Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band X. Jahrgang 1880.

München.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

1880.

In Commission bei G. Franz.

Sitzung vom 3. Juli 1880.

Herr Klein spricht:

„Ueber unendlich viele Normalformen des elliptischen Integral's erster Gattung."

Der Hauptgesichtspunct, mit dem ich bisher in der Theorie der elliptischen Functionen gearbeitet habe, lässt sich mit zwei Worten kennzeichnen. Ich wünschte, dem Legendre'schen Modul $\varkappa^2$ nicht diejenige Alleinherrschaft zu lassen, welche er bisher fast unbestritten besass. Einmal muss er in manchem Betracht, wie diess bereits die Weierstrass'schen Vorlesungen gezeigt haben, hinter der rationalen Invariante J zurücktreten, andererseits aber bildet er als Modul zweiter Stufe das Anfangsglied einer unendlichen Kette von Moduln, die alle in vieler Hinsicht gleichberechtigt sind und eine gleichmässige Berücksichtigung verlangen. In meiner ersten der k. Akademie vorgelegten Arbeit[1]) zeigte ich in diesem Sinne, dass sich der Begriff der Modulargleichungen wesentlich erweitern lasse. Herr Gierster publicirte im Anschlusse hieran eine Untersuchung[2]), derzufolge die neuen Modulargleichungen für

1) Sitzungsbericht vom 6. Dec. 1879.

2) Sitzungsbericht vom 5. Febr. 1880.

zahlentheoretische Zwecke ebenso mit Nutzen verwerthet werden können, wie die früheren. Ich wünsche heute denselben Grundgedanken, allerdings nur in allgemeinen Zügen, nach einer dritten Richtung auszuführen, indem ich nicht nur, wie bisher, Modulfunctionen (von ω_1, ω_2), sondern doppeltperiodische Functionen (von u, ω_1, ω_2) in Betracht ziehe. Als einfachste Gestalt des elliptischen Integral's erster Gattung wählt man zumeist die Legendre'sche Normalform[1]):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x \cdot 1 - x \cdot 1 - \varkappa^2 x}}$$

Ich beabsichtige zu zeigen, dass ebenso einfache Normalformen des elliptischen Integral's erster Gattung existiren, in denen die Moduln dritter, vierter, fünfter etc. Stufe als Constante auftreten, so dass also die *Legendre*'sche Form nicht als Normalform schlechthin, sondern nur als solche zweiter Stufe erscheint, an die sich, den unendlich vielen Werthen von n entsprechend, unendlich viele Normalformen n^{ter} Stufe anreihen. Dabei möchte ich späteren Unter-

1) Dass man im Anschlusse an die gewöhnliche Behandlungsweise diese Form und nicht die aus ihr durch quadratische Transformation hervorgehende

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 \cdot 1 - \varkappa^2 x^2}}$$

als eigentliche Normalform betrachten soll, habe ich u. a. mathematische Annalen XIV, p. 116 auseinandergesetzt. Will man doch an letzterer festhalten, so operirt man, im Sinne der weiteren Auseinandersetzungen des Textes, mit einer Normalform vierter Stufe: $\sqrt{\varkappa}$ ist dann die Oktaederirrationalität (Annalen XIV, p. 155).

suchungen vorbehalten, zu beweisen, dass sich an jede dieser Normalformen in vollem Umfange analoge Untersuchungen anknüpfen lassen, wie man solche an die Legendre'sche Form in mannigfachster Weise angeschlossen hat.

Es kann sich bei einer solchen Theorie zuvörderst nicht um neue Thatsachen, sondern nur um neue Auffassung bekannter Thatsachen handeln. In der That sind meine ersten Sätze nichts Anderes, als eine Umstellung der bekannten Hermite'schen Sätze über Θ-Producte, wobei ich nur äusserlich, im Anschlusse an die Weierstrass'schen Vorlesungen, insofern eine Umänderung treffe, als ich statt der Function Θ, deren unendlich viele Formen für meine Zwecke gleichberechtigt sein würden, die nur in einer Form existirende Function σ setze.

