

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXII. Jahrgang 1902.

München.

Verlag der k. Akademie.

1903.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

**Ueber Differentialgleichungen,
die mit ihren adjungirten zu derselben Art gehören.**

Von **Alfred Loewy.**

(Eingelaufen 4. Januar 1902.)

Herr Gino Fano¹⁾ hat sich mehrfach mit dem Satze beschäftigt:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung n ter Ordnung:

$$(D) \quad y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = 0$$

durch eine Transformation:

$$z = a_0(x)y + a_1(x)y' + a_2(x)y'' + \dots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)},$$

wobei die $a_0(x)$, $a_1(x)$, $\dots$, $a_{n-1}(x)$ dem Rationalitätsbereiche, für den die Rationalitätsgruppe betrachtet wird, angehören, in diejenigen der adjungirten Differentialgleichung:

$$(D_1) \quad z^{(n)} - (p_1 z)^{(n-1)} + (p_2 z)^{(n-2)} - \dots - (-1)^n p_n z = 0$$

übergeführt werden können, dass also (D) und (D₁) zu derselben Art²⁾ gehören, besteht darin, dass die Rationalitätsgruppe

¹⁾ G. Fano, Sulle equazioni differenziali lineari che appartengono alla stessa specie delle loro aggiunte. (Atti della R. Acc. di Torino, vol. 34, (1899).) Osservazioni sopra alcune equazioni differenziali lineari. (Rend. della R. Acc. dei Lincei (1899).) Ueber lineare homogene Differentialgleichungen mit algebraischen Relationen zwischen den Fundamentallösungen. Math. Ann. Bd. 53, p. 568.

²⁾ Vgl. Ludwig Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Bd. II 1, p. 120 und 124.

von (D) aus lauter Transformationen gebildet ist, welche eine bilineare Form:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n s_{ik} y_i z_k$$

von nicht verschwindender Determinante mit cogredienten Variablenpaaren y_i, z_i in sich überführen. Es möge mir gestattet sein, dieses Resultat einerseits für die Theorie der associirten Differentialgleichungen, andererseits für die Differentialgleichungen, denen die Producte der Integrale der vorgelegten Differentialgleichung zu je zweien genügen, zu verwerthen.

§ 1.

Stellen $y_1, y_2, \dots, y_n$ ein Fundamentalsystem von (D) dar, und bildet man:

$$y_{i_1 i_2 \dots i_m} = \begin{vmatrix} y_{i_1} & y_{i_2} & \dots & y_{i_m} \\ y'_{i_1} & y'_{i_2} & \dots & y'_{i_m} \\ y''_{i_1} & y''_{i_2} & \dots & y''_{i_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{(m-1)}_{i_1} & y^{(m-1)}_{i_2} & \dots & y^{(m-1)}_{i_m} \end{vmatrix},$$

wobei $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ und $i_1, i_2, \dots, i_m$ eine jede Combination der Zahlen $1, 2, \dots, n$ zu je m bedeuten, so genügen diese $\nu = \binom{n}{m}$ Determinanten einer linearen homogenen Differentialgleichung, die zuerst von Herrn L. Fuchs¹⁾ untersucht wurde und nach Herrn Ludwig Schlesinger²⁾ die n - m te associirte Differentialgleichung von $D = 0$ heisst; diese Differentialgleichung soll für das Folgende, wie es im allgemeinen der Fall ist, von der Ordnung $\binom{n}{m}$ angenommen werden. Ist A irgend

eine lineare Substitution, welche y_i in $\sum_{k=1}^n a_{ik} y_k$ ($i = 1, 2, \dots, n$) überführt, so erleiden die $y_{i_1 i_2 \dots i_m}$ die n - m te associirte Substitution $A^{(n-m)}$, nämlich die $y_{i_1 i_2 \dots i_m}$ gehen über in

$$\sum_{k_1 k_2 \dots k_m} a_{i_1 i_2 \dots i_m k_1 k_2 \dots k_m} y_{k_1 k_2 \dots k_m},$$

¹⁾ L. Fuchs, Sitzungsberichte der Berliner Akademie (1888), p. 1115.

