

Sitzungsberichte

der

königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München.

Jahrgang 1862. Band II.

München.

Druck von J. G. Weiss, Universitätsbuchdrucker.

1862.

In Commission bei G. Franz,

- 20 Vindicat elatos iusta ruina gradus.
Stare diu nec uis. nec honor. nec forma. nec aetas
Sufficit in mundo. plus tamen ista placent.
[Viue diu. sed uiue miser sociosque minores
Disce pati. risum dat tua uita mihi.]
- 25 Pennatis ne crede bonis. te nulla potestas
In miseros armet. nam miser esse potes.]

Die poetischen Fabeln sind am Rande in Prosa gesetzt und zugleich moralisirt. Zwischen den Versen stehen Glosseme aus späterer Zeit.

Mathematisch – physikalische Classe.

Sitzung vom 11. Juli 1862.

Herr Lamont übersandte eine Abhandlung

„Beitrag zu einer mathematischen Theorie des Magnetismus.“

Mathematisch zu bestimmen, wie unter gegebenen Umständen der Magnetismus in einer Eisen – oder Stahlmasse vertheilt sein wird, ist ein Problem wovon noch Niemand, selbst für die einfachsten in der Natur vorkommenden Fälle, eine richtige Auflösung gefunden hat. Tob. Mayer und später Hansteen suchten zu zeigen, dass bei einem prismatischen Magnet die Kraft von der

-
- 20 ista superscr. certa ruina ED. certa r. EF, Δ, Φ.
24 risum det mihi (in corr.) uita grauis ED, Δ. r. det t. u. mihi EF, Φ.
25 penn. non cr. ED, Δ.
26 armet EB. nam potes esse miser ED, EF, Δ, Φ.

Mitte gegen die Enden hin im einfachen oder im quadratischen Verhältnisse der Entfernung zunehme. Biot, durch eine Analogie mit der Electricität geleitet, fand eine Vertheilung, welche durch die Gleichung der Kettenlinie ausgedrückt wird, ein sehr merkwürdiges Resultat insoferne, als das gefundene Gesetz mit den zahlreichen bisher angestellten Versuchen eine sehr nahe Uebereinstimmung zeigt, während die Betrachtungen, auf welchen es gegründet ist, nicht als richtig anerkannt werden können. Eine eigentliche mathematische Theorie des Magnetismus hat zuerst Poisson zu geben versucht, konnte aber seine Gleichungen nur für sphärische oder ellipsoidische Körper integriren, und die Uebereinstimmung mit der Natur ist bisher nur in sehr ungenügender Weise nachgewiesen worden. Ein bedenklicher Umstand ist es bei der Theorie von Poisson, dass er für Molecule, die in messbarer Entfernung von einander abstehen und für Molecule, die sich berühren, dasselbe Gesetz gelten lässt, während vielerlei Thatsachen und Analogien sehr bestimmt andeuten, dass bei der Berührung eine weit intensivere Wirkung eintritt¹. Von dem Grundsätze nun ausgehend, dass die magnetische Molecular - Anziehung unverhältnissmässig grösser sei als die Fernwirkung, und dass die letztere der erstern gegenüber vernachlässiget werden dürfe, habe ich eine mathematische Theorie entworfen², welche für eine Reihe von Mole-

(1) Ich habe jetzt noch die Ueberzeugung, dass magnetische Molecular-Anziehung und magnetische Fernwirkung von einander wesentlich verschieden sind, obwohl ich nicht in Abrede stellen will, dass es Experimente gibt, die als nicht mit dieser Ansicht übereinstimmend ausgelegt werden könnten. Als einen Beweis für das Vorhandensein einer eigenthümlichen Molecular-Anziehung betrachtete ich früher auch den Umstand, dass man von solcher Hypothese ausgehend durch den Calcul auf die Kettenlinie als Vertheilungs-Curve des Magnetismus und auf andere mit der Erfahrung genau übereinstimmende Gesetze geführt wird: jetzt habe ich aber gefunden, dass mehrere verschiedene Hypothesen genau zu denselben analytischen Ausdrücken führen.

(2) Jahresbericht der Münchener Sternwarte für 1854 S. 27.

culen, d. h. für einen Linearmagneten denselben Ausdruck gibt, den Biot gefunden hat; auch neue Versuche habe ich geliefert welche, wie ich glaube, zeigen dass in den Fällen, wo der Querschnitt vernachlässigt werden darf, also nur die Längendimensionen in Betracht kommen, die von mir entwickelten Lehrsätze in sehr befriedigender Weise mit der Erfahrung übereinstimmen. Um aber eine vollständige Vergleichung mit der Natur durchzuführen und eine eigentliche Bestätigung der Theorie zu erhalten, wäre es erforderlich gewesen von Linearmagneten auf Magnete von beliebigem Querschnitte überzugehen, und hierin blieben alle meine Bemühungen erfolglos: der analytische Weg führte zu einer endlosen Complication und die zahlreichen Versuche, die ich anstellte, lieferten keine Andeutung über die mathematischen Beziehungen, die hinsichtlich des Querschnittes stattfinden.

