Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band X. Jahrgang 1880.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1880.

In Commission bei G. Franz.

Herr F. Klein spricht:

„Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen."

Durch eine Reihe von Arbeiten, die im 14. und 15. Bande der mathematischen Annalen veröffentlicht sind, bin ich allmählich zu einer allgemeinen und im Wesentlichen neuen Auffassung der elliptischen Modulfunctionen geführt worden. Indem ich im Folgenden einige auf diese Auffassung bezüglichen Ideen entwickele, ist meine besondere Absicht, zu zeigen, dass die verschiedenen Formen, welche man den Modulargleichungen ertheilt hat und die in gewissermassen verwirrender Mannigfaltigkeit bisher unvermittelt neben einander standen, sich einem einfachen, allgemeinen Principe als sehr specielle Fälle einordnen.

I. Allgemeines über elliptische Modulfunctionen.

Die Theorie der elliptischen Modulfunctionen, wie ich sie auffasse, hat es mit allen solchen eindeutigen Functionen einer Variablen ω zu thun, welche gegenüber ganzzahligen linearen Substitutionen von der Determinante Eins:

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

ungeändert bleiben. Diese Substitutionen brauchen im einzelnen Falle die Gesammtheit aller ganzzahligen Substitutionen dieser Art durchaus nicht zu erschöpfen; sie bilden also, allgemein zu reden, eine in der Gesammtheit enthaltene

Untergruppe. Daher scheint es mir ein erster wichtiger Schritt zu einem planmässigen Studium der elliptischen Modulfunctionen zu sein, dass man alle in der erwähnten Gesammtheit enthaltenen Untergruppen aufstellt und nach sachgemässen Rücksichten classificirt. Meine heutige Darlegung soll sich, soweit sie sich auf derartige allgemeine Fragen bezieht, auf die Besprechung einiger Classificationsprincipien und der aus ihnen hervorgehenden functionentheoretischen Folgerungen beschränken. Ich nehme dabei an, was freilich eine grosse Beschränkung ist, dass die in Betracht kommenden Untergruppen einen endlichen Index haben, d. h. dass sie einen endlichen Theil der Gesammtheit aller ω- Substitutionen umfassen.

Zuvörderst ist ersichtlich, dass alle die Gesichtspuncte, die man, seit Galois, bei endlichen Gruppen von Transformationen kennt, auch bei unendlichen Gruppen, und somit bei der Gruppe aller ω- Substitutionen ihre Bedeutung behalten. Ich spreche demnach von ausgezeichneten Untergruppen, indem ich darunter solche verstehe, die mit der Gesammtheit aller ω- Substitutionen vertauschbar sind, — oder auch von relativ ausgezeichneten Untergruppen, die, in einer umfassenderen Untergruppe enthalten, sich wenigstens mit den Substitutionen dieser umfassenderen Untergruppe vertauschbar erweisen. — Eine leichte Ueberlegung zeigt, dass in der That die Gesammtheit der ω- Substitutionen die verschiedenartigsten ausgezeichneten Untergruppen enthält, dass also die Gesammtheit, um den Galois'schen Ausdruck zu gebrauchen, eine »zusammengesetzte«, und sogar eine höchst zusammengesetzte Gruppe ausmacht.

Mein zweites Classificationsprincip gründet sich auf die arithmetische Natur der Substitutionscoëfficienten α, β, γ, δ, welche bei Substitutionen der Untergruppe vorkommen. Es ist dieses Princip gewissermassen ein empirisches.

Es hat sich nämlich gezeigt, dass sich die bei einer Untergruppe auftretenden α, β, γ, δ in vielen Fällen dadurch charakterisiren lassen, dass man Congruenzen angibt, denen diese Coëfficienten in Bezug auf einen Zahlenmodul m genügen. Ich spreche dann von einer Congruenz-Gruppe, und zwar der m^{ten} Stufe, sofern m die kleinste Zahl ist, die zur Definition der Untergruppe ausreicht. Aber es muss stark hervorgehoben werden, dass durchaus nicht alle Untergruppen Congruenz-Gruppen sind. Die Congruenzgruppen sind diejenigen, mit denen man sich bisher fast ausschliesslich beschäftigt hat; die anderen Gruppen scheinen desshalb nicht weniger interessant; nur sind sie, zunächst, weniger zugänglich.