²⁾ Ludw. Schlesinger, Handbuch II 1, p. 125.

dabei ist:

$$a_{i_1 i_2 \dots i_m k_1 k_2 \dots k_m} = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \dots & a_{i_1 k_m} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} & \dots & a_{i_2 k_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_m k_1} & a_{i_m k_2} & \dots & a_{i_m k_m} \end{vmatrix},$$

und $k_1 < k_2 < \dots < k_m$ bedeutet eine jede Combination der Zahlen $1, 2, \dots, n$ zu je m . Die Theorie der associirten Differentialgleichungen beruht in ihren Grundlagen auf dem Angegebenen und dem Satze, dass die n - m te associirte Substitution einer aus zwei Substitutionen componirten Substitution aus den n - m ten associirten Substitutionen der beiden Componenten in derselben Reihenfolge zusammengesetzt ist. Ist $A \cdot B = C$, so ist:

$$A^{(n-m)} \cdot B^{(n-m)} = C^{(n-m), 1)}$$

Nehmen wir nun an, dass eine Differentialgleichung (D) mit der ihr adjungirten Differentialgleichung zu derselben Art gehört, so führen alle Transformationen der Rationalitätsgruppe von (D) eine und dieselbe bilineare Form φ mit cogredienten Variablenpaaren von nicht verschwindender Determinante in sich über. Die Rationalitätsgruppe der n - m ten associirten Differentialgleichung besteht aus den n - m ten associirten Substitutionen der Rationalitätsgruppe von (D). Bedenkt man, dass die transponirte Substitution von einer n - m ten associirten

¹⁾ Die obige Formel war, wie ich bemerken möchte, schon Weierstrass im Jahre 1868 bekannt. Vgl. die in Baltzers Theorie und Anwendung der Determinanten (4. Aufl. (1875)) übergegangene briefliche Mittheilung von Weierstrass, die W. an Baltzer anlässlich der Abhandlung über bilineare und quadratische Formen (Monatsberichte der Berliner Akademie, (1868)) machte. Baltzer, a. a. O., p. 55. Es sei noch erwähnt, dass diese Untersuchungen über die associirten Differentialgleichungen mit der Theorie der sogenannten Begleitformen, Concomitanten (Smith) einer bilinearen Form in engstem Zusammenhang stehen. Ich habe im Text statt Begleitform (Bachmann) associirte Form gesetzt. Ueber die Theorie der Begleitformen vgl. man Bachmann's Arithmetik der quadratischen Formen (Leipzig, 1898, p. 389).

Substitution die n - m te associirte Substitution der transponirten Substitution ist, so folgt, dass, wenn:

$$P' \varphi P = \varphi$$

ist, so ist auch:

$$P^{(n-m)'} \varphi^{(n-m)} P^{(n-m)} = \varphi^{(n-m)}.$$

Man erhält also den Satz:

I. Führt eine Substitution P eine bilineare Form φ mit cogredienten Variablenpaaren in sich über, so transformirt die n - m te associirte Substitution von P die n - m te associirte Form von φ cogredient in sich.

Wendet man dieses Ergebniss auf die n - m te associirte Differentialgleichung einer Differentialgleichung, die mit ihrer adjungirten zu derselben Art gehört, an, so ergibt sich, dass sämtliche Transformationen der Rationalitätsgruppe der n - m ten associirten Differentialgleichung die bilineare Form $\varphi^{(n-m)}$ in sich überführen. Der Werth der Determinante der n - m ten associirten Form $\varphi^{(n-m)}$ ist die $\binom{n-1}{m-1}$ te Potenz der Determinante von φ . Falls φ eine nicht verschwindende Determinante hat, so trifft dies auch für $\varphi^{(n-m)}$ zu.

