \cos \lambda}{\sin \lambda^2} &= 0{,}2911462 \\ \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} &= 0{,}1164991. \\ \frac{\sin \lambda^2}{\cos \lambda^2} &= 0{,}0135720. \\ \frac{m}{\sin \lambda} &= 1{,}6781226. \\ \frac{m \cos \lambda}{\sin \lambda^2} &= 0{,}1955000. \end{aligned}$$

Diese

Diese Werthe in der Gleichung gesetzt geben:

$$-\cot y = 1{,}7946217 + 1{,}2090720.\ \alpha$$

Denn da $\lambda = 276^\circ\ 38'\ 42''$, so ist der Sinus davon negativ.
Wird $\alpha = 0$ gesetzt, so findet man

$$y = 150^\circ\ 52'\ 21''$$

anstatt $y = 150\ \ 52\ \ 29$

Daher ist der Unterschied $= 0\ \ 0\ \ 8$

Welcher an sich sehr klein ist. Da man ihn aber nicht weis, so wird der Werth $y = 150^\circ\ 52'\ 21''$ beybehalten, und vermittelst desselben der Innhalt des Triangels ABC berechnet, oder construirt. Man hat aber

		°	'	''
y	=	150	52	21
ABP	=	100	15	20
AGC	=	50	37	1
ACB	=	81	58	28
AB	=	1	13	43 = 1,2285 Gr.

Hieraus findet man den Innhalt $= 0{,}4336$ Quadratgrade, und folglich (§. 84.) $\alpha = 27\frac{1}{4}$. Nämlich eben so wie wir es oben (§. 85.) aus den genau angenommenen Seiten und Winkeln gefunden haben. Und es ist klar, daß es nicht wohl anderst seyn könne, weil der hier angenommene Winkel y von dem wahren nur in Secunden verschieden ist, und der Unterschied in der Verhältniß, auf $27''$, welche $= \alpha$ sind, noch lange keine Secunde Unterschied geben kann. Da es demnach keiner fernern Näherung bedarf, so wird $\alpha = 27''$ beybehalten, und x und y gefunden. Es ist nämlich:

$$\alpha \text{ oder } \sin \alpha = 0{,}0001583.$$

Daher

Daher

$$- \cot y = 1{,}7947800$$

$$\begin{array}{rrrr} & {}^{\circ} & {}' & {}'' \\ y = & 150 & 52 & 29. \\ \lambda + \alpha = & 276 & 39 & 9 \\ \hline x = & 125 & 46 & 40. \end{array}$$

Welcher Werth um 1 Secunde größer ist als oben §. 85. weil wir hier $\alpha = 27''$ beybehalten haben.

§. XCVIII. Wir können bey dieser Auflösung der beyden Aufgaben des §. 94. noch anmerken, daß man an statt der Bögen AP, BP, welche wir zu Bestimmung der Verhältniß m gebraucht haben, die zween Winkel PAB, PBA gebrauchen könne. Denn es ist

$$m = \frac{\sin e . \sin f}{\sin \varepsilon . \sin g}$$

und

$$\sin e : \sin \varepsilon = \sin a : \sin b$$

folglich

$$m = \frac{\sin a . \sin f.}{\sin b . \sin g.}$$

Wenn demnach die Winkel a, b, f, g ohne die Polhöhe oder Bögen AP, BP und die Seite AB durch anderweitige Ausmessungen genauer gefunden werden können, als es mittelst der Polhöhe geschehen würde, so wird nicht nur ihre Berechnung ersparet, sondern die Auflösung selbst genauer. Dieses ist insonderheit in Absicht auf die Seite AB zu merken, deren Länge durch irrdische Ausmessungen genauer gefuuden wird, als wenn man den Himmel dazu gebraucht, und es ist klar, daß ihr Maaß in die Länge der übrigen Seiten, und daher im Fortgange auf die ganze Ausmessung der Landschaft einen Einfluß hat. Man muß, so viel möglich ist, suchen das Maaß der Seiten von den Instrumenten, womit man die Winkel mißt, unabhängig zu machen.