In neuester Zeit indessen ist es mir gelungen Andeutungen, die von grosser Wichtigkeit für die Theorie sein können, zu erhalten und es ist meine Absicht in den folgenden Zeilen das Wesentlichste davon mitzutheilen.

Den Anfang meiner Arbeiten in dieser Richtung bildete ein Versuch, wodurch bestimmt werden sollte, wie viel von der Kraft zweier gleich grosser Magnete verloren geht, wenn sie mit gleich gerichteten Polen aufeinander gelegt oder einander nahe gebracht werden. Zwei Abschnitte einer starken Uhrfeder (Länge 103, "1, Breite 8, "0, Dicke 0, "2 Par. Maass) wurden mittelst 25pfündiger Stäbe magnetisirt, und es ergab sich durch das Zusammenlegen in der eben bezeichneten Weise ein permanenter Kraftverlust von ungefähr $\frac{1}{17}$: durch wiederholtes Zusammenlegen erfolge kein weiterer permanenter Kraftverlust, dagegen kam, wenn sich die Magnete berührten oder durch dazwischen gelegte Glasstreifen von einander in bestimmter Entfernung gehalten wurden, eine gegenseitige Induction zu Stande, welche dem permanenten Magnetismus entgegengesetzt war und somit eine Verminderung des ganzen magnetischen Moments zur Folge hatte. Wie diese Verminderung von der Grösse des

Zwischenraums abhängt, ersieht man aus folgender Beobachtungsreihe:

	magnetisches Moment
erster Magnet für sich allein . . .	31.7
zweiter „ „ „ „ . . .	32.7
beide aufeinander gelegt,	
Zwischenraum 3.81 . . .	63.4
„ 2.54 . . .	63.05
„ 1.27 . . .	62.70.

Ohne die Wirkung der Induction hätten die Magnete miteinander ein magnetisches Moment von 64,4 (Summe der beiden Momente) geben sollen, der Verlust durch Induction betrug demnach

bei Zwischenraum 3.81	1.0	oder $\frac{1}{64}$
„ „ 2.54	1.35	„ $\frac{1}{48}$
„ „ 1.27	1.70	„ $\frac{1}{38}$

Durch einen spätern Versuch fand sich bei unmittelbarer Berührung der Verlust durch Induction $= \frac{1}{28}$ oder 2,30.

Bei näherer Untersuchung erkannte ich dass der Verlust als aliquoter Theil des Magnetismus durch den Bruch

$$\frac{1}{28.00 + 8.27 x}$$

oder als absolute Grösse durch

$$\frac{64.4}{28.00 + 8.27 x}$$

dargestellt werden könne, wobei x den Zwischenraum in Linien ausgedrückt bedeutet. Die Uebereinstimmung dieses Ausdrucks mit der Beobachtung zeigt folgende Zusammenstellung.

Verlust			
Zwischenraum	berechnet	beobachtet	Differenz
0.00	2.30	2.30	0.00
1.27	1.70	1.67	+ 0.03
2.54	1.35	1.31	+ 0.04
3.81	1.00	1.08	- 0.08.

Zunächst ging ich auf das analoge Verhältniss bei der Magnetisirung des Eisens durch den galvanischen Strom über und brachte zwei Eisenlamellen A und B (aus einer Blechtafel ausgeschnitten, Länge 43."2, Breite 5."3, Dicke 0."4) in eine sehr lange Spirale. Einzeln gaben diese Lamellen folgende magnetische Momente

A	37.88
B	38.10,

dann miteinander

in Berührung		44.25,	Verlust	31.73
mit Zwischenraum	0.93	48.15	„	27.83
„	1.86	50.90	„	25.08
„	2.79	53.75	„	22.23.

Der Verlust oder die Verminderung des Magnetismus durch Induction ist, wie man sieht, hier sehr bedeutend; der Vorgang ist aber ein anderer als bei permanenten Magneten. Bei permanenten Magneten ruft der eine im andern entgegengesetzten Magnetismus hervor: bei der Magnetisirung des Eisens dagegen verhindert die eine Lamelle in bestimmtem Maasse das Entstehen des Magnetismus in der andern, und gleichzeitig ruft der wirklich entstandene Magnetismus der einen Lamelle entgegengesetzten Magnetismus in der andern hervor. Desshalb ist es zweckmässig die mathematische Ausdrucksweise etwas zu ändern. Wird der Magnetismus, der in den Lamellen entsteht, wenn man jede für sich in die Spirale bringt, durch M_1 und M_2 , der Magnetismus der entsteht wenn man beide Lamellen mit dem Zwischenraume x in die Spirale bringt, durch m_1 und m_2 bezeichnet, und setzt man voraus dass die von der Induction herrührende Verminderung durch