Ich komme nun zu meinem dritten, functionentheoretischen Eintheilungsprincipe. Dasselbe dürfte insofern das wichtigste sein, als sich vermöge desselben gewisse Schwierigkeiten, welche sich bisher einem weiteren Fortschritt in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen entgegengestellt hatten, einfach wegheben. — Ich muss dabei auf die bereits zu Eingang dieser Mittheilung citirten Arbeiten zurückgreifen. Ich zeigte in denselben an verschiedenen Stellen (Annalen, Bd. XIV p. 133, 420 etc.), dass jeder in der Gesammtheit der ω- Substitutionen enthaltenen Untergruppe vom Index μ in der ω- Ebene ein gewisses, noch in vielen Hinsichten willkürliches, Fundamentalpolygon entspricht, das aus 2μ, abwechselnd schraffirten und nicht schraffirten »Elementardreiecken« besteht, und dessen Kanten vermöge der Substitutionen der Untergruppe paarweise zusammengehören. Die geschlossene Fläche, welche durch Vereinigung der zusammengehörigen Kanten des Fundamentalpolygon's entsteht, besitzt, im Sinne der Analysis situs, ein gewisses Geschlecht, p, — und der Zahlenwerth dieses p, welches ich kurz als Geschlecht der Untergruppe bezeichne, ist mein functionentheo-

retisches Eintheilungsprincip. Es gilt vor allen Dingen, zu unterscheiden, ob $p = o$ ist, oder nicht.

An die so exponirte Theorie der Untergruppen schliesst sich nun eine Lehre von den zugehörigen Moduln, d. h. von solchen eindeutigen Functionen von ω, $M(\omega)$, die bei den Substitutionen der Untergruppe, nicht aber bei anderen Substitutionen ungeändert bleiben. Aus nahe liegenden Gründen betrachte ich hier, wo es sich um Untergruppen von endlichem Index handelt, nur solche Moduln, die innerhalb der durch das Fundamentalpolygon definirten geschlossenen Fläche keine Unstetigkeiten höherer Art besitzen; ich nenne sie algebraische Moduln. Hier wird nun sogleich das Geschlecht der Untergruppe von Wichtigkeit.

Ist $p = o$, so kann man einen zugehörigen algebraischen Modul so wählen, dass er jeden vorgegebenen Werth im Fundamentalpolygon nur einmal annimmt. Ist aber $p > o$, so muss man, um den einzelnen Punct des Fundamentalpolygon's zu bezeichnen, mindestens zwei Moduln gleichzeitig betrachten, zwischen denen dann eine Gleichung von dem betreffenden p besteht. — Dementsprechend rede ich im ersten Falle von einem Hauptmodul, im zweiten von den Moduln eines vollen System's, wobei selbstverständlich ist, dass man, im zweiten Falle, statt zweier Moduln ev. eine grössere Zahl von Moduln verwerthen kann, die dann an eine Reihe algebraischer Identitäten gebunden sind.

Man hat nun sofort folgenden Satz:

Alle zur Untergruppe gehörigen algebraischen Moduln, sowie alle algebraischen Moduln, die einer umfassenderen Untergruppe angehören, drücken sich, für $p = o$, durch den Haupt-

modul, anderenfalls durch die Moduln des vollen System's rational aus.

Dann aber nachstehendes Resultat, vermöge dessen, wie ich schon andeutete, eine vielfach aufgeworfene Frage erledigt wird:

Soll ω' mit ω durch eine Substitution einer vorgelegten Untergruppe zusammenhängen, so ist, falls $p = o$, nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend, dass der Hauptmodul, berechnet für ω, mit dem für ω' berechneten Hauptmodul übereinstimmt. Ist aber $p > o$, so ist für den gleichen Schluss die Gleichheit aller Moduln eines vollen System's erforderlich. —