Hingegen verhält es sich mit den Winkeln etwas anders, weil diese schlechthin von der Genauigkeit des Instrumentes und der Beobachtung abhängen, und in so ferne ist es gleich viel, ob man Objecte am Himmel oder auf der Erde dazu gebraucht, weil es darauf ankönmt, ob man das Instrument genau nach dem vorhabenden Punct richte.

§. XCIX. Will man sich begnügen, wie es bey Landkarten geschieht, die Länge und Breite der Oerter bis auf Minuten zu finden, so läßt sich mit guten Instrumenten die Polhöhe allerdings gebrauchen, und bey entferntern Objecten wird folgende Aufgabe nützlich angebracht.

§. C. Man beobachte in A den Winkel PAB und den Bogen AB. A und B mögen zween Berge seyn, die man im ganzem Lande oder weit und breit herum sieht. Man befinde sich an einem jeden Orte C, und beobachte daselbst die Winkel PCA, PCB nebst dem Bogen CB, so wird die ganze Figur gegeben seyn. Denn

1°. In dem △ APC hat man AP, PC, ACP, hieraus findet man AC, APC, PAC folgends auch BAC.

2°. In dem △ ADC hat man nun AC, BAC, ACD, hieraus wird AD, DC, ADC, und daher auch CDB gefunden.

3°. In dem △ CDB hat man nun DCB, DC, CDB, hieraus findet sich CB, CBD, BD, folglich auch AB.

4°. End-

4°. Endlich in dem △ CPB hat man CP, PCB, CB, woraus BP, BPC, und PBC gefunden wird.

§. CI. Wenn man zu dem Orte C noch einen andern wählt und dabey eben so verfährt, wie in C, so hat man nun mehr Stücke als nöthig sind, und man findet noch einen Werth von BP, AB, APB, welcher mit dem in C gefundenen verglichen, statt einer Probe dienen und zur Ausbesserung der Fehler gebraucht werden kann. Werden noch mehr Stände, wie C angenommen, so findet man eben so viele neue Werthe von BP, AB, ABC, und kann sodann aus jeden das Mittel nehmen, und die Aufgabe umkehren, indem man dieses Mittel, als dem wahren näher kommend zum Grunde legt, und nach Anleitung der vorhergehenden Aufgabe §. 94. die Lage der Stände C, ohne die Polhöhen oder die Bögen AP, CB, BP zu gebrauchen, genauer findet. Uebrigens ist für sich klar, daß so viele Oerter man an zween von den gewählten Ständen sehen kann, so bald die Lage dieser Stände einmal gefunden ist, die Lage von allen auch leicht gefunden werden könne.

§. CII. Bey dieser Aufgabe hat man in dem Triangel APB nur die Seite AP und den Winkel PAB, und jeder Stand C ist für sich zureichend die übrigen Stücke zu bestimmen. Aus diesem folgt, daß sich die Aufgabe auch so umkehren lasse, daß wenn man von dem Triangel ABC gar nichts weis, hingegen drey Stände wählt, an welchen man A und B sehen kann, und an jedem Stande die Winkel ACP, BCP und den Bogen PC ausmißt, die Lage der 3. Stände und der beyden Objecte A, B mit einem male könne gefunden werden. Diese Aufgabe hat mit derjenigen, die wie oben (§. 34.) für wirklich Parallele Mittagslinien gegeben haben, eine völlige Aehnlichkeit, weil hier eigentlich P das dritte Object ist, welches man zwar nicht auf Erden, oder in der Nähe, sondern am Himmel sieht. Hingegen verursacht die Ründung der Erde, daß in P Winkel sind, und da man hier keinen willkührlichen Maaßstab annehmen darf, so müssen die Polhöhen der Stände oder die Bögen CP, welche ihre Erfüllungen sind, gegeben seyn. Ich werde mich aber begnügen, die Möglichkeit der Auflösung, und zugleich ihre Weitläufigkeit anzuzeigen. Es sey

$$AP = E \qquad ACP = f \qquad APB = \xi$$
$$BP = e \qquad BCP = g$$
$$APB = h \qquad CP = p$$

so hat man in jedem der Triangel ACP, BCP vier aneinander liegende Stücke, daher ist

$$\cot E . \sin p = \cos \xi . \cos p + \cot f . \sin \xi$$
$$\cot e . \sin p = \cos (h - \xi) \cos p + \cot g . \sin (h - \xi)$$