$$\frac{1}{a + bx}$$

ausgedrückt werde, so hat man

$$m_1 = M_1 - \frac{m_2}{a + bx}$$

$$m_2 = M_2 - \frac{m_1}{a + bx}$$

Wir wollen nun $M_1 + M_2 = M$ und das beobachtete Moment der gleichzeitig in die Spirale gebrachten Lamellen $m_1 + m_2 = m$ setzen, und erhalten alsdann

$$a + bx = \frac{m}{M - m}$$

Man muss also das beobachtete Moment m durch den Verlust $M - m$ dividiren um die Zahl, welche das Verhältniss der Verminderung ausdrückt, zu erhalten. Für die obige Beobachtungsreihe findet sich der Verlust durch Induction

$$= \frac{1}{1.394 + 0.360 x}$$

wo x in Linien ausgedrückt ist, und die Uebereinstimmung mit der Beobachtung zeigt folgende Zusammenstellung:

Verlust

Zwischenraum	berechnet	beobachtet	Differenz
0."00	31.74	31.73	+ 0.01
0."93	27.85	27.83	+ 0.02
1."86	24.67	25.08	— 0.41
2."79	22.41	22.23	+ 0.18.

Ich übergehe hier die zahlreichen Versuche, welche angestellt wurden, um das gefundene Abhängigkeits-Verhältniss zwischen der Entfernung x und der durch Induction eintretenden Verminderung des Magnetismus näher festzustellen und die Modificationen, welche bei gehärtetem Stahle, bei weichem Stahle, bei Eisen von verschiedener Beschaffenheit und verschiedenen Dimensionen stattfinden, genauer zu bestimmen und erwähne nur noch eines Versuches, welcher den Zweck hatte zu ermitteln ob bei ganz dünnen Prismen, welche also der Linearform nahe kommen, noch dasselbe Verhältniss besteht. Ich nahm zwei gleiche Abschnitte von einem Eisendraht (Länge 187, Durchmesser 2.5 Millim.), brachte sie in der oben angegebenen Weise in eine lange Spirale und fand

erster Abschnitt für sich	21.08
zweiter Abschnitt für sich	20.10
beide in Berührung	32.67
mit Zwischenraum 6.7 Millim.	34.84
„ „ 11.4 „	37.24
„ „ 16.2 „	37.77
„ „ 20.5 „	38.87.

Näherungsweise hat mau hiernach den Verlust durch Induction

$$\frac{1}{3.70 + 0.44 x},$$

und die Unterschiede zwischen Rechnung und Beobachtung sind der Reihe nach

$$- 0.25 \quad + 0.96 \quad - 0.30 \quad - 0.07 \quad - 0.69.$$

Wenn gleich hier grössere Unterschiede³ hervortreten, so kann es im Ganzen doch keinem Zweifel unterliegen, dass auch bei Linearprismen die gegenseitige in Folge der Induction eintretende Verminderung des Magnetismus für verschiedene Entfernungen x durch einen Ausdruck von der Form

(3) Magnetisirungs - Versuche mit dünnen Drähten bieten immer grosse Unsicherheit dar, und bei Wiederholung desselben Versuches findet man auffallende Unterschiede, als wenn ein präzises Maass der Inductions- und Retentionsfähigkeit nicht vorhanden wäre oder als wenn Zufälligkeiten mitwirkten. Zugleich ist es merkwürdig wie weit die magnetischen Eigenschaften dünner Drähte durch den besondern Zustand, in welchem sie sich befinden, modificirt werden. Ein geringer Grad von permanenten Magnetismus ändert die Inductionsfähigkeit sehr beträchtlich. Nach dem Ausglühen ist die Inductionsfähigkeit dreimal grösser als vor dem Ausglühen: vor dem Ausglühen bleibt bei geringer Stromstärke die Hälfte, nach dem Ausglühen $\frac{1}{4}$ des Magnetismus permanent zurück. Aehnliche Eigenthümlichkeiten, nur in geringerem Grade, trifft man auch bei Eisenstücken von grösserem Querschnitte an, wesshalb zu genauen Magnetisirungs - Versuchen grosse Vorsicht nothwendig ist und stets durch mehrere gleiche Eisenstücke eine Controlle hergestellt werden sollte.