Man betrachte verschiedene Producte aus je n Factoren σ:

$$\sigma(u - a_1) \,.\, \sigma(u - a_2) \,.\,.\,.\,.\,.\, \sigma(u - a_n),$$
$$\sigma(u - b_1) \,.\, \sigma(u - b_2) \,.\,.\,.\,.\,.\, \sigma(u - b_n), \text{ etc.},$$

wo

$$\Sigma a \doteq \Sigma b = \text{etc.}$$

sein soll. Dann behaupten die hier in Betracht kommenden Hermite'schen Sätze; dass der Quotient je zweier solcher Producte eine doppeltperiodische Function von u ist mit denjenigen Perioden ω_1, ω_2, die bei der Bildung der σ-Function benutzt wurden, sowie: dass sich alle solche Producte aus n unabhängigen derselben linear zusammensetzen lassen. — Ich schreibe nun, indem ich n unabhängige Producte dieser Art auswähle und unter $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ homogene Variable, unter ϱ einen Proportionalitätsfactor verstehe:

$$
(1) \quad \begin{cases}
\varrho x_0 = \sigma(u - a_1) \,.\, \sigma(u - a_2) \ldots \,.\, \sigma(u - a_n), \\
\varrho x_1 = \sigma(u - b_1) \,.\, \sigma(u - b_2) \ldots \ldots \sigma(u - b_n), \\
- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\
- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\
\varrho x_{n-1} = \sigma(u - n_1) \,.\, \sigma(u - n_2) \ldots \ldots \sigma(u - n_n).
\end{cases}
$$

Die x betrachte ich sodann, des kürzeren Ausdruck's wegen, als Coordinaten eines Punctes des Raumes von $(n - 1)$ Dimensionen. In diesem Raume stellen die Formeln (1) eine Curve dar, die, in Folge der voraufgeschickten Sätze, das Geschlecht 1 und die Ordnung n besitzt. Ich will dieselbe eine elliptische Curve der n^{ten} Stufe nennen. Man kann die Variable u definiren, indem man sie als Integral an einer solchen Curve hinerstreckt; ich spreche dann von einem Integral der n^{ten} Stufe.

Die niedrigste in Betracht kommende Stufe ist natürlich die zweite, da es keine doppeltperiodischen Functionen der ersten Stufe gibt. Die zugehörige Curve ist die gerade Linie $\frac{x_0}{x_1}$ doppelt überdeckt, und, wie man leicht sieht, mit vier Verzweigungspuncten (sommets) versehen. Das Integral zweiter Stufe ist kein anderes, als dasjenige, welches man gewöhnlich als elliptisches Integral (erster Gattung) schlechthin bezeichnet, nämlich:

$$\int \frac{x_1 \, dx_0 - x_0 \, dx_1}{\sqrt{f(x_0, x_1)}},$$

wo f irgend eine homogene biquadratische Form von x_0, x_1 bedeutet, die, gleich Null gesetzt, die Lage der Verzweigungspuncte auf $\frac{x_0}{x_1}$ fixirt.

Für die dritte Stufe erhält man, wie bekannt, aus (1) die allgemeine Curve dritter Ordnung der Ebene $x_0 : x_1 : x_2$.

Ein Integral dritter Stufe ist also ein solches, welches an einer ebenen Curve dritter Ordnung hinerstreckt ist. Ich brauche hier nicht noch besonders an die elegante Schreibweise zu erinnern, die Aronhold für solche Integrale eingeführt hat. Nur das will ich betonen, um meiner Grundanschauung wiederholten Ausdruck zu geben, dass ich die Integrale dritter Stufe nicht etwa, wie man diess bisher fast durchgängig that, auf Integrale zweiter Stufe zurückführen, vielmehr dieselben einer directen Behandlung unterwerfen will. Dieselbe Bemerkung gilt natürlich hinsichtlich der Integrale der höheren Stufen. —

Die Integrale vierter Stufe werden sich auf die gewöhnliche Raumcurve vierter Ordnung beziehen, welche der volle Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung ist, die Integrale fünfter Stufe auf eine Curve fünfter Ordnung des Raumes von vier Dimensionen, etc. Was die algebraische Darstellung dieser höheren Curven angeht, so findet man dieselbe der Art nach ohne Weiteres durch den zweiterwähnten Hermite'schen Satz. Aus fünf fünfgliedrigen σ-Producten: x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 lassen sich $\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ Glieder zweiter Ordnung bilden, deren jedes an 10 Stellen des Periodenparallelogramm's gleich Null wird. Daher bestehen zwischen den fünf x $15 - 10 = 5$ quadratische Gleichungen, und unsere Curve erscheint als der Schnitt von fünf richtig gewählten Flächen zweiten Grades des Raumes von vier Dimensionen. — Aehnlich in allen höheren Fällen.