Wird aus diesen Gleichungen ξ weggeschaft, welches durch eine Quadratgleichung und Wurzelzeichen geschehen kann, so bleibt noch eine Gleichung, welche die Verhältniß zwischen den bekandten größten und den drey gesuchten E, e, h ausdrücket. Vermittelst der zween übrigen Stände werden noch zwo ähnliche Gleichungen gefunden, und da man also 3. hat, so sind die drey gesuchte Stücke dadurch bestimmt. Diese Auflösung scheint aber volleuds unbrauchbar. Da aber die Winkel, so die Mittagscircul am Pole machen, selten über einen Grad sind, so kann man $\cos \xi$ und $\cos (h-\xi) = 1$ setzen, und für die Sinus dieser Winkel, die Winkel selbst gebrauchen. Demnach wäre:

$$\cot E . \sin p = \cos p + \xi . \cot f$$
$$\cot . e . \sin p = \cos p + h . \cot g - \xi \cot g .$$

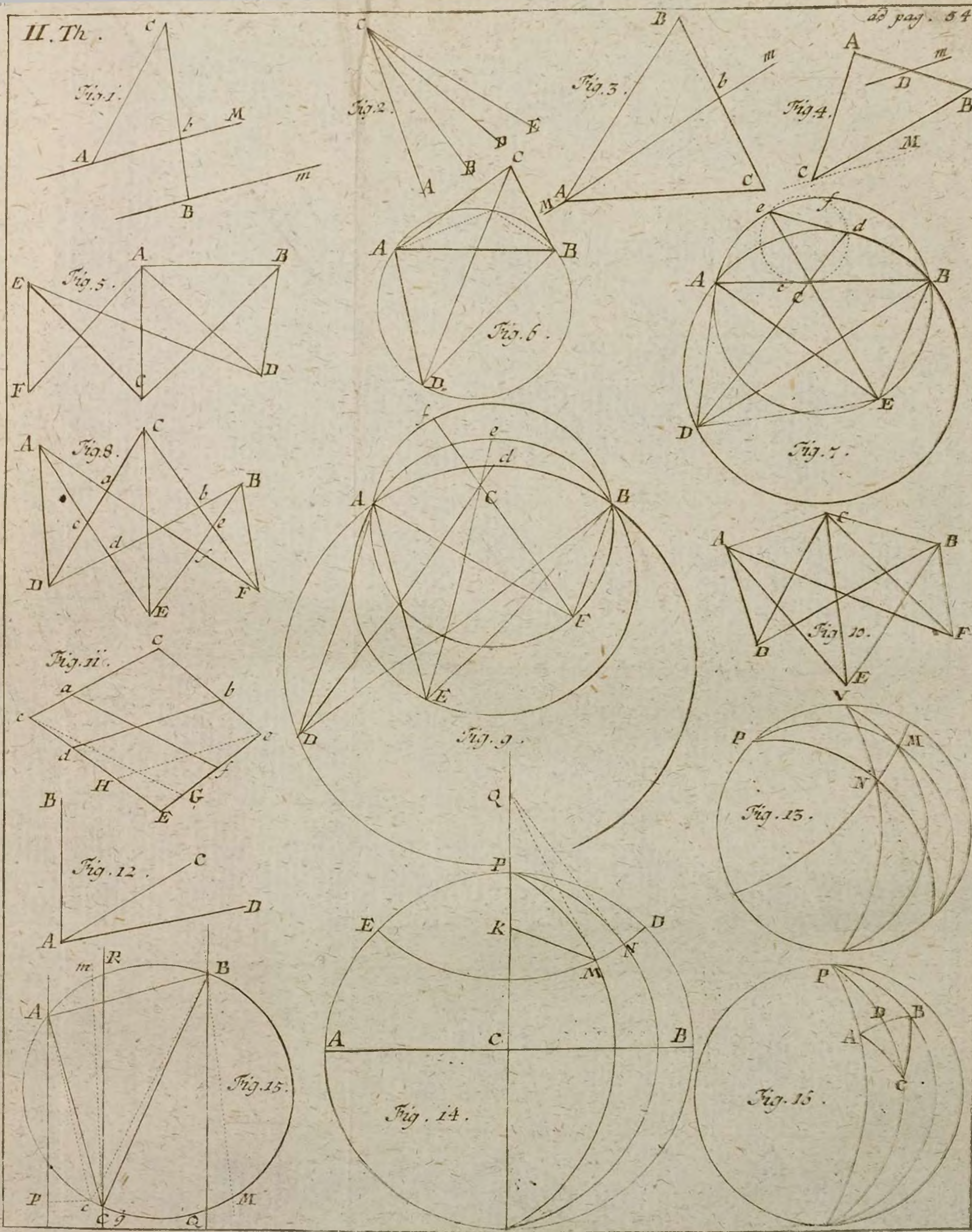
Aus

Aus diesen zwo Gleichungen ξ weggeschaft bleibt:

$$\textit{cot}\ E.\ \textit{sin}\ p.\ \textit{tang}\ f + \textit{cot}\ e.\ \textit{sin}\ p.\ \textit{tang}\ g = \textit{cos}\ p\ (\textit{tang}\ f + \textit{tang}\ g) + h.$$

Für die zween andere Stände findet man zwo ähnliche Gleichungen, und da sie vom ersten Grade sind, so ergiebt sich E, e, h ohne Zweydeutigkeit. Will man sodann dem wahren Werthe noch näher kommen, so muß man aus den Gefundenen die Winkel h, ξ suchen, und sehen ob *cos* ξ und *cos* (h—ξ) von 1 beträchtlich verschieden sind. Ist dieses, so substituirt man diese Werthe in den ersten zwo Gleichungen und an statt der *sin* x, *sin* (h—ξ) läßt man nochmals ξ, und h—ξ gelten, weil man weniger fehlt, wenn man für die Sinus kleiner Bögen die Bögen selbst, als wenn man für ihre Cosinus den Halbmesser nimmt. Denn der erste Unterschied wächst wie der $\frac{1}{6}$ vom Cubus, der Andere aber wie $\frac{1}{2}$ Quadrat des Sinus. Demnach fällt jener nach der dritten, dieser aber nur nach der zweyten Dignität ins unendlich Kleine.