$$\frac{1}{a + bx} \quad (\text{I})$$

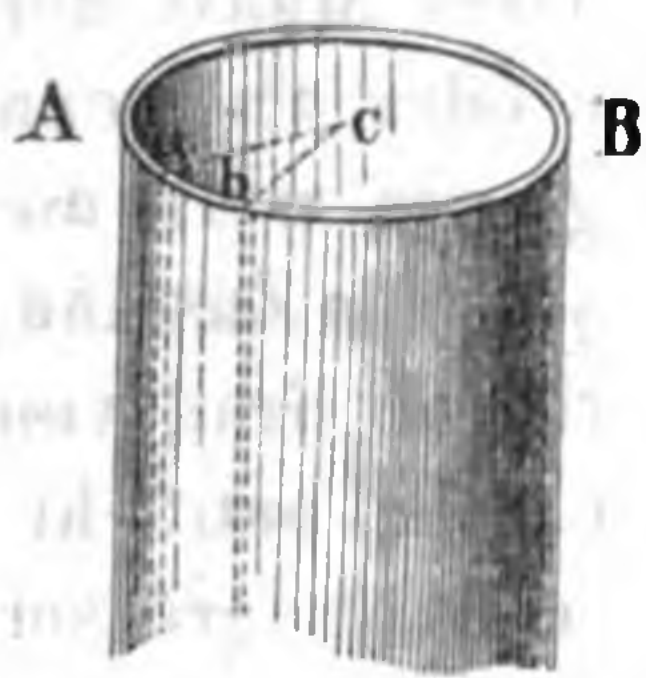
sich darstellen lässt. Während die analytische Entwicklung zu unendlich complicirten Ausdrücken führt, gelangen wir hier auf dem Wege der Erfahrung zu einem ganz einfachen Gesetze. Hat man nicht zwei sondern mehrere Lamellen, so wird der Magnetismus jeder einzelnen Lamelle durch alle übrigen vermindert und wenn man den Magnetismus der ersten Lamelle mit m_1 , den Magnetismus der übrigen mit $m_2, m_3, m_4 \dots$, dann die Function der Entfernung $a + bx$ für die erste und zweite Lamelle mit a_1 , für die erste und dritte mit a_2 u. s. w. bezeichnet, so hat man

$$m_1 = M_1 - \frac{m_2}{a_1} - \frac{m_3}{a_2} - \frac{m_4}{a_3} - \dots \quad (\text{II})$$

wo M_1 den Magnetismus bedeutet, den die erste Lamelle haben würde, wenn die übrigen nicht in der Nähe sich befänden. Für jede andere Lamelle erhält man eine analoge Gleichung, also eben so viele Gleichungen als Lamellen vorhanden sind, so dass die Werthe von m_1, m_2, m_3 daraus abgeleitet werden können. Dessgleichen kann man jeden prismatischen Körper in unendlich viele Linearprismen sich zerlegt denken und die Verminderung, welche der Magnetismus eines jeden Linearprisma erleidet, berechnen.

Hievon wollen wir gleich eine Anwendung machen, welche dazu dienen wird die Richtigkeit der theoretischen Grundlage selbst

Fig. 1.



zu prüfen. Denken wir uns einen durch den galvanischen Strom magnetisirten hohlen eisernen Cylinder AB (Fig. 1) von geringer Wanddicke (eine dünne eiserne Röhre) in unendlich viele Streifen parallel mit der Axe zerlegt, so wird vermöge der vorhandenen Symmetrie die Verminderung des Magnetismus am ganzen Umfange gleich sein, also auch an jedem Theile des Umfanges gleicher Magnetismus sich zeigen, ein Umstand der die Berechnung sehr vereinfacht. Den Halbmesser ac wollen wir mit r , den ganzen wirklichen Magnetismus durch $2r\mu\pi$, den Magnetismus, der ohne die Verminderung vorhanden wäre, durch

$2Mr\pi$ bezeichnen. Wird von einem bestimmten Anfangspunkte a ausgegangen und der Winkel $acb = \varphi$ gesetzt, so ist der Magnetismus des Linearprisma $b = \mu r d\varphi$, und seine Entfernung von dem am Anfangspunkte a befindlichen Linearprisma $= 2r \sin \frac{1}{2} \varphi$, mithin die Verminderung, welche der Magnetismus dieses letztern Prisma durch das erstere erleidet

$$\frac{\mu r d\varphi}{a + 2br \sin \frac{1}{2} \varphi}$$

und zur Bestimmung von μ hat man die Gleichung

$$\mu = M - \int \frac{\mu r d\varphi}{a + 2br \sin \frac{1}{2} \varphi} \quad (\text{III})$$

Das Integral ist von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ zu nehmen.

Behufs der Integration muss man

$$\sin \frac{1}{2} \varphi = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$$

setzen, und erhält alsdann

$$\mu = M - \int \frac{4\mu r dz}{a - 2br + (a + 2br) z^2}$$

wo das Integral von $z = 1$ bis $z = \infty$ zu nehmen und dann mit 2 zu multipliciren ist. Die Integration lässt sich hier nicht ausführen, ohne dass vorher bestimmt wird, ob $a - 2br$ eine positive oder negative Grösse sei. Aus den oben angeführten Versuchen ist nun leicht zu entnehmen, dass bei eisernen Röhren von grösserm Durchmesser a gegen $2br$ sehr klein sein wird. Unter dieser Voraussetzung führt die Integration zwischen den angegebenen Grenzen zu der Gleichung

$$\mu = M + \frac{4\mu r}{\sqrt{4b^2 r^2 - a^2}} \log \frac{2br - \sqrt{4b^2 r^2 - a^2}}{a}$$