Hieraus folgt:

II. Gehört eine Differentialgleichung mit ihrer adjungirten zu derselben Art, so gehören auch alle associirten mit ihren adjungirten zu derselben Art.¹⁾

Wir betrachten nun den besonderen Fall $n = 2m$ und schreiben die Determinante:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m & y_{m+1} & \dots & y_{2m} \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_m & y'_{m+1} & \dots & y'_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \dots & y_m^{(m-1)} & y_{m+1}^{(m-1)} & \dots & y_{2m}^{(m-1)} \\ z_1 & z_2 & \dots & z_m & z_{m+1} & \dots & z_{2m} \\ z'_1 & z'_2 & \dots & z'_m & z'_{m+1} & \dots & z'_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{(m-1)} & z_2^{(m-1)} & \dots & z_m^{(m-1)} & z_{m+1}^{(m-1)} & \dots & z_{2m}^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

¹⁾ Vgl. auch Ludw. Schlesinger, Handbuch II 1, p. 154.

hin; transformirt man in dieser Determinante die $2m$ Variablen einer jeden Zeile cogredient durch Substitutionen mit derselben Matrix P , so multiplicirt sich diese Determinante nur mit der Substitutionsdeterminante von P . Entwickelt man die obige Determinante nach adjungirten Subdeterminanten, so findet man die bilineare Form:

$$(Q) \quad \sum \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_m} k_1 k_2 \dots k_m y_{i_1 i_2 \dots i_m} z_{k_1 k_2 \dots k_m},$$

wobei $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_m} k_1 k_2 \dots k_m$ die positive oder negative Einheit, $i_1 < i_2 \dots < i_m$ und $k_1 < k_2 \dots < k_m$ sämmtliche Zahlen der Reihe 1, 2, $\dots$ $2m$ bis auf die Reihenfolge darstellen. $z_{k_1 k_2 \dots k_m}$ wird aus $z_1, z_2, \dots, z_{2m}$ in analoger Weise wie $y_{i_1 i_2 \dots i_m}$ aus $y_1, y_2, \dots, y_{2m}$ gebildet. Wendet man die n -te associirte Substitution $P^{(n-m)}$ auf die cogredienten Variablenpaare der bilinearen Form Q an, so multiplicirt sich Q mit der Determinante von P .

Wir denken uns die Rationalitätsgruppe von (D) auf ihre grösste unimodulare Untergruppe reducirt; diese Reduction erreicht man offenbar durch Adjunction der Hauptdeterminante:

$$\Delta(y_1 y_2 \dots y_{2m}) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{2m} \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(2m-1)} & y_2^{(2m-1)} & \dots & y_{2m}^{(2m-1)} \end{vmatrix}$$

zum Rationalitätsbereiche; denn damit $\Delta(y_1 y_2 \dots y_{2m})$ rational bekannt ist, ist offenbar nothwendig und hinreichend, dass die Determinanten sämmtlicher Transformationen der Rationalitätsgruppe den Werth ± 1 haben. Nach Adjunction der Hauptdeterminante bleibt aber bei den Transformationen der Rationalitätsgruppe für den neuen Bereich die bilineare Form Q ungeändert. Mit Hülfe des im Anfange citirten Satzes von Herrn Fano ergibt sich der von Herrn L. Fuchs¹⁾ gefundene und von ihm mehrfach behandelte Satz:

¹⁾ L. Fuchs, Sitzungsber. der Berliner Akademie (1888), p. 1115 ff., sowie ebenda (1899), p. 182.

Die Bemerkung von Herrn Fano in den Atti dell. Acc. di Torino

III. Die m te associirte Differentialgleichung irgend einer Differentialgleichung $2m$ ter Ordnung gehört mit ihrer adjungirten nach Adjunction der Hauptdeterminante der ursprünglichen Differentialgleichung zu derselben Art.