Uebrigens spreche ich, den anderen bei den Untergruppen getroffenen Unterscheidungen entsprechend, von Congruenz-Moduln (der m^{ten} Stufe), so wie von ausgezeichneten Moduln. Nur bezüglich letzterer sei hier eine Bemerkung gestattet. Wenn die Moduln $M(\omega)$, $M_1(\omega)$, . . . das volle System einer ausgezeichneten Untergruppe bilden, so drücken sich, wie man sofort sieht, alle Werthe $M\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)$, $M_1\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)$, . . . durch die ursprünglichen Werthe rational aus. Nun zeigen die Ueberlegungen, die ich Annalen Bd. XV, p. 251 ff. entwickelte, dass man in solchen Fällen M, M_1, so wählen kann, dass die rationalen Ausdrücke in lineare übergehen. Etwas Aehnliches gilt für solche Untergruppen, die nicht schlechthin, sondern nur relativ ausgezeichnet sind. — Eine solche Wahl scheint in vielen Beziehungen zweckmässig, wie ich noch weiter unten hervorzuheben habe, und in der That hat man auch früher, ohne die in Rede stehenden allgemeinen Ueberlegungen zu haben, ausgezeichnete Moduln, wenn sie auftraten, immer diesem Principe entsprechend gewählt.

Zu den somit zur Sprache gebrachten allgemeinen Definitionen möchte ich hier nur einige wenige Beispiele anführen, indem ich übrigens auf meine anderen neueren Publicationen verweise:

1. Die Theorie der Modulfunctionen bekommt dadurch einen besonders einfachen Charakter, dass die Gesammtheit aller ω- Substitutionen, als Gruppe aufgefasst, das Geschlecht Null besitzt. Desshalb gibt es einen Hauptmodul, der allen anderen Moduln übergeordnet ist, die absolute Invariante J (Herrn Dedekind's Valenz, vergl. Borchardt's Journal Bd. 83).

2. Die ν^{te} Wurzel aus dem *Legendre*'schen $\varkappa^2$, sowie die ν^{te} Wurzel aus $\varkappa^2\varkappa'^2$ ist für jedes ganzzahlige ν ein Hauptmodul. Eine naheliegende Frage ist die, wesshalb in der bisher üblichen Theorie von diesen Moduln nur eine kleine Zahl auftrat, nämlich $\varkappa^2$, $\varkappa$, $\sqrt{\varkappa}$, $\sqrt[4]{\varkappa}$, $\varkappa^2\varkappa'^2$, $\varkappa\varkappa'$, $\sqrt{\varkappa\varkappa'}$, $\sqrt[4]{\varkappa\varkappa'}$, $\sqrt[3]{\varkappa^2\varkappa'^2}$, $\sqrt[3]{\varkappa\varkappa'}$, $\sqrt[6]{\varkappa\varkappa'}$, $\sqrt[12]{\varkappa\varkappa'}$. Die Antwort ist, dass unter allen Moduln $\sqrt[\nu]{\varkappa^2}$, $\sqrt[\nu]{\varkappa^2\varkappa'^2}$ nur diese Congruenzmoduln sind.

3. Als einen Hauptmodul fünfter Stufe und zugleich als einen „ausgezeichneten" Modul, der sich bei beliebigen ω-Substitutionen linear transformirt, bringe ich hier die Ikosaederirrationalität η in Erinnerung (Annalen, Bd. XIV, p. 158). Desgleichen als volle Systeme ausgezeichneter Moduln von der siebenten Stufe (die auch nach dem Princip der linearen Transformation gewählt sind): einmal die drei Verhältnissgrössen $\lambda:\mu:\nu$ (Annalen, XIV, p. 456), zwischen denen die Gleichung besteht:

$$\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0,$$

dann die vier Verhältnissgrössen $x_0:x_1:x_2:x_3$ (Annalen XV, p. 268), für die man folgende Relationen hat:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_0 & -x_2\sqrt{2} & 0 \\ x_2 & 0 & x_0 & -x_3\sqrt{2} \\ x_3 & -x_1\sqrt{2} & 0 & x_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Das zugehörige Geschlecht ist gleich drei.