Ist der Bruch

$$\frac{a}{2br}$$

so klein, dass die dritte und die höheren Potenzen davon vernachlässigt werden können, so geht die eben gefundene Gleichung durch Reihenentwicklung in folgende über

$$\mu = M + \frac{2\mu}{b} \log \frac{a}{4br} + \frac{\mu a^2}{8b^3 r^2} + \quad (IV)$$

Wird die Gleichung mit $2\pi r$ multiplicirt und das beobachtete magnetische Moment des hohlen Cylinders $2\mu\pi r = m$ gesetzt, so hat man

$$m = \frac{2M\pi r b}{b - 2 \log \frac{a}{4b} + 2 \log r - \frac{a^2}{8b^2 r^2}}$$

wofür man, wenn der Durchmesser $d = 2r$ und drei neue Constanten p, q, c eingeführt werden, die bequemere Form

$$m = \frac{d}{p + q \log d - \frac{c}{d^2}} \quad (V)$$

substituiren kann; dabei ist a priori zu erwarten, dass das Glied $\frac{c}{d^2}$ bei hohlen Cylindern von grösserm Durchmesser weggelassen werden kann.

Um die Anwendbarkeit dieser Gleichung zu prüfen, habe ich sieben hohle Cylinder aus Eisenblech von 1.5 Millim. Dicke anfertigen lassen, wovon jedoch die Form besonders an der Löthstelle nicht so vollkommen war als zu wünschen gewesen wäre. Die damit angestellten Beobachtungen gaben die Constanten der obigen Gleichung wie folgt:

$$m = \frac{d}{-0.0210 + 0.3870 \log d};$$

wie weit die Beobachtungen mit der Theorie übereinstimmen ist aus folgender Zusammenstellung zu entnehmen:

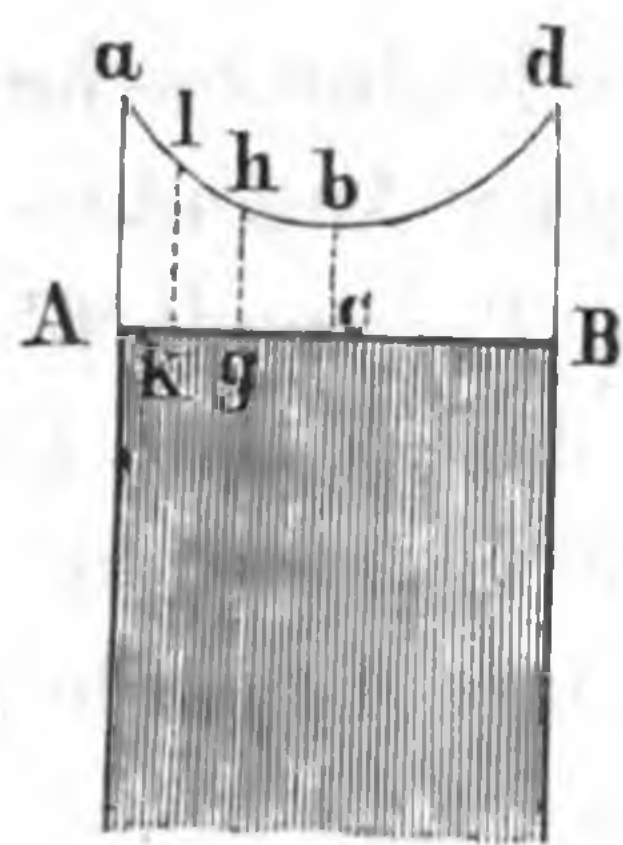
Durchmesser d	Magnetismus		
	Millim.	beobachtet	berechnet
			Differenz
	38.6	64.92	65.09
	34.4	59.90	59.97
	29.0	53.70	53.22
	25.2	47.87	48.34
	21.1	43.26	42.93
	17.3	35.65	37.76
	13.6	32.42	32.56
			Differenz
			— 0.17
			— 0.07
			+ 0.48
			— 0.47
			+ 0.33
			— 2.11
			— 0.14.

Wenn gleich grössere Differenzen vorkommen, so betrachte ich doch unter Berücksichtigung der nicht ganz regelmässigen Figur der Cylinder die obige Tabelle als eine vollkommene Bestätigung der Theorie.

Ich habe für den Fall, dass bei einem Cylinder $a - 2br$ einen positiven Werth hat, dann für den Fall, dass mehrere Cylinder ineinander gesteckt werden, theoretische Entwicklungen vorgenommen und praktische Versuche angestellt, die ich hier übergehe. Bemerken will ich bloss, dass schon v. Feilitsch⁴ ähnliche Versuche bekannt gemacht und denselben eine theoretische Grundlage zu geben versucht hat, welche jedoch den oben angeführten Thatsachen gegenüber kaum als haltbar erscheinen dürfte.