Nehmen wir nun an, dass schon die ursprüngliche Differentialgleichung mit ihrer adjungirten zu derselben Art gehörte; dann hat wegen:

$$P' \varphi P = \varphi$$

die Determinante von P den Werth ± 1 . In diesem Fall ist schon das Quadrat von $\Delta(y_1, y_2, \dots, y_{2m})$ rational bekannt. Um also die Rationalitätsgruppe einer Differentialgleichung, die mit ihrer adjungirten zu derselben Art gehört, unimodular zu machen, genügt schon die Adjunction einer Quadratwurzel zum Rationalitätsbereiche. Nach Adjunction einer Quadratwurzel lässt die Rationalitätsgruppe der m ten associirten Differentialgleichung einer Differentialgleichung $2m$ ter Ordnung die zwei bilinearen Formen $\varphi^{(m)}$ und Q invariant.

Es ist noch zu zeigen, dass sich $\varphi^{(m)}$ und Q nicht etwa nur um eine multiplicative Constante unterscheiden. Hat man eine bilineare Form

$$\varphi = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} s_{ik} y_i z_k,$$

so ist:

$$\varphi^{(m)} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m, k_1, k_2, \dots, k_m} s_{i_1 i_2 \dots i_m k_1 k_2 \dots k_m} y_{i_1 i_2 \dots i_m} z_{k_1 k_2 \dots k_m},$$

wobei $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ und $k_1 < k_2 < \dots < k_m$ und sowohl $i_1, i_2, \dots, i_m$ wie $k_1, k_2, \dots, k_m$ eine jede Combination der Zahlen $1, 2, \dots, 2m$ zu m bedeuten. Wäre nun $\varphi^{(m)}$ von Q nur um eine multiplicative Constante verschieden, so müsste unter anderem sein:

$$s_{12 \dots m k_1 k_2 \dots k_m} = 0,$$

(1899), p. 396 Anmerkung, durch die er den Satz von Herrn Fuchs beweisen will, halte ich nicht für zutreffend; denn die Gleichungen (21) auf p. 142 des zweiten Bandes des Schlesinger'schen Werkes werden für $n=6$ linker Hand Null ergeben; es wird also die quadratische Form, die Herr Fano benützt, nicht stets existiren.

falls $k_1, k_2, \dots, k_m$ irgend m geordnete von $m+1, m+2, \dots, 2m$ verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2, \dots, 2m$ darstellen; hingegen wäre $s_{12 \dots m m+1 \dots 2m}$ von Null verschieden. Betrachtet man die m Determinanten:

$$\begin{aligned} s_{12 \dots m 1 m+2 m+3 \dots 2m} &= 0 \\ s_{12 \dots m 1 m+1 m+3 \dots 2m} &= 0 \\ s_{12 \dots m 1 m+1 m+2 m+4 \dots 2m} &= 0 \\ \vdots & \\ s_{12 \dots m 1 m+1 m+2 \dots 2m-1} &= 0 \end{aligned}$$

und entwickelt sie nach den Elementen der ersten Colonne, so folgt, da $s_{12 \dots m m+1 \dots 2m}$ und mithin auch die aus den Unter-determinanten von $s_{12 \dots m m+1 \dots 2m}$ gebildete Determinante von Null verschieden ist, dass:

$$s_{11} = s_{21} = \dots = s_{m1} = 0$$

wird. Analog braucht man nur für die m letzten Zeilen das Verschwinden von $s_{m+11}, s_{m+21}, \dots, s_{2m1}$ zu zeigen. Dann wird gegen die Voraussetzung die Determinante von φ Null; mithin sind $\varphi^{(m)}$ und Q wesentlich verschieden.

Wir haben also den Satz:

IV. Die Rationalitätsgruppe der m ten associirten Differentialgleichung einer Differentialgleichung der $2m$ ten Ordnung, die mit ihrer adjungirten zu derselben Art gehört, führt nach Adjunction einer Quadratwurzel eine Schaar bilinearer Formen cogredient in sich über.

Eine jede Schaar bilinearer Formen enthält auch eine bilineare Form von verschwindender Determinante; wird aber eine bilineare Form verschwindender Determinante cogredient in sich transformirt, so ist die Gruppe der überführenden Substitutionen stets auf Substitutionen mit einer geringeren Variablenzahl reducibel. Wendet man daher das Criterium von Herrn Beke¹⁾ für die Irreducibilität einer linearen homogenen Differentialgleichung an, so ergibt sich:

¹⁾ Beke, Die Irreducibilität der linearen homogenen Differentialgleichungen. Math. Annalen, Bd. 45, p. 289; vgl. auch L. Schlesinger, Handbuch, II 1, p. 106.

