Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXV. Jahrgang 1905.

München

Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften

1906.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Über die Konvergenz periodischer Kettenbrüche.

Von **Oskar Perron.**

(Eingelaufen 2. Dezember.)

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz periodischer Kettenbrüche mit beliebigen komplexen Gliedern sind zuerst von Stolz aufgestellt worden.[1]) Seine Darstellung hat jedoch insofern etwas unbefriedigendes, als dabei gewiße Formeln ohne eigentlichen Beweis überraschend auftreten und nur durch längere (nicht durchgeführte) Nebenrechnung zu verifizieren sind. Einen andern durchsichtigeren Weg zur Eruierung der Konvergenzbedingungen hat Herr Pringsheim[2]) eingeschlagen. Im folgenden bestätige ich die gewonnenen Resultate nach einer neuen Methode, wobei namentlich die Stolzschen Grundformeln auf rationelle Weise hergeleitet werden. Wie ich an andrer Stelle zeigen werde, hat mein Verfahren außerdem den Vorzug, daß sich durch eine naturgemäße Ausdehnung desselben auch über die Konvergenz der allgemeinen Jacobischen Kettenbruchalgorithmen mit beliebigen komplexen Gliedern im Fall der Periodizität entscheiden läßt.

§ 1.

In dem Kettenbruch

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots}}$$

---

1) Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, II, pag. 299 ff.

2) Diese Berichte 1900.

sollen die a_ν, b_ν beliebige komplexe Zahlen bedeuten, die nur der selbstverständlichen Forderung genügen: $a_\nu \neq 0$. Bedeuten A_ν, B_ν Zähler und Nenner des ν^{ten} Näherungsbruches, so bestehen bekanntlich die Formeln:

$$(1)\qquad \begin{aligned} A_0 &= 0, \quad A_1 = a_1, \quad A_{\nu+2} = a_{\nu+2} A_\nu + b_{\nu+2} A_{\nu+1}, \\ B_0 &= 1, \quad B_1 = b_1, \quad B_{\nu+2} = a_{\nu+2} B_\nu + b_{\nu+2} B_{\nu+1}; \end{aligned}$$

$$(2)\qquad A_\nu B_{\nu-1} - B_\nu A_{\nu-1} = (-1)^{\nu-1} a_1 a_2 \cdots a_\nu \neq 0.$$

Vermehrt man in A_ν, B_ν die Indices sämtlicher a, b um eine Zahl $\varkappa$, so sollen die entstehenden Ausdrücke mit $A_{\nu,\varkappa}$ bezw. $B_{\nu,\varkappa}$ bezeichnet werden, so daß $\dfrac{A_{\nu,\varkappa}}{B_{\nu,\varkappa}}$ der ν^{te} Näherungsbruch des Kettenbruchs

$$\cfrac{a_{\varkappa+1}}{b_{\varkappa+1} + \cfrac{a_{\varkappa+2}}{b_{\varkappa+2} + \cdots}}$$

ist. Man findet dann leicht, etwa durch vollständige Induktion in Bezug auf $\varkappa$, die Relationen

$$(3)\qquad \begin{aligned} A_{\nu+\varkappa} &= A_{\varkappa-1,\nu+1} A_\nu + B_{\varkappa-1,\nu+1} A_{\nu+1}, \\ B_{\nu+\varkappa} &= A_{\varkappa-1,\nu+1} B_\nu + B_{\varkappa-1,\nu+1} B_{\nu+1}. \end{aligned}$$

Bei Konvergenzuntersuchung periodischer Kettenbrüche genügt es, sich auf rein periodische zu beschränken. Ist dabei m die Gliederzahl der Periode, so wird dementsprechend

$$a_{m+\lambda} = a_\lambda, \quad b_{m+\lambda} = b_\lambda,$$
$$A_{\nu,m} = A_\nu, \quad B_{\nu,m} = B_\nu.$$

Aus (3) folgt daher für $\nu = m - 1$, $\varkappa = (k-1)m + \lambda + 1$:

$$(4)\qquad \begin{aligned} A_{km+\lambda} &= A_{(k-1)m+\lambda} A_{m-1} + B_{(k-1)m+\lambda} A_m, \\ B_{km+\lambda} &= A_{(k-1)m+\lambda} B_{m-1} + B_{(k-1)m+\lambda} B_m. \end{aligned}$$

Wenn nun der Kettenbruch konvergiert, so genügt sein Wert x jedenfalls der Gleichung

$$x = \frac{A_{m-1} x + A_m}{B_{m-1} x + B_m},$$

welche mit dem System der beiden folgenden äquivalent ist:

(5) $$\varrho x = A_{m-1} x + A_m, \quad \varrho = B_{m-1} x + B_m.$$

Durch Elimination von x folgt hieraus

(6) $$f(\varrho) = \begin{vmatrix} A_{m-1} - \varrho & A_m \\ B_{m-1} & B_m - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

während für x selbst die Beziehung

(7) $$B_{m-1} x^2 + (B_m - A_{m-1}) x - A_m = 0$$

hervorgeht. Die Gleichung für ϱ ist stets quadratisch und hat wegen (2) auch niemals die Wurzel $\varrho = 0$, dagegen kann die für x sehr wohl auch vom ersten oder nullten Grad sein. Doch ist leicht zu sehen, daß in diesem Fall der Kettenbruch stets divergiert; ist nämlich $B_{m-1} = 0$, so folgt aus der zweiten der Relationen (4) für $\lambda = m - 1$; $k = 1, 2, 3, \ldots$ sukzessive $B_{2m-1} = 0$, $B_{3m-1} = 0$, etc. Es gibt also unendlich viele sinnlose Näherungsbrüche (d. h. mit dem Nenner Null), und von Konvergenz kann somit keine Rede sein. Im folgenden setzen wir daher die zur Konvergenz notwendige Bedingung

(8) $$B_{m-1} \neq 0$$

als erfüllt voraus, so daß Gleichung (7) wirklich eine quadratische ist.

§ 2.

Eliminiert man aus der ersten der Gleichungen (4) und aus denjenigen zwei Gleichungen, die aus (4) hervorgehen, wenn darin k durch $k-1$ ersetzt wird, die Größen $B_{(k-1)m+\lambda}$, $B_{(k-2)m+\lambda}$, so erhält man:

(9) $$A_{km+\lambda} = (A_{m-1} + B_m) A_{(k-1)m+\lambda} + (A_m B_{m-1} - A_{m-1} B_m) A_{(k-2)m+\lambda};$$

und durch eine analoge Überlegung, indem man die beiden Gleichungen (4) ihre Rolle vertauschen läßt, ebenso:

(10) $$B_{km+\lambda} = (A_{m-1} + B_m) B_{(k-1)m+\lambda} + (A_m B_{m-1} - A_{m-1} B_m) B_{(k-2)m+\lambda}.$$

Betrachtet man die Fl. (9) für abnehmende Werte von k, so erhält man $A_{km+\lambda}$ zuerst linear ausgedrückt durch $A_{(k-1)m+\lambda}$ und $A_{(k-2)m+\lambda}$, sodann durch $A_{(k-2)m+\lambda}$ und $A_{(k-3)m+\lambda}$ u. s. w., endlich durch $A_{m+\lambda}$ und A_λ:

$$(11) \qquad A_{km+\lambda} = P A_{m+\lambda} + Q A_\lambda .$$

Nun kann, wenn wieder $f(\varrho)$ die in (6) eingeführte Funktion einer Variabeln ϱ bedeutet,

$$\varrho^k = (A_{m-1} + B_m)\varrho^{k-1} + (A_m B_{m-1} - A_{m-1} B_m)\varrho^{k-2} + \varrho^{k-2} f(\varrho)$$

gesetzt werden, und hieraus folgt offenbar ebenso, wie (11) aus (9):

$$(12) \qquad \varrho^k = P\varrho + Q + \varphi(\varrho) f(\varrho),$$

wo $\varphi(\varrho)$ ein gewisses Polynom vom $(k-2)$ten Grad, und P, Q dieselben Größen wie in (11) bedeuten.

Wir betrachten jetzt erstens den Fall, daß $f(\varrho)$ zwei verschiedene Wurzeln hat: ϱ_0 und ϱ_1. Dann ergibt sich durch Elimination von P, Q aus (11) und den beiden für $\varrho = \varrho_0$ und $\varrho = \varrho_1$ aus (12) hervorgehenden Gleichungen, sogleich:

$$\begin{vmatrix} A_{km+\lambda} & A_{m+\lambda} & A_\lambda \\ \varrho_0^k & \varrho_0 & 1 \\ \varrho_1^k & \varrho_1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder:

$$(13) \quad (\varrho_0 - \varrho_1) A_{km+\lambda} = \varrho_0^k (A_{m+\lambda} - \varrho_1 A_\lambda) - \varrho_1^k (A_{m+\lambda} - \varrho_0 A_\lambda);$$

ebenso auch

$$(14) \quad (\varrho_0 - \varrho_1) B_{km+\lambda} = \varrho_0^k (B_{m+\lambda} - \varrho_1 B_\lambda) - \varrho_1^k (B_{m+\lambda} - \varrho_0 B_\lambda).$$