Die bisher erwähnten Anwendungen der im Vorhergehenden aufgestellten Theorie sind die einfachsten und die leichtesten:

Fig. 2.



jede weitere Anwendung stösst sogleich auf analytische Hindernisse. Man nehme z. B. ein flaches Prisma, so dünn, dass es als eine Reihe von Linearprismen betrachtet werden darf, und verzeichne über der Endfläche AB (Fig. 2) die Curve alhbd, deren Ordinaten Aa, kl, gh... die Stärke des Magnetismus (oder vielmehr des magnetischen Moments) an den

(4) Pogg. Ann. LXXX. 321.

[1862. II.]

Punkten A, k, h... darstellen. Die Abscissen zähle man von der Mitte c nach A positiv, nach B negativ und setze $cA = cB = \lambda$, $cg = x'$, $ck = x$, $gh = f(x')$, $kl = f(x)$. Die Verminderung, welche der Magnetismus in g durch den Magnetismus in k erleidet, ist

$$\frac{f(x) dx}{a + b(x - x')},$$

und das Integral dieses Ausdrucks von $x = x'$ bis $x = \lambda$ gibt die Wirkung aller Linearprismen, die zwischen g und A liegen. Durch ein Linearprisma, dessen Abscisse x zwischen g und B liegt, entsteht eine Verminderung des Magnetismus in g

$$= \frac{f(x) dx}{a + b(x' - x)},$$

und dieser Ausdruck muss von $x = -\lambda$ bis $x = x'$ integrirt werden, um die Wirkung aller Linearprismen zwischen g und B zu erhalten. Demnach haben wir, wenn der Magnetismus, der ohne die Verminderung zu Stande gekommen wäre, $= M$ gesetzt wird

$$f(x') = M - \int_{-x'}^{\lambda} \frac{f(x) dx}{a + b(x - x')} - \int_{-\lambda}^{x'} \frac{f(x) dx}{a + b(x' - x)} \quad (\text{VI}).$$

Es lässt sich leicht schliessen, dass $f(x)$ eine Exponential-Function sein wird und dass, wenn man $a + bx$ durch Exponentialgrössen ausdrückt, eine Function gefunden werden kann, welche der obigen Gleichung Genüge leistet. Die wirkliche Darstellung dieser Function ist aber jedenfalls keine leichte Sache.

Vorläufig habe ich auf folgendem Wege nähere Andeutungen zu erhalten gesucht. Im CXIII. Bde. von Poggendorff's Annalen S. 243 findet man eine Versuchsreihe, die ich mit 12 gleichen Lamellen in der Weise angestellt habe, dass zuerst der Magnetismus einer einzigen, dann zweier aufeinander liegender, dann dreier aufeinander liegender Lamellen u. s. w. bestimmt wurde. Wenn 12 Lamellen aufeinander gelegt waren, gaben sie ein Prisma von 5.3 Linien Breite und 5.0 Linien Dicke, und es hat keine Schwierigkeit nach (II) die Gleichungen anzuschrei-

ben, wodurch der Magnetismus der einzelnen Lamellen bestimmt wird. Bezeichnet man den Magnetismus der ersten Lamelle mit m_1 , der zweiten mit m_2 u. s. w., und wird noch in Rechnung genommen, dass die Dicke einer Lamelle $\frac{5}{12}$ Linien und die Verminderung für x Linien Entfernung

$$\frac{1}{1.394 + 0.366 x}$$

betrug, so erhält man 12 Gleichungen, woraus die unbekannten Grössen abzuleiten sind; da aber in Folge der vorhandenen Symmetrie $m_1 = m_{12}$, $m_2 = m_{11}$ u. s. w. sein wird, so reducirt sich die Anzahl der Gleichungen auf 6 und die Auflösung derselben gibt

$$\begin{aligned} m_1 &= 0.323 \\ m_2 &= 0.172 \\ m_3 &= 0.116 \\ m_4 &= 0.095 \\ m_5 &= 0.087 \\ m_6 &= 0.082. \end{aligned}$$

Als Einheit bei diesen Werthen ist der Magnetismus angenommen, den eine einzelne Lamelle für sich allein gehabt haben würde, d. h. in der Gleichung (II) ist $M = 1$ gesetzt.

Der grosse Einfluss der Induction tritt hier sehr auffallend hervor: die äusserste Lamelle hat bei der Vereinigung nur $\frac{1}{3}$ und die mittleren nur $\frac{1}{12}$ von dem Magnetismus, den sie ohne die Induction bei gleicher magnetisirender Kraft erlangt hätten.

Der oben gegebenen Andeutung zufolge sollten die Werthe von $m_1, m_2, m_3 \dots$ durch eine Exponential-Function dargestellt werden können, und diess ist auch der Fall, denn wenn man

$$m_n = 0.0821 + 0.241 (0.374^n - 1 - 0.374^{12-n}) \quad (\text{VII})$$

setzt, so erhält man Zahlen, welche mit den obigen vollkommen identisch sind, mit Ausnahme von m_6 , wovon der Werth um 0.002 von der obigen Bestimmung abweicht.

