Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band X. Jahrgang 1880.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1880.

In Commission bei G. Franz.

Nachtrag zur Sitzung vom 5. Juni 1880.

Herr G. Bauer sprach:

„Ueber eine Eigenschaft des geradlinigen Hyperboloids."

In einem der letzterschienenen Hefte des Crelle'schen Journals [1]) betrachtet Herr H. Vogt das besondere Hyperboloid, welches drei zu einander normale Erzeugende und mithin auch unendlich viele Tripel von Normalstrahlen enthält. Herr Vogt nennt dieses Hyperboloid ein „gleichseitiges" und beweist von demselben u. A. den Satz: Drei Normalstrahlen aus einer Regelschaar entnommen und die drei zu ihnen parallelen Strahlen der andern Regelschaar bestimmen ein rechtwinkliges Parallelepiped von constantem Volumen. Versucht man diesen Satz auf das allgemeine Hyperboloid zu übertragen, so gelangt man zu einem durch seine Einfachheit überraschenden Resultat.

Sei U ein geradliniges Hyperboloid, V eine andere Fläche 2. Ordnung, so erzeugen dieselben auf der unendlich entfernten Ebene zwei Kegelschnitte u und v. Enthält u ein Dreieck eingeschrieben, das zu v conjugirt ist, so gibt es nach einem bekannten Satze unendlich viele Dreiecke, die zu v conjugirt und u eingeschrieben sind; oder also: Enthält

---

1) Bd. 86 (1879) S. 297.

ein Kegel 2. Ordnung (Asymptotenkegel von U) drei Gerade, welche conjugirte Durchmesser einer andern concentrischen Fläche 2. Ordnung V sind, so gibt es unendlich viele Tripel solcher Geraden auf dem Kegel und zwar einfach unendlich viele; jede Erzeugende des Kegels ist Gerade eines solchen Tripels. Da nun die Geraden der einen und der andern Kegelschaar eines Hyperboloids zu den Erzeugenden des Asymptotenkegels parallel sind, so folgt: Enthält das Hyperboloid U drei Gerade einer Schaar, die zu drei conjugirten Durchmessern einer andern Fläche V parallel sind, so enthält das Hyperboloid unendlich viele solche Tripel, d. h. alle Geraden der einen Schaar (und der andern) lassen sich in solche Tripel zusammenfassen. Ein Tripel der einen Schaar und das ihm parallele der andern Schaar bilden sechs Kanten eines durch sie bestimmten Parallelepipeds.

Ist V eine Kugel, so ist U ein „gleichseitiges" Hyperboloid. Nun können wir aber ein solches Hyperboloid durch affine Transformation in irgend ein anderes geradliniges Hyperboloid überführen. Parallele Gerade des Hyperboloids transformiren sich hiebei wieder in parallele Gerade des neuen Hyperboloids und ein Tripel von Normalstrahlen transformirt sich in ein Tripel von Strahlen parallel zu einem Tripel conjugirter Durchmesser der aus V transformirten Fläche. Da bei dieser Transformation das Verhältniss der Volumina sich erhält, so folgt nach dem Satze von Herrn Vogt: Sind drei Gerade auf einem beliebigen Hyperboloid U parallel zu drei conjugirten Durchmessern einer Fläche V, so lassen sich die Geraden einer Regelschaar auf U in solche Tripel zusammenfassen, welche zu je drei conjugirten Durchmessern von V parallel sind; jedes solche Tripel von Geraden und die ihm parallelen der andern Schaar bilden sechs Kanten eines Parallelepipeds von constantem Volumen.

Nun ist aber zu bemerken, dass zu einem und demselben Dreieck ein ganzes Netz von Kegelschnitten v gehört, welche das Dreieck zum Polardreieck haben. Wählt man zwei beliebige Dreiecke, die einem Kegelschnitt eingeschrieben sind, so lassen sich dieselben immer als conjugirte Dreiecke eines bestimmten Kegelschnitts betrachten [2]). Zwei beliebige Tripel von Erzeugenden eines Kegels können mithin angesehen werden als zwei Tripel conjugirter Durchmesser einer bestimmten concentrischen Fläche 2. Ordnung und es sind also auch zwei beliebige Tripel von Erzeugenden einer Regelschaar auf einem Hyperboloid parallel zu zwei Tripel conjugirter Durchmesser einer Fläche 2. Ordnung; dann sind zugleich einfach unendlich viele solche Tripel in der Regelschaar des Hyperboloids enthalten.

Diess in Verbindung mit dem vorigen Satze ergibt, dass, wenn wir zwei beliebige Tripel einer Regelschaar wählen, jedes dieser Tripel mit den Parallelen der andern Schaar ein Parallelepiped von constantem Volumen bilden. Wir gelangen so zu dem ebenso einfachen als allgemeinen Satze, welcher auffallender Weise bisher nicht bemerkt worden zu sein scheint, nämlich:

Irgend drei Gerade einer Regelschaar auf einem beliebigen Hyperboloid und die drei zu ihnen Parallelen der andern Schaar bestimmen ein Parallelepiped von constantem Volumen.

Diese Eigenschaft kommt also nicht nur dem speciellen gleichseitigen Hyperboloid und auf diesem bestimmten Tripeln von Geraden zu, sondern gilt allgemein für jedes Hyperboloid und irgend drei Geraden auf demselben.