§. CIII. Wir haben bisher solche Schärfe gesucht, daß sich dabey an den Gebrauch des Compasses nur nicht gedenken ließe. Da es indessen Fälle giebt, wo man ihn zur Noth, oder weil man eben nicht die äußerste Schärfe sucht, gebraucht, so müssen wir noch anmerken, daß zwar die kleinern Umstände, die wir bisher betrachtet haben, dabey fast nothwendig wegfallen, weil sich da von Secunden nicht reden läßt, hingegen aber hat der Compaß die Hinderniß auch, daß die dadurch gefundene Mittagslinien eben so wenig, als die wahren parallel sind, und in der gemäßigten Zone für jede Meile, um die man gegen Morgen oder Abend fortrückt, einen Winkel von ungefehr 4 Minuten mit einander machen (§. 70.) welches im Fortgange bald $\frac{1}{4}$. Grade giebt, die man mit größern Compassen noch sehr wohl unterscheiden kann. Wollte man die magnetischen Mittagscircul gebrauchen, so laufen dieselben ebenfalls etwas westwärts vom Erdpole gegen einen Punct zusammen, und die Mühe, darüber Rechnung zu tragen, fällt demnach dabey nicht weg. Indessen hat die geringere Genauigkeit, die man sich bey dem Compasse gefallen läßt, den Vortheil, daß wenn man nur bey einer Meil Weges weis, wie viel man vou dem zum Grunde gelegten Mittagscircul §. 73. gegen Osten oder Westen entfernt ist, an jedem Stande eine Linie kann gezogen werden, die mit diesem Mittagscircul so genau parallel ist, als man es von dem Compasse verlangeu kann. Und an statt der Rechnung läßt sich die Construction bequem gebrauchen.


II. Th.
ad pag. 54.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.