Den Fall, dass 10, 8, 6 Lamellen miteinander vereinigt seien, habe ich auf ähnliche Weise behandelt und übereinstimmende Resultate erhalten.

Dass ein ganz ähnliches Verhältniss bei den Polflächen eines cylindrischen Magnets (den man als zusammengesetzt aus unendlich vielen concentrischen Röhren betrachten kann) bestehen müsse, lässt sich aus der Analogie schliessen und wird auch durch die Erfahrung bestätigt. So findet man, dass die Messungen, welche vom Kolke⁵ an dem Pole eines grossen Electromagneten in äquatorialer Richtung vorgenommen hat, für die Entfernung n von der Mitte durch die Formel

$$= 35.0 + 0.1144 (1.897^n + 1.897^{-n}) \quad (\text{VIII})$$

dargestellt werden, und wie gross die Uebereinstimmung der Rechnung und Beobachtung ist, zeigt folgende Zusammenstellung:

Entfernung von der Mitte	Beobachtung	Rechnung	Differenz
8	54.2	54.2	0.0
7	45.5	45.1	+ 0.4
6	40.4	40.3	+ 0.1
5	38.0	37.8	+ 0.2
4	37.0	36.5	+ 0.5
3	35.5	35.8	— 0.3
2	35.0	35.4	— 0.4
1	35.0	35.2	— 0.2
0	35.0	35.2	— 0.2.

Man kann in dieser Richtung noch einen Schritt weiter gehen. Wird bei einer Lamelle von der Breite n der Magnetismus in der Entfernung x von der Kante analog mit (VII) und (VIII) durch

$$a + b (e^{-kx} + e^{-k(n-x)})$$

ausgedrückt, so ist das magnetische Moment der Lamelle

(5) Pogg. Ann. LXXXI. 321.

$$= \int_0^n [a + b(e^{-kx} + e^{-k(n-x)})] dx = an + \frac{2b}{k} (1 - e^{-kn}),$$

wofür man einfacher

$$an + p(1 - q^n) \quad (\text{IX})$$

schreiben kann. Messungen der hier bezeichneten Art habe ich mit 6 Lamellen, deren Breite sich wie 1, 2, 3, 4, 5, 6 verhielten, ausgeführt und in Poggendorff's Annalen Bd. CXIII. S. 243 bekannt gemacht. Indem ich nun die dort angegebenen Zahlen durch einen Ausdruck von obiger Form darzustellen suchte, gelangte ich zu folgender Formel

$$0.6933 n + 302 \left(1 - \frac{1}{3^n}\right), \quad (\text{X})$$

welche sehr genau die Beobachtungen darstellt, wie folgende Tabelle zeigt:

Breite der Lamellen	magnetisches Moment		Differenz
	berechnet	beobachtet	
1	2.70	2.69	+ 0.01
2	4.07	4.05	+ 0.02
3	4.99	5.04	— 0.05
4	5.75	5.77	— 0.02
5	6.48	6.52	— 0.04
6	7.18	7.12	+ 0.06.

Die Schwierigkeit eine Function zu ermitteln, welche der Gleichung (VI) genügt, hat mich veranlasst verschiedene andere Wege zu versuchen, und dabei gelangte ich zu einer Lösung des Problems, welche ich hier noch beifügen will, weil der Entwicklungsgang ganz eigenthümlich ist und in anderen Problemen der Physik, namentlich in der Electricitätslehre zweckmässige Anwendung finden dürfte. Man denke sich eine sehr grosse Anzahl von Linearprismen nach Fig. 2 zusammengelegt, bilde nach (II) die Gleichungen für das $(n - 1)^{\text{te}}$, das n^{te} und $(n + 1)^{\text{te}}$ Prisma; alsdann ziehe man die mittlere Gleichung

mit 2 multiplicirt von der Summe der zwei anderen Gleichungen ab, so erhält man ein Resultat von der Form

$$A_3 m_{n-3} + A_2 m_{n-2} + \left(1 - \frac{2}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) m_{n-1} - 2 \left(1 - \frac{1}{a}\right) m_n \\ + \left(1 - \frac{2}{a} + \frac{1}{a_2}\right) m_{n+1} + A_2 m_{n+2} + A_3 m_{n+3} + \dots = 0 \quad (\text{XI})$$

wo die Glieder rückwärts bis zum ersten und vorwärts bis zum letzten Linearprisma leicht nach der gegebenen Analogie hinzugefügt werden können. Hierbei hat man

$$A_m = \frac{1}{a_{m-1}} - \frac{2}{a_m} + \frac{1}{a_{m+1}},$$

oder wenn man die unendlich kleine Breite eines Linearprismas $= \varepsilon$ setzt,

$$A_m = \frac{1}{a_m - b\varepsilon} - \frac{2}{a_m} + \frac{1}{a_m + b\varepsilon} = \frac{2b^2 \varepsilon^2}{a_m^3} + \dots$$