Dieses Resultat lässt sich leicht analytisch bewahrheiten. Ist

---

2) Chasles, Sect. con. Nr. 216. S. 141.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

die Gleichung des Hyperboloids,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{array}\right\} \mathrm{I} \qquad \left.\begin{array}{l} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{array}\right\} \mathrm{II}$$

die Gleichungen der beiden Regelschaaren auf demselben, so ergeben sich für den Durchschnittspunkt einer Geraden λ mit einer Geraden μ die Coordinaten

$$x = a \cdot \frac{\lambda\mu + 1}{\lambda + \mu}, \quad y = b\,\frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}, \quad z = -c \cdot \frac{\lambda\mu - 1}{\lambda + \mu}.$$

Betrachten wir nun irgend ein windschiefes Viereck auf dem Hyperboloid, gebildet von den 4 Geraden λ_1, μ_2, λ_3, μ_4, (die Geraden der einen und der andern Schaar sind hier durch ihre Paramater bezeichnet), und sind A, B, C, D die Durchschnittspunkte je zwei aufeinanderfolgender dieser Geraden, O der Mittelpunkt des Hyperboloids, so ist das Volumen des Tetraeders O A B D

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{a\,b\,c}{(\lambda_1 + \mu_2)(\mu_2 + \lambda_3)(\lambda_1 + \mu_4)} \begin{vmatrix} \lambda_1\mu_2 + 1 & \lambda_1 - \mu_2 & \lambda_1\mu_2 - 1 \\ \lambda_3\mu_2 + 1 & \lambda_3 - \mu_2 & \lambda_3\mu_2 - 1 \\ \lambda_1\mu_4 + 1 & \lambda_1 - \mu_4 & \lambda_1\mu_4 \quad 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\,a\,b\,c \cdot \frac{(\mu_2 - \mu_4)(\lambda_1 - \lambda_3)}{(\lambda_3 + \mu_2)(\lambda_1 + \mu_4)} \tag{2}$$

Die Bedingung, dass eine Gerade μ der Geraden λ der andern Schaar parallel sei, ist

$$\mu = -\lambda.$$

Sind mithin λ_3 und μ_4 zwei parallele Gerade, so ist das Volumen des Tetraeders $= \frac{1}{3}\,a\,b\,c$. Also: das Volumen des Tetraeders gebildet von dem Mittelpunkt O, dem Durchschnitt irgend zweier Geraden λ, μ und den 2 Punkten, wo diese zwei Geraden von irgend zwei zu einander parallelen Geraden des Hyperboloids geschnitten werden, ist constant $= \frac{1}{3}\,a\,b\,c.$

Das Parallelepiped gebildet von irgend drei Geraden λ_1, λ_2, λ_3 und ihren Parallelen der andern Schaar zerlegt sich in Tetraeder dieser Art und ihnen an Volumen gleiche, so dass das Volumen eines solchen Parallelepipeds

$$= 4\,a\,b\,c$$

sich ergibt.

Nebenbei zeigt die Formel 2), dass das Volumen des Tetraeders O A B D nur abhängt von dem Doppelverhältniss der vier Parameter λ_1, $-\mu_2$, λ_3, $-\mu_4$. Sind mithin λ_2 und λ_4 die Parameter, der zu den Geraden μ_2 und μ_4 Parallelen der andern Schaar, so hängt das Volumen des Tetraeders nur von dem Doppelverhältniss der vier Geraden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ab, d. i. von der Grösse $\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_4} : \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4}$, die wir mit k bezeichnen wollen. Da sich der Werth dieses Doppelverhältnisses nicht ändert, wenn man λ_1, λ_2 mit λ_3, λ_4 vertauscht, so ersieht man, dass das Tetraeder O C B D das gleiche Volumen besitzt, also

$$\text{Tetr. O A B D} = \text{Tetr. O C B D} = \frac{1}{3}\,a\,b\,c\,.\,k.$$

Hält man die beiden Geraden λ_1, μ_2 fest, und ändert λ_3, μ_4, so verrücken sich die Punkte B, D auf λ_1 und μ_2, aber die zwei Tetraeder bleiben sich dem Volumen nach gleich, wie weit auch der Durchschnitt C von λ_3 und μ_4 hinausrücke. Hiebei ist zu bemerken, dass wenn C ins Unendliche rückt, indem die zwei Geraden λ_3, μ_4 parallel werden, zugleich die Ebene der zwei Geraden durch den Mittelpunkt O geht, so dass das Volumen des Tetraeders O C B D in diesem Grenzfall den Ausdruck $o \cdot \infty$ annimmt; während die Grenze, welcher sich die Volumina der beiden Tetraeder hiebei nähern, $= \frac{1}{3} a\,b\,c$ ist, indem $k = 1$ wird.

Die beiden Tetraeder O A B C und O A D C sind ebenfalls gleich, aber der Anordnung der Geraden entsprechen hier die gleichen Doppelverhältnisse $(\lambda_1\,\lambda_4\,\lambda_3\,\lambda_2)$ und $(\lambda_3\,\lambda_2\,\lambda_1\,\lambda_4)$, deren Werth $= -\frac{k}{1-k}$ ist. Man hat also

$$\text{Tetr. } O\,A\,B\,C = \text{Tetr. } O\,A\,D\,C = -\frac{1}{3}\,a\,b\,c\,\frac{k}{1-k}$$

Hieraus ergibt sich sodann auch das Volumen des Tetraeders A B C D selbst, das von vier beliebigen Geraden des Hyperboloids bestimmt wird, nämlich

$$\text{Tetr. } A\,B\,C\,D = \frac{2}{3}\,a\,b\,c\left(k - \frac{k}{1-k}\right)$$

$$= -\frac{2}{3}\,a\,b\,c\,\frac{k^2}{1-k}$$

Dieser Ausdruck ändert sich nicht, ob man die Geraden des Vierecks in der einen oder der entgegengesetzten Richtung zählt, da bei Umkehr der Richtung nur k in $-\frac{k}{1-k}$ übergeht.

Sind die vier Geraden λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 harmonisch, also $k = -1$, so hat auch dieses Tetraeder das Volumen $= \frac{1}{3}\,a\,b\,c$.