V. Die m te associirte Differentialgleichung einer Differentialgleichung $2m$ ter Ordnung, die mit ihrer adjungirten zu derselben Art gehört, wird nach Adjunction einer Quadratwurzel zum Rationalitätsbereiche reducibel.

Dieser Satz ist auch von Herrn Richard Fuchs¹⁾ gefunden worden; jedoch fehlt bei ihm die Bemerkung, dass die Adjunction einer Quadratwurzel zum Rationalitätsbereiche unter Umständen nötig werden kann, damit die Differentialgleichung reducibel wird.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich auch auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung anwenden. In diesem Falle $n = 2$, $m = 1$ fällt die Differentialgleichung mit ihrer associirten zusammen. Wir finden also: Jede lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, die mit ihrer adjungirten zu derselben Art gehört, ist nach Adjunction einer Quadratwurzel zum Rationalitätsbereich reducibel, so dass sie durch die Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung befriedigt wird.²⁾

¹⁾ Richard Fuchs, Ueber lineare Differentialgleichungen, welche mit ihrer Adjungirten zu derselben Art gehören. Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 121, p. 205. Die Gleichung (5) des § 2 der Arbeit von Herrn R. Fuchs zeigt übrigens, dass eine Adjunction nothwendig werden kann.

Die Bemerkung „Der auf der linken Seite auftretende Factor $\frac{1}{A}$ beeinflusst, wie leicht zu sehen, diesen Schluss nicht“ (p. 207, Anmerkung) trifft also nicht zu. Vgl. auch L. Fuchs, Sitzungsber. der Berliner Akademie (1899), p. 190.

²⁾ Dass die Adjunction einer Quadratwurzel nothwendig werden kann, um die Differentialgleichung zweiter Ordnung, die mit ihrer adjungirten zu derselben Art gehört, reducibel zu machen, ergibt sich auch aus Herrn Lindemann's Untersuchungen „Ueber die Differentialgleichungen der Functionen des elliptischen Cylinders“ (Math. Annalen, Bd. 22). Herr Lindemann untersucht dort unter 5) Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die, wie man nach den Resultaten des folgenden Paragraphen sagen kann, falls eine gewisse transcendente Function $F(x)$ als rational bekannt angesehen wird, mit ihren adjungirten zu derselben Art gehören. Ist $F(x)$ bekannt, — ich wende dieselben Bezeichnungen wie Herr Lindemann an —, so bleibt die quadratische Form $y_1 y_2$ bei den Transformationen der Rationalitätsgruppe in dem

§ 2.

Für das Folgende setze ich voraus, dass die vorgelegte Differentialgleichung (D) ein derartiges Fundamentalsystem $y_1, y_2, \dots, y_n$ von Integralen besitzt, dass zwischen den gewählten Elementen $y_1, y_2, \dots, y_n$ keine homogene quadratische Relation mit constanten Coefficienten stattfindet. Wir betrachten die $n \left(\frac{n+1}{2} \right)$ Producte $y_i y_k$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$), die wir mit Y_{ik} bezeichnen; erfahren die y_i eine lineare homogene Substitution P , so transformiren sich auch die Y_{ik} linear; diese Substitution der Y_{ik} , soll anlehnd an Herrn Ad. Hurwitz¹⁾ die zweite Potenz- oder Quadrattransformation von P genannt und mit $\mathfrak{P}_2 P$ bezeichnet werden.