Nun sind a und b in dem Ausdrucke (I) Functionen der Breite der nebeneinander befindlichen Prismen, und zwar nehmen diese Grössen asymptotisch zu in dem Maasse als die Breitendimension vermindert wird. Ich habe diess zuerst durch den Versuch erkannt und dann auch die theoretische Bestätigung dafür (die z. B. aus der obigen Gleichung (X) leicht abgeleitet werden kann) gefunden: es ergab sich dabei, dass wenn a und b für Prismen von messbarer Breite gelten, bei Prismen von der unendlich kleinen Breite ε

$$\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \frac{b}{\varepsilon}$$

in dem Ausdrucke (I) anstatt a und b gesetzt werden müssen. Hiernach gehören die Coefficienten $A_1, A_2, \dots$ zur dritten Ordnung und alle damit multiplicirten Glieder können, den vorhandenen Gliedern der zweiten Ordnung gegenüber, weggelassen werden. Die letzteren sind

$$\left(1 - \frac{2}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) (m_{n-1} + m_{n+1}) - 2 \left(1 - \frac{1}{a_1}\right) m_n = 0.$$

Substituirt man dem Gesagten zufolge $\frac{a}{\varepsilon}$ anstatt a_1 , dann $\frac{a}{\varepsilon} + \frac{b}{\varepsilon}\varepsilon$ anstatt a_2 , und lässt man in der Entwicklung von $\frac{1}{a_2}$ die Glieder der dritten und höherer Ordnungen weg, so ergibt sich

$$(m_{n-1} - 2m_n + m_{n+1}) - \frac{b\varepsilon^2}{a^2} (m_{n-1} + m_{n+1}) = 0.$$

Bezeichnet man die Entfernung des n^{ten} Linearprisma vom ersten mit x , die der Breite 1 entsprechende Intensität des Magnetismus an diesem Punkte mit V , wo V eine Function von x sein wird, so hat man

$$m_n = V\varepsilon$$

$$m_{n-1} = V\varepsilon - \frac{dV}{dx} \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dx^2} \varepsilon^3 + \dots$$

$$m_{n+1} = V\varepsilon + \frac{dV}{dx} \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dx^2} \varepsilon^3 + \dots,$$

so dass die obige Gleichung zuletzt die einfache Form

$$\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{2b}{a^2} V = 0$$

annimmt. Setzt man $\frac{2b}{a^2} = k^2$, so ist das Integral allgemein

$$V = Ae^{kx} + Be^{-kx},$$

oder wenn die Constanten nach den Bedingungen des Problems bestimmt werden

$$V = B (e^{-kx} + e^{-k(c-x)}), \quad (\text{XII})$$

wo c die Breite der Lamelle bedeutet. Da bei der Bildung der Gleichung (XI) die Grösse M , wovon die absolute Grösse von V abhängt, ausgefallen ist, so drücken die Gleichungen (XI) und (XII) nur die Form der Curve, nicht die absolute Grösse der Ordinaten aus, und um den Bedingungen des Problems zu genügen, muss noch eine Constante hinzugefügt werden, so dass man als Endresultat die Gleichung

$$V = A + B (e^{-kx} + e^{-k(c-x)})$$

erhält. Damit wäre das, was oben über die Form der Function $f(x)$ in Gleichung (VI) gesagt wurde, bestätigt. Es kann zugleich erwähnt werden, dass diese Gleichung die Vertheilung der Electricität auf der Oberfläche eines isolirten sehr dünnen Cylinders darstellt.

Wie am Anfange ausgesprochen wurde, war es meine Absicht, in dem Vorhergehenden nur vorläufige Andeutungen zu geben über den Weg, der zu befolgen wäre, um die mathematische Theorie des Magnetismus weiter auszubilden. Die angeführten Resultate zeigen, wie ich glaube, ganz entschieden, dass der bezeichnete Weg zum Ziele führt: ob es gelingen wird, die nicht unbedeutenden analytischen Hindernisse, welche dabei sich darbieten, zu beseitigen und für die in der Praxis vorkommenden Fälle einfache Gesetze und Formeln herzustellen, ist eine andere Frage.

Herr Nägeli hielt einen Vortrag

„über die crystallähnlichen Proteinkörper und ihre Verschiedenheit von wahren Crystallen.“

(Hiezu 2 Tafeln)

1. Ueber die aus Proteinsubstanzen bestehenden Crystalloide in der Paranas.

Von Hartig wurde zuerst (Bot. Zeit. 1856 p. 257 und Pflanzenkeim 1858 p. 108) auf crystallähnliche, aus Proteinverbindungen bestehende Bildungen in den Saamen aufmerksam gemacht. Dieselben wurden dann von Holle (Neues Jahrbuch für Pharmacie von Walz und Winkler 1858 X p. 1, 1859 XI p. 338), Radlkofer (Crystalle proteinartiger Körper 1859), Maschke (Bot. Zeit. 1859 p. 409) untersucht. Die genannten Beobachter bezeichnen sie als Crystalle, was mit Rücksicht