Durch Auflösung nach ϱ_0^k, ϱ_1^k folgt hieraus weiter:

$$(15) \quad \begin{vmatrix} A_\lambda & A_{m+\lambda} \\ B_\lambda & B_{m+\lambda} \end{vmatrix} \varrho^k = \begin{vmatrix} A_{km+\lambda} & A_{m+\lambda} - \varrho A_\lambda \\ B_{km+\lambda} & B_{m+\lambda} - \varrho B_\lambda \end{vmatrix} \quad (\text{für } \varrho = \varrho_0, \varrho_1).$$

Durch die fundamentalen Formeln (13) und (14) werden Zähler und Nenner der Näherungsbrüche in independenter Form dargestellt. Um nun zunächst eine notwendige Konvergenz-bedingung zu finden, nehmen wir an, der Kettenbruch konvergiere (gegen den Wert x). Da alsdann $\lim\limits_{k=\infty} \frac{A_{km+\lambda}}{B_{km+\lambda}} = x$ ist, so muß $B_{km+\lambda}$ für hinreichend große k gewiß von 0 verschieden sein; man darf also (15) durch $B_{km+\lambda}$ dividieren, und erhält dann durch Übergang zur Grenze $k = \infty$:

$$\lim_{k=\infty} \begin{vmatrix} A_\lambda & A_{m+\lambda} \\ B_\lambda & B_{m+\lambda} \end{vmatrix} \frac{\varrho^k}{B_{km+\lambda}} = (B_{m+\lambda} - \varrho B_\lambda) x - (A_{m+\lambda} - \varrho A_\lambda),$$
$$(\text{für } \varrho = \varrho_0, \varrho_1).$$

Die links stehende Determinante kann nicht für zwei aufeinander folgende Werte von λ verschwinden. Denn in diesem Fall folgt, da dann die rechte Seite für $\varrho = \varrho_0$ und $\varrho = \varrho_1$, also identisch in ϱ verschwindet:

$$B_\lambda x = A_\lambda, \quad B_{m+\lambda} x = A_{m+\lambda},$$

und indem man λ durch die nächstfolgende Zahl ersetzt, auch:

$$B_{\lambda+1} x = A_{\lambda+1}, \quad B_{m+\lambda+1} x = A_{m+\lambda+1},$$

woraus $B_\lambda A_{\lambda+1} - A_\lambda B_{\lambda+1} = 0$ hervorginge; aber dies steht mit (2) im Widerspruch. Man kann somit λ derart wählen, daß die fragliche Determinante nicht verschwindet; dann ist aber aus der letzten Gleichung offenbar die Existenz der Grenzwerte

$$(16) \qquad \lim_{k=\infty} \frac{\varrho_0^k}{B_{km+\lambda}} = R_0, \quad \lim_{k=\infty} \frac{\varrho_1^k}{B_{km+\lambda}} = R_1$$

zu schließen. Würden diese beide verschwinden, so folgte wieder wie oben: $B_\lambda x = A_\lambda$, $B_{m+\lambda} x = A_{m+\lambda}$, und demnach müßte die Determinante verschwinden, was unsrer ausdrücklichen Annahme widerspricht. Sei also $R_0 \neq 0$; dann darf die zweite Gleichung (16) durch die erste dividiert werden, und es ergibt sich:

$$\lim_{k=\infty} \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right)^k = \frac{R_1}{R_0}.$$

Dies ist aber nur möglich, wenn $|\varrho_0| > |\varrho_1|$, $R_1 = 0$ ist.

Die Bedingung $|\varrho_0| > |\varrho_1|$ ist also für die Konvergenz notwendig. Ist sie aber erfüllt, so folgt aus (13), (14):

$$\text{(17 a)} \qquad \lim_{k=\infty} \frac{A_{km+\lambda}}{B_{km+\lambda}} = \frac{A_{m+\lambda} - \varrho_1 A_\lambda}{B_{m+\lambda} - \varrho_1 B_\lambda},$$

sowie nur der Nenner von 0 verschieden ist. Wenn aber im Gegenteil $B_{m+\lambda} - \varrho_1 B_\lambda = 0$, so ist dies nach (4) gleichbedeutend mit:

$$A_\lambda B_{m-1} + B_\lambda (B_m - \varrho_1) = 0;$$

da außerdem nach (6)

$$A_m B_{m-1} - (A_{m-1} - \varrho_1)(B_m - \varrho_1) = 0,$$

so verschwindet auch die Determinante dieser zwei Gleichungen, also $A_\lambda (A_{m-1} - \varrho_1) + B_\lambda A_m = 0$, d. h. $A_{m+\lambda} - \varrho_1 A_\lambda = 0$.