II. Anwendung auf die Transformationstheorie.

Unter Transformation n^{ter} Ordnung sei der Uebergang von ω zu $\omega' = \frac{\omega}{n}$ verstanden, oder, was noch vortheilhafter ist, weil es die Umkehrbarkeit der in Betracht kommenden Operation deutlicher hervortreten lässt, der Uebergang von ω zu $\omega' = -\frac{n}{\omega}$. Dann ist das allgemeinste Problem, welches man aufstellen mag, dieses:

Man soll alle algebraischen Gleichungen angeben, die, einem solchen Uebergange entsprechend, zwischen irgendwie gegebenen algebraischen Moduln und ihren transformirten Werthen statthaben.

Es ist nun keineswegs meine Absicht, diess Problem in voller Allgemeinheit hier zu behandeln. Vielmehr genügt mir ein viel bescheideneres Ziel. Ich erinnere zunächst an die Gleichungen, welche zwischen $J(\omega)$ und $J(\omega') = J'$ bestehen, und die man als Prototyp aller Modulargleichungen erachten kann. Sodann wünsche ich zu zeigen, dass es unendlich viele von Vorneherein erkennbare Fälle gibt, in denen Gleichungssysteme auftreten, welche mit den zwischen J und J' bestehenden Transformationsgleichungen in allen wesentlichen Eigenschaften übereinstimmen. — Als wesentlich erachte ich dabei den Grad der Gleichung, ihre Galois'sche Gruppe und die Vertauschbarkeit der in ihr auftretenden Argumente.

Den eigentlichen Kern meiner bez. Ueberlegung bildet ein gruppentheoretischer Satz, der als selbstverständlich gelten kann. Es handelt sich darum, einzusehen, dass zwei Untergruppen m^{ter} und n^{ter} Stufe, sobald m und n theilerfremd sind, eine Untergruppe mn^{ter} Stufe gemein haben, die innerhalb der Gruppe m^{ter} Stufe dieselbe Stellung annimmt, wie die Gruppe n^{ter} Stufe innerhalb der Gesammtheit der ω-Substitutionen. Und diess folgt einfach daraus, dass irgendwelche Congruenzen, denen Zahlen α, β, γ, δ modulo m unterworfen sein mögen, mit anderen Congruenzen, denen dieselben Zahlen modulo n genügen sollen, in keiner Weise collidiren können, sobald m und n, wie vorausgesetzt, relativ prim sind.

Auf Grund dieser Anschauung prüfe man jetzt die Schlüsse, welche zur Existenz der zwischen J und J′ bestehenden Transformationsgleichung und ihren Eigenschaften hinleiten*). Man sieht dann sofort, dass der gruppentheoretische Theil derselben ungeändert bleibt, wenn man an die Stelle der Gesammtheit der ω- Substitutionen irgend eine Untergruppe m^{ter} Stufe setzt, sofern m zum Transformationsgrade n relativ prim ist. — Und nun handelt es sich, will man zu meinem allgemeinen Satze kommen, nur noch darum, diess gruppentheoretische Resultat functionentheoretisch zu interpretiren. Offenbar muss man, dem Obigen zufolge, unterscheiden, ob das Geschlecht der Untergruppe m^{ter} Stufe gleich Null ist oder nicht. Im ersteren Falle kann man auch functionentheoretisch so weiter schliessen, wie man es bei der absoluten Invariante J that; nur tritt an die Stelle von J der betr. Hauptmodul. Wir haben dann folgenden ersten Satz:

*) Man kann diese Schlüsse sehr knapp zusammenziehen, so dass gar keine Rechnung mehr erforderlich ist. Vergl. die Darstellung bei Dedekind, Borchardt's Journal Bd. 83, wo indess die Galois'sche Gruppe nicht bestimmt wird.

Ist M ein Hauptmodul m^{ter} Stufe, so bestehen für alle Transformationsgrade n, die zu m relativ prim sind, zwischen $M(\omega) = M$ und $M\left(-\frac{n}{\omega}\right) = M'$ Gleichungen, die nach Grad, Galois'scher Gruppe und Vertauschbarkeit der Argumente mit der zwischen J und J′ bestehenden Transformationsgleichung übereinstimmen.

Im zweiten Falle bedarf das Schlussverfahren einer Modification, die aber, nach dem Vorausgegangenen, nicht mehr schwer zu finden ist. Statt der einen Invariante J muss man jetzt sämmtliche Moduln M, M_1, . . . eines vollen Systems gleichzeitig betrachten. Zwischen den Werthsystemen $M(\omega) = M$, $M_1(\omega) = M_1$, ... und $M\left(-\frac{n}{\omega}\right) = M'$, $M_1\left(-\frac{n}{\omega}\right) = M'_1$, . . findet jetzt ein Entsprechen statt, dass dem zwischen J und J′ durchaus analog ist. Man hat also statt einer Gleichung zwischen zwei Grössen Das, was die Geometer eine „Correspondenz" nennen, und zwar eine Correspondenz auf einer „Curve vom Geschlechte p".

Grad und Galois'sche Gruppe dieser Correspondenz sind wieder dieselben, wie bei der zwischen J und J′ bestehenden Gleichung; auch ist die Correspondenz, wie jene Gleichung, in den zweierlei in Betracht kommenden Argumenten symmetrisch.

Es ist kein Grund vorhanden, derartige Correspondenzen nicht ebenso in Betracht zu ziehen, wie jene Gleichungen; wir haben also schliesslich für jeden Transformationsgrad n unendlich viele Gleichungssysteme, die sämmtlich als Modulargleichungen bezeichnet werden können; und diess ist der Satz, um dessen Ableitung es sich bei der heutigen Gelegenheit handelte.

Dass sich nun, wie in der Einleitung bemerkt, sämmtliche bisher aufgestellten Modulargleichungen in das so gewonnene allgemeine Schema als sehr specielle Fälle einordnen, ist leicht zu sehen*); ein specieller Nachweis würde hier zu weit führen. Ich erinnere nur an die Jacobi-Sohnke'schen Modulargleichungen für $\sqrt[4]{\varkappa}$, an die Schröter'schen Modulargleichungen in irrationaler Form, etc. Dabei ist freilich eine gewisse Kritik nöthig, sobald es sich um Correspondenzen handelt. Natürlich muss man bei einer solchen Correspondenz immer den zwischen $M, M_1, \ldots$ einerseits, und den zwischen $M', M'_1, \ldots$ andererseits bestehenden Identitäten Rechnung tragen. Aber auch dann wird die Correspondenz nicht immer durch eine Gleichung zwischen den $M, M_1, \ldots$ und den $M', M'_1, \ldots$ definirt sein. Hat man also durch irgend eine Methode eine solche Gleichung gefunden, so bleibt zu untersuchen, ob sie zur vollen Definition der gewollten Correspondenz ausreicht, und wenn es nicht der Fall ist, so muss man eben noch weitere Relationen zwischen den M, M' aufsuchen**). —

---

*) Ich betone ausdrücklich, dass es sich im Texte nur um Modulargleichungen handelt (bei denen Vertauschbarkeit der Argumente Statt hat), nicht aber um Multiplicatorgleichungen oder andere verwandte Gleichungen.

**) Herr stud. Hurwitz, der mich bei solchen Untersuchungen unterstützte, wurde dabei für den 23. und 47. Transformationsgrad zu folgenden eleganten Gleichungen geführt:

$$\sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} + \sqrt[3]{4}\sqrt[12]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} = 1,$$

$$\left[2\left(\sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} - 1\right) - \sqrt[3]{4}\sqrt[12]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'}\right]^2$$
$$= 8\left(\sqrt{\varkappa\lambda} + \sqrt{\varkappa'\lambda'} + 1\right) - 7\sqrt[3]{16}\sqrt[6]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'}.$$

Hier bedeuten λ, λ' in der üblichen Weise die transformirten Werthe von $\varkappa, \varkappa'$. Das volle System der in Betracht kommenden Moduln ist

Noch folgende Bemerkung möge hier eine Stelle finden. Es sollen die Moduln M, M_1, ... der m^{ten} Stufe ausgezeichnet und dabei so gewählt sein, dass sie sich bei beliebiger ω- Substitution linear transformiren. Dann sieht man leicht, dass die zwischen den M und M' bestehenden Relationen bei gewissen simultanen linearen Transformationen der M, M' ungeändert bleiben müssen. Handelt es sich also darum, die fraglichen Relationen explicite herzustellen, so kann es vortheilhaft sein, vorher alle von M, M' abhängenden Ausdrücke zu bilden, die diese Eigenschaft der Unveränderlichkeit besitzen. Eine solche Untersuchung, die der linearen Invariantentheorie*) angehört, kann z. B. mit Nutzen bei den gewöhnlich betrachteten, zwischen $\varkappa^2$ und λ^2 bestehenden Gleichungen durchgeführt werden. Ich habe denselben Gedanken bereits früher (Annalen XIV, p. 162—164) benutzt, um für die niedrigsten Transformationsgrade die Ikosaedermodulargleichungen ohne Weiteres hinzuschreiben. Ich habe ihn neuerdings herangezogen, um wenigstens einige Modularcorrespondenzen der siebenten Stufe zu bilden. Die Moduln, welche ich dabei verwende, und die zwischen ihnen bestehenden identischen Relationen wurden bereits oben genannt. Ich

---

durch $\sqrt[4]{\varkappa}$, $\sqrt[4]{\varkappa'}$, $\sqrt[12]{\varkappa\varkappa'}$, gegeben, zwischen denen folgende Identitäten bestehen: $\left(\sqrt[4]{\varkappa}\right)^8 + \left(\sqrt[4]{\varkappa'}\right)^8 = 1$, $\left(\sqrt[12]{\varkappa\varkappa'}\right)^3 = \sqrt[4]{\varkappa} \cdot \sqrt[4]{\varkappa'}$; die zugehörige Untergruppe ist von der 48. Stufe. — Jede der beiden angegebenen Gleichungen stellt die bei ihr in Betracht kommende Correspondenz rein dar.

*) Natürlich gilt etwas Aehnliches in beschränkterem Sinne, wenn es sich nicht um ausgezeichnete Moduln schlechthin, sondern um „relativ ausgezeichnete" Moduln handelt. Hieher gehören z. B. die bekannten Regeln, welche die Art der Glieder bestimmen, die in den zwischen $\sqrt[4]{\varkappa}$, $\sqrt[4]{\lambda}$ bestehenden Gleichungen auftreten.

kann also sofort die Resultate anführen, was nunmehr zum Schlusse geschehen mag. Es sind folgende:

1) Für $n = 3$ und $n = 5$ erhält man nachstehende einfache lineare Gleichungen, deren jede zur Definition der bei ihr in Betracht kommenden Correspondenz ausreicht:

$$\lambda'\lambda + \mu'\mu + \nu'\nu = o^*),$$
$$x'_0 x_0 + x'_1 x_1 + x'_2 x_2 + x'_3 x_3 = o.$$

2) Die Modularcorrespondenz für $n = 2$ wird durch irgend zwei der folgenden drei Gleichungen völlig definirt:

$$x'_0 x_1 + x'_1 x_0 - \sqrt{2} \cdot x'_2 x_2 = o,$$
$$x'_0 x_2 + x'_2 x_0 - \sqrt{2}\ x'_3 x_3 = o,$$
$$x'_0 x_3 + x'_3 x_0 - \sqrt{2} \cdot x'_1 x_1 = o.$$

3) Für $n = 4$ bekommt man das einfachste**) Resultat, wenn man die $\lambda : \mu : \nu$ heranzieht. Die Correspondenz ist dann nämlich durch die eine Formel gegeben:

$$(\lambda'^2 . \lambda\mu + \mu'^2 . \mu\nu + \nu'^2 . \nu\lambda) + (\lambda^2 . \lambda'\mu' + \mu^2 . \mu'\nu' + \nu^2 . \nu'\lambda') = o,$$

sofern ausdrücklich festgesetzt wird, dass man von der evidenten (doppeltzählenden) Lösung

$$\lambda' : \mu' : \nu' = \lambda . \mu : \nu$$

absehen soll.

München, im November 1879.

---

*) Diese Gleichung stellt sich vermöge ihrer dreigliedrigen Form unmittelbar neben die bekannten Formen:

$$\sqrt{\varkappa\lambda} + \sqrt{\varkappa'\lambda'} = 1, \quad \sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} = 1,$$

die Legendre für den dritten Grad und Gützlaff für den siebenten Grad gewonnen haben.

**) Ich hatte zunächst nur mit den $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ operirt; das Resultat, wie es im Texte mitgetheilt ist, rührt von Herrn Hurwitz her.