Alle diese „elliptischen Curven" besitzen nun in vielfacher Hinsicht analoge Eigenschaften. Sie haben z. B. alle nur zwei rationale Invarianten, die dem g_2 und g_3 des elliptischen Integral's entsprechen. Bei allen gibt es, den berühmten Formeln analog, die Hermite für $n = 2$[1]) und

1) Crelle's Journal Bd. 52.

Brioschi für $n = 3$[1]) gegeben hat, rationale Multiplicationsformeln vom Grade n^2, die ohne Weiteres das an der Curve hinerstreckte, richtig normirte Integral in

$$\frac{1}{n}\int\frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

verwandelen, etc. Ich will bei diesen allgemeinen Analogieen nicht verweilen, sondern gehe nunmehr sofort zur Besprechung des Hauptpunctes der heutigen Mittheilung über, nämlich zur Lehre von den (irrationalen) Normalformen, die man den Curven n^{ter} Stufe und damit den zugehörigen Integralen ertheilen kann.

Das Mittel zur Herstellung dieser Normalformen liegt einfach in einer geeigneten linearen Transformation der x, oder, was auf dasselbe hinauskommt, in einer geschickten Wahl der Constante a_i, b_i, ... n_i in Formel (1). Indem man diese Constanten gleich n^{ten} Theilen der Perioden wählt, erreicht man, dass in den algebraischen Gleichungen der Curve n^{ter} Stufe, und also auch im zugehörigen Integrale, nur noch wesentliche (invariante, aber irrationale) Constante vorkommen, und diese Constanten erweisen sich dann als Moduln der n^{ten} Stufe.

Ich kann diess heute nur für die beiden niedrigsten Stufen, die Neues bieten, einigermassen ausführen, nämlich für die dritte und die fünfte Stufe. Bei der dritten Stufe handelt es sich darum, die bekannte Theorie der Wendepuncte der ebenen Curven dritter Ordnung in Beziehung zu der früher von mir entwickelten Theorie der Moduln dritter Stufe (der Tetraederirrationalität) zu setzen. Die fünfte Stufe hat Herr Dr. Bianchi in letzter Zeit auf meine Anregung hin untersucht, und es sind wesentlich von ihm gefundene Resultate, die ich im Folgenden

1) Borchardt's Journal, Bd. 63, p. 30.

mittheile. Herr Dr. Bianchi wird eine ausführlichere Darlegung dieses Gegenstandes demnächst in den mathematischen Annalen veröffentlichen.

Bei den ebenen Curven dritter Ordnung erinnere ich an die Existenz der vier Wendepunctsdreiecke und an die Normalform, die man, nach Hesse, erhält, wenn man eins der Wendedreiecke als Coordinatendreieck zu Grunde legt. Bekanntlich lautet die letztere:

$$(2) \qquad x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 6\,a\,x_0\,x_1\,x_2 = 0.$$

Alles, was ich hier hinzufüge, ist, dass die hier vorkommende Constante a für das an der Curve dritter Ordnung hinerstreckte Integral die Tetraederirrationalität ist. In der That, man vergleiche die Formel, die etwa in Lindemann's Vorlesungen von Clebsch pag. 569 für den Zusammenhang der Grösse a mit der absoluten Invariante $\frac{S^3}{T^2}$ gegeben ist; mit der Gestalt, die ich in den mathematischen Annalen XIV, p. 154 der Tetraedergleichung ertheilte. Trägt man der Verschiedenheit der angewandten Bezeichnung Rechnung, so sieht man, dass beide Gleichungen genau übereinstimmen.

Man bilde jetzt das zur Curve (2) gehörige Integral. Dasselbe kann folgende einfache Form annehmen:

$$(3) \qquad \int \frac{x_1\,dx_0 - x_0\,dx_1}{x_2^2 + 2\,a\,x_0\,x_1},$$

oder auch eine der beiden anderen Formen, die aus dieser durch cyclische Vertauschung der x_0, x_1, x_2 entstehen. Hier haben wir nun, was ich als Normalform dritter Stufe bezeichne. Die in (3) vorkommenden Variablen sind durch die Gleichung (2) verknüpft; aber in beiden Ausdrücken, (2) und (3), kommt nur eine Constante (ein Modul) vor: die Tetraederirrationalität.

Bei der Normalform fünfter Stufe musste Herr Dr. Bianchi mit der in (1) enthaltenen transcendenten Definition beginnen, da ja die algebraische Definition der Curve erst zu finden ist. Uebrigens erkennt man sofort, dass die Curve fünfter Stufe, den 9 Wendepuncten der Curve dritter Ordnung entsprechend, 25 singuläre Puncte besitzt, in denen je eine Ebene fünfpunctig schneidet. Diese fünfundzwanzig Puncte liegen sehr oft zu je 5 in einer Ebene, und aus diesen Ebenen lassen sich, den vier Wendedreiecken der ebenen Curve dritter Ordnung entsprechend, insbesondere sechs ausgezeichnete Pentaeder zusammensetzen. Legt man eins derselben als Coordinatenpentaeder zu Grunde, so erhält unsere Curve, nach kurzen Zwischenüberlegungen, schliesslich folgende fünf Gleichungen:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi_0 &= x_0^2 + a\,x_2\,x_3 - \frac{1}{a}\,x_1\,x_4 = o,\\
\varphi_1 &= x_1^2 + a\,x_3\,x_4 - \frac{1}{a}\,x_2\,x_0 = o,\\
\varphi_2 &= x_2^2 + a\,x_4\,x_0 - \frac{1}{a}\,x_3\,x_1 = o,\\
\varphi_3 &= x_3^2 + a\,x_0\,x_1 - \frac{1}{a}\,x_4\,x_2 = o,\\
\varphi_4 &= x_4^2 + a\,x_1\,x_2 - \frac{1}{a}\,x_0\,x_3 = o.
\end{aligned}\right.$$

Hier kommt wieder nur eine Constante a vor und diese Constante a erweist sich als identisch mit der Ikosaederirrationalität, wie ich sie immer verwandt habe.

Um jetzt das Integral fünfter Stufe aufzustellen, haben wir uns nur noch Rechenschaft zu geben, welche Curve dritter Ordnung irgend drei der Flächen φ (4) noch ausser der von uns in Betracht zu ziehenden Curve fünfter Ordnung gemein haben. Man findet, dass diess eine ebene Curve ist, die z. B. für die drei Flächen φ_0, φ_1, φ_2 in der

Ebene $x_1 = o$ enthalten ist. Hiernach hat man für das an der Curve hinerstreckte Integral nach bekannten Regeln (vergl. Nöther, Mathematische Annalen XIII, p. 510), unter u_x, v_x irgend zwei lineare Ausdrücke, unter C eine willkürliche Constante verstanden:

$$(5) \quad C \int \frac{(v_x \, du_x - u_x \, dv_x) \, . \, x_1}{| \varphi_0 \, \varphi_1 \, \varphi_2 \, u_x \, v_x |}.$$

Der im Nenner stehende Ausdruck bedeutet dabei die Functionaldeterminante der hingeschriebenen Functionen.

Die so gewonnene Formel lässt sich aber noch in doppelter Weise vereinfachen. Einmal kann man, wie selbstverständlich, die linearen Ausdrücke u_x, v_x beliebig specialisiren und also z. B. mit irgend zwei der x zusammenfallen lassen. Dann aber gelingt es, vermöge der Gleichungen $\varphi = o$, die im Nenner stehende Functionaldeterminante durch das x_1 des Zählers zu dividiren (wie diess a priori aus dem Abel'schen Theoreme erschlossen werden kann). Man erhält so schliesslich, wenn man noch die Constante C benutzt, um unnöthige Factoren zu entfernen, zehn unter sich gleichwerthige einfachste Schreibweisen für unser Integral. Zwei derselben sind diese:

$$(6) \quad \int \frac{x_1 \, dx_0 - x_0 \, dx_1}{5 a^3 x_2 x_4 - (2 a^3 + 1) x_0 x_1}$$

$$= \int \frac{x_2 \, dx_0 - x_0 \, dx_2}{5 a^2 x_3 x_4 - (2 - a^5) x_0 x_2},$$

und die übrigen acht ergeben sich aus diesen zwei durch cyclische Vertauschung der x.