Es verschwindet also auch der Zähler von (17 a), und man hat daher in diesem Fall nach (13), (14):

$$\text{(17 b)} \qquad \lim_{k=\infty} \frac{A_{km+\lambda}}{B_{km+\lambda}} = \frac{A_{m+\lambda} - \varrho_0 A_\lambda}{B_{m+\lambda} - \varrho_0 B_\lambda}. [1]$$

Nun ist aber identisch

$$\begin{vmatrix} A_{m+\lambda} - \varrho A_\lambda & A_{m-1} - \varrho \\ B_{m+\lambda} - \varrho B_\lambda & B_{m-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_\lambda & B_\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{m-1} - \varrho & A_m \\ B_{m-1} & B_m - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{für } \varrho = \varrho_0, \varrho_1.$$

Da außerdem $\varrho_0 + \varrho_1$ gleich dem negativen Koeffizienten von ϱ in der Gleichung $f(\varrho) = 0$ ist, also $\varrho_0 + \varrho_1 = A_{m-1} + B_m$, so lassen sich die beiden letzten Resultate auch in folgender Form schreiben:

$$\text{(18)} \qquad \lim_{k=\infty} \frac{A_{km+\lambda}}{B_{km+\lambda}} = \begin{cases} \dfrac{A_{m-1} - \varrho_1}{B_{m-1}} = \dfrac{\varrho_0 - B_m}{B_{m-1}} & \text{für } B_{m+\lambda} - \varrho_1 B_\lambda \neq 0 \\[2ex] \dfrac{A_{m-1} - \varrho_0}{B_{m-1}} = \dfrac{\varrho_1 - B_m}{B_{m-1}} & \text{für } B_{m+\lambda} - \varrho_1 B_\lambda = 0. \end{cases}$$

---

[1] Es ist nämlich ausgeschlossen, daß der Nenner wieder verschwindet; denn nach der letzten Deduktion müßte auch der Zähler wieder verschwinden; da also $A_{m+\lambda} = \varrho A_\lambda$, $B_{m+\lambda} = \varrho B_\lambda$ für $\varrho = \varrho_0$ und $\varrho = \varrho_1$, so würde $A_\lambda = 0$, $B_\lambda = 0$ folgen, was nicht möglich ist.

Die beiden Ausdrücke rechts sind von λ unabhängig, aber von einander verschieden, und da es offenbar genügt, die Werte $\lambda = 0, 1, \ldots m-1$ in Betracht zu ziehen, so erkennt man, daß Konvergenz allemal dann stattfindet, wenn die Ausdrücke $B_{m+\lambda} - \varrho_1 B_\lambda$ $(\lambda = 0, 1, \ldots m-1)$ entweder alle m verschwinden, oder gar keiner von ihnen. Die erstere Möglichkeit ist übrigens illusorisch, da für $\lambda = m-1$ notwendig

$$B_{2m-1} - \varrho_1 B_{m-1} = A_{m-1} B_{m-1} + B_{m-1} B_m - \varrho_1 B_{m-1}$$
$$= B_{m-1} \varrho_0 \neq 0$$

ist. Die zur Konvergenz notwendigen und hinreichenden Bedingungen sind also im Fall $\varrho_0 \neq \varrho_1$:

$$B_{m-1} \neq 0, \quad |\varrho_0| > |\varrho_1|, \quad B_{m+\lambda} - \varrho_1 B_\lambda \neq 0 \text{ für } \lambda = 0, 1, \ldots m-2,$$

und der Wert des Kettenbruchs ist

$$x = \frac{\varrho_0 - B_m}{B_{m-1}}.$$

§ 3.

