Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1900. Heft I.

München.
Verlag der k. Akademie.
1900.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Liniencomplexe im R_4 und Systeme Pfaff'scher Gleichungen.

Von **Eduard von Weber**.

(*Eingelaufen 3. November.*)

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich das Fundamentalproblem in der Theorie der Pfaff'schen Systeme, d. i. die Frage nach der Reducirbarkeit eines solchen Systems auf eine gegebene Zahl von Differentialelementen, für $n - 3$- und $n - 4$-gliedrige Systeme in n Variabeln eingehend behandelt und die dabei auftretenden Integrationsprobleme charakterisirt. Bei dieser Untersuchung erwies sich als wichtigstes Hilfsmittel die Geometrie der linearen Complexe des R_3, und es liegt sonach die Vermutung nahe, dass die Erledigung unseres Problems für den allgemeinen Fall eines $n - m$-gliedrigen Pfaff'schen Systems in n Variabeln im Wesentlichen auf die Theorie der linearen Complexe im $m-1$-dimensionalen Raume zurückkommt.

In der vorliegenden Note soll die genannte Methode auf $n - 5$-gliedrige Pfaff'sche Systeme in n Variabeln angewendet werden.

I. Die linearen Liniencomplexe im vierdimensionalen Raum.

1. Die homogenen Coordinaten eines Punkts in einem vierdimensionalen Raum R_4 bezeichnen wir mit $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_5$ oder $\eta_1, \ldots \eta_5$ oder $\zeta_1 \ldots \zeta_5$ etc. und sprechen demzufolge auch kurz

[1]) „Ueber die Reducirbarkeit eines Pfaff'schen Systems auf eine gegebene Zahl von Termen", diese Berichte 1900 Bd. XXX, p. 273—300.

von dem „Punkt ξ", dem „Punkt η" u. s. w. Der Buchstabe μ_k bedeute eine k-fach ausgedehnte lineare Punktmannigfaltigkeit des R_4, d. h. die Gesamtheit der Punkte ξ, die ein System von $4 - k$ linear unabhängigen linearen homogenen Gleichungen zwischen den ξ befriedigen. Für die Mannigfaltigkeiten μ_1, d. h. für die „Geraden" des R_4 gebrauchen wir die Bezeichnungen g, h, g', h' u. s. w. Eine μ_2, welche durch die Gerade g und den nicht auf ihr liegenden Punkt P bestimmt ist, werde als die μ_2 (P, g) bezeichnet u. s. w. Eine μ_3 nennen wir auch eine „Ebene" des R_4.

Ein linearer Complex im R_4 wird definirt durch eine alternirende bilineare Gleichung:

$$\sum_1^5{}^i \sum_1^5{}^k a_{ik}\, \xi_i\, \eta_k = 0, \tag{1}$$

worin die a_{ik} Constante bedeuten, die den Gleichungen

$$a_{ik} = -a_{ki}\,;\quad a_{ii} = 0$$

genügen. Wir wollen diesen Complex mit dem Buchstaben a bezeichnen. Eine „Gerade des Complexes a" ist dann jede μ_1 der Eigenschaft, dass zwei (und infolge dessen irgend zwei) ihrer Punkte die Relation (1) befriedigen. Es gibt in R_4 ∞^6 Gerade, von denen ∞^5 dem Complex a angehören. Den Inbegriff aller Geraden, die zwei Complexen

$$\sum \sum a_{ik}\, \xi_i\, \eta_k = 0, \quad \sum \sum \beta_{ik}\, \xi_i\, \eta_k = 0$$

gemeinsam sind, bezeichnen wir als „die zweigliedrige Congruenz (a, β)". Ebenso sprechen wir von drei-, vier-gliedrigen Congruenzen u. s. w. Dabei wird immer angenommen, dass die betreffenden Complexe linear unabhängig sind, d. h. dass ihre linken Seiten nicht durch eine lineare homogene Identität mit constanten Coefficienten verknüpft seien.

Der Rang der alternirenden Matrix

$$\| a_{ik} \| \quad (i, k = 1, 2, \ldots 5) \tag{2}$$

ist entweder 4 oder 2; im ersten Fall nennen wir den Complex a „allgemein", im zweiten „speziell".

2. Ist a allgemein, wie wir in dieser und den folgenden 3 Nummern annehmen, so besitzen die linearen Gleichungen:

$$\sum_1^5{}^k a_{ik}\,\xi_k = 0 \tag{3}$$

eine und nur eine Lösung $\zeta_1 \ldots \zeta_5$, die der „singuläre Punkt" von a heissen möge. Alle ∞^3 Geraden durch diesen Punkt S sind Complexgerade. Durch einen beliebigen Punkt η gehen nur ∞^2 Complexgerade; sie liegen in der durch (1) definirten Ebene, wobei die ξ laufende Coordinaten bedeuten. Diese Ebene bezeichnen wir als eine „zugeordnete μ_3", speziell als die dem Punkte η zugeordnete μ_3. Bedeutet ζ den singulären, η einen beliebigen Punkt, so wird die Gleichung (1