Unter der gemachten Annahme genügen die $n \left(\frac{n+1}{2} \right)$ Producte Y_{ik} einer linearen homogenen Differentialgleichung genau von der $n \left(\frac{n+1}{2} \right)$ ten Ordnung; die Differentialgleichung hat Coefficienten aus dem Rationalitätsbereiche, und die Grössen Y_{ik} bilden ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung. Die Differentialgleichung wird erhalten, indem man die aus $Y, Y_{11}, Y_{12} \dots Y_{nn}$ und deren Abgeleiteten bis zur Ordnung $n \left(\frac{n+1}{2} \right)$ gebildete Determinante durch die Wronskische Determinante der $n \left(\frac{n+1}{2} \right)$ Grössen $Y_{11}, Y_{12} \dots Y_{nn}$ dividirt und Null setzt. Aus dem bekannten Appell'schen Satze (Annales de l'école normale, II, Bd. 10, p. 400) ergibt sich nämlich, dass

Bereiche, der $F'(x)$ und daher auch die Ableitungen von $F'(x)$ enthält, ungeändert. Adjungirt man $y_1 y'_2 - y_2 y'_1$, das abgesehen von einer Constanten bei Herrn L. den Werth $\frac{1}{\sqrt{z(1-z)}}$ hat, dem Rationalitätsbereiche, so hat die Differentialgleichung des elliptischen Cylinders mit einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung mit Coefficienten aus dem durch $\frac{1}{\sqrt{z(1-z)}}$ erweiterten Bereiche Integrale gemein.

¹⁾ A. Hurwitz, Zur Invariantentheorie. Math. Annalen, Bd. 45, p. 390.

die Coefficienten dieser Differentialgleichung rational durch die Coefficienten von $D = 0$ und deren Abgeleitete darstellbar sind. Diese Differentialgleichung, die wir mit $\mathfrak{P}_2 D = 0$ bezeichnen wollen, findet man übrigens einfach, indem man y und dessen Abgeleitete aus $Y = y^2$ und den hieraus durch Differentiation hergeleiteten Gleichungen vermöge $D = 0$ eliminirt, bis man eine von y und dessen Abgeleiteten freie Gleichung erhält.¹⁾

Man sieht unschwer ein, dass die Rationalitätsgruppe von $\mathfrak{P}_2 D = 0$ aus den Quadrattransformationen der Transformationen der Rationalitätsgruppe von $D = 0$ besteht. Der Beweis kann etwa analog, wie ihn Herr L. Schlesinger im Handbuch II 1, p. 136 für die associirten Differentialgleichungen führt, erbracht werden.

Ich brauche jetzt einen Hilfssatz: Besitzt eine lineare homogene Differentialgleichung ein dem Rationalitätsbereiche angehöriges Integral, so bleibt dieses bei allen Transformationen der Rationalitätsgruppe nicht nur numerisch, sondern auch formal ungeändert.

Angenommen, irgend eine lineare homogene Differentialgleichung $D = 0$ besitze ein dem Rationalitätsbereiche angehöriges Integral, so lässt sich dieses wie jedes Integral in der Form:

$$(1) \quad c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots c_n y_n$$

darstellen, wo $y_1, y_2, \dots y_n$ ein Fundamentalsystem von (D), $c_1, c_2, \dots c_n$ Constante bedeuten. Ersetzt eine Transformation der Rationalitätsgruppe von (D) y_i durch $\sum_{k=1}^{k=n} p_{ik} y_k$, so geht das obige Integral (1) in

$$(2) \quad c_1 \sum_{k=1}^{k=n} p_{1k} y_k + c_2 \sum_{k=1}^{k=n} p_{2k} y_k + \dots + c_n \sum_{k=1}^{k=n} p_{nk} y_k$$

über; da (1) rational bekannt sein soll, so muss (1) bei den Transformationen der Rationalitätsgruppe numerisch ungeändert bleiben; es muss also (1) und (2) denselben Werth haben. Wären die zwei Ausdrücke nicht identisch dieselben, so hätte

¹⁾ Vgl. L. Schlesinger, Handbuch II 1, p. 202.

man eine homogene Relation mit constanten Coefficienten zwischen einem Fundamentalsystem von Integralen von (D); dies ist aber unmöglich. Hiermit ist der Hülfsatz erwiesen.

Angenommen die Gleichung $\mathfrak{P}_2 D = 0$ besitze ein dem Rationalitätsbereiche angehöriges Integral, so ist dieses eine lineare Function der Y_{ik} und bleibt bei allen Transformationen der Rationalitätsgruppe von $\mathfrak{P}_2 D = 0$ formal ungeändert. Die lineare Function der Y_{ik} ist aber eine quadratische Function der $y_i y_k$, die bei allen Transformationen der Rationalitätsgruppe von $D = 0$ ungeändert bleibt, die quadratische Form der $y_i y_k$ kann hierbei eine verschwindende oder nicht verschwindende Determinante haben. Ist $D = 0$ irreducibel, so muss die Determinante von Null verschieden sein. Verschwindet aber die Determinante der quadratischen Form, so kann man nach den Resultaten von Herrn Fano¹⁾ wenigstens sagen, dass eine Differentialgleichung niedrigerer Ordnung, deren Coefficienten dem Rationalitätsbereiche angehören und deren Integrale $D = 0$ genügen, mit der zu $D = 0$ adjungirten Differentialgleichung von derselben Art ist. Mithin erhalten wir den Satz:

I. Besitzt die Differentialgleichung $\mathfrak{P}_2 D = 0$ ein dem Rationalitätsbereiche angehöriges Integral, so bleibt bei sämtlichen Transformationen der Rationalitätsgruppe von $D = 0$ eine quadratische Form invariant, und es gehört entweder $D = 0$ oder eine Differentialgleichung, deren sämtliche Integrale $D = 0$ befriedigen und die Coefficienten aus dem Rationalitätsbereiche hat, mit der adjungirten Differentialgleichung von $D = 0$ zu derselben Art.

Existirt umgekehrt eine quadratische Form, die bei allen Transformationen der Rationalitätsgruppe von $D = 0$ formal ungeändert bleibt, so ist diese rational bekannt und ferner auch Integral von $\mathfrak{P}_2 D = 0$. Mithin folgt:

II. Lassen alle Transformationen der Rationalitätsgruppe von $D = 0$ eine quadratische Form invariant, so hat $\mathfrak{P}_2 D = 0$ ein dem Rationalitätsbereiche angehöriges Integral.

¹⁾ G. Fano, Math. Annalen, Bd. 53, p. 572.

Beachtet man schliesslich, dass, falls eine bilineare Form cogredient in sich übergeführt wird und diese nicht symmetrisch oder alternirend ist, auch stets eine bilineare Form verschwindender Determinante in sich übergeht, ferner dass eine alternirende Form nur geraden Rang haben kann, so sieht man, dass die Rationalitätsgruppe einer Differentialgleichung ungerader Ordnung, die irreducibel ist und mit ihrer adjungirten zu derselben Art gehört, nur aus Transformationen, die eine symmetrische und mithin eine quadratische Form in sich transformiren, bestehen kann. Hieraus folgt:

III. Erfüllen die Elemente eines Fundamentalsystemes einer irreduciblen Differentialgleichung $D = 0$ von ungerader Ordnung keine quadratische homogene Relation mit constanten Coefficienten, so ist nothwendig und hinreichend, damit die Differentialgleichung $D = 0$ mit ihrer adjungirten zu derselben Art gehört, dass die Differentialgleichung $n \left(\frac{n+1}{2} \right)$ ter Ordnung, welcher die Integralproducte y, y_k genügen, ein dem Rationalitätsbereiche angehöriges Integral besitzt.

Ist $D = 0$ irreducibel, so kann $\mathfrak{P}_2 D = 0$ niemals zwei dem Rationalitätsbereiche angehörige Integrale, die sich nicht um einen constanten Factor unterscheiden, besitzen; denn gäbe es zwei solche Integrale, so bliebe bei den Transformationen der Rationalitätsgruppe von $D = 0$ eine Schaar quadratischer Formen und daher auch eine Form verschwindender Determinante invariant; es müsste mithin $D = 0$ gegen die Voraussetzung reducibel werden.