Wir behandeln jetzt den Fall $\varrho_0 = \varrho_1$. Eliminiert man P, Q aus (11), (12) für $\varrho = \varrho_0$ und der Derivierten von (12) für $\varrho = \varrho_0$, so erhält man jetzt:

$$\begin{vmatrix} A_{km+\lambda} & A_{m+\lambda} & A_\lambda \\ \varrho_0^k & \varrho_0 & 1 \\ k\varrho_0^{k-1} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$A_{km+\lambda} = \varrho_0^k A_\lambda + k\varrho_0^{k-1} (A_{m+\lambda} - \varrho_0 A_\lambda), \tag{19}$$

und analog auch

$$B_{km+\lambda} = \varrho_0^k B_\lambda + k\varrho_0^{k-1} (B_{m+\lambda} - \varrho_0 B_\lambda). \tag{20}$$

Falls $B_{m+\lambda} - \varrho_0 B_\lambda \neq 0$, was wieder für $\varrho = m-1$ sicher der Fall ist, folgt hieraus:

$$\lim_{k=\infty} \frac{A_{km+\lambda}}{B_{km+\lambda}} = \frac{A_{m+\lambda} - \varrho_0 A_\lambda}{B_{m+\lambda} - \varrho_0 B_\lambda}, \tag{21}$$

ein Wert, der wieder wie oben von λ unabhängig, nämlich gleich

$$\frac{A_{m-1} - \varrho_0}{B_{m-1}} = \frac{\varrho_0 - B_m}{B_{m-1}}$$

ist. Wenn dagegen für gewisse Werte von λ der Nenner in (21) verschwindet, so folgt wie vorhin auch wieder das Gleiche vom Zähler, und daher ist nach (19), (20)

$$A_{km+\lambda} = \varrho_0^k A_\lambda, \quad B_{km+\lambda} = \varrho_0^k B_\lambda. \tag{22}$$

Nun kann B_λ nicht verschwinden; denn wegen $B_{m+\lambda} - \varrho_0 B_\lambda = 0$, wäre dann auch $B_{m+\lambda} = 0$, d. h. $A_\lambda B_{m-1} + B_\lambda B_m = 0$, also $A_\lambda = 0$, was aber mit $B_\lambda = 0$ im Widerspruch steht. Da somit $B_\lambda \neq 0$, so folgt aus (22)

$$\frac{A_{km+\lambda}}{B_{km+\lambda}} = \frac{A_\lambda}{B_\lambda} = \frac{\varrho_0 - B_m}{B_{m-1}}.[1]$$

Dies ist aber derselbe Wert wie oben, also **konvergiert der Kettenbruch im Fall $\varrho_0 = \varrho_1$ immer.**

Man kann die gewonnenen Resultate noch etwas anders formulieren, indem man statt ϱ_0, ϱ_1 die Wurzeln x_0, x_1 der Gleichung (7) einführt. Nach (5) ist dann zu setzen:

$$\varrho_i = B_{m-1} x_i + B_m, \text{ also } \frac{\varrho_i - B_m}{B_{m-1}} = x_i \qquad (i = 0, 1).$$

Außerdem folgt

$$B_{m+\lambda} - \varrho_1 B_\lambda = A_\lambda B_{m-1} + B_\lambda (B_m - \varrho_1) = B_{m-1}(A_\lambda - x_1 B_\lambda),$$

so daß man folgenden Satz erhält:

Der Kettenbruch konvergiert dann und nur dann, und zwar gegen den Wert x_0, wenn erstens $B_{m-1} \neq 0$, und zweitens die Wurzeln x_0, x_1 der Gleichung

$$B_{m-1} x^2 + (B_m - A_{m-1}) x - A_m = 0$$

entweder einander gleich sind, oder die Bedingungen erfüllen:

---

[1] Die letzte Gleichheit besagt nichts anderes als die vorausgesetzte Identität: $B_{m+\lambda} - \varrho_0 B_\lambda = 0$.

$$|B_{m-1}x_0 + B_m| > |B_{m-1}x_1 + B_m|, \quad A_\lambda - x_1 B_\lambda \neq 0$$
$$\text{für } \lambda = 0, 1, \ldots m-2.$$

Endlich sei folgendes Resultat hervorgehoben, das unmittelbar aus (18) folgt:

Wenn von den Konvergenzbedingungen nur die beiden:

$$B_{m-1} \neq 0, \quad |B_{m-1}x_0 + B_m| > |B_{m-1}x_1 + B_m|$$

erfüllt sind, so oszilliert der Kettenbruch in der Weise, daß

$$\lim_{k=\infty} \frac{A_{km+\lambda}}{B_{km+\lambda}} = \begin{cases} x_0 & \text{für } A_\lambda - x_1 B_\lambda \neq 0 \\ x_1 & \text{für } A_\lambda - x_1 B_\lambda = 0. \end{cases}$$

Auf das Vorkommen dieser Eigentümlichkeit hat Thiele aufmerksam gemacht (Tidskrift for Math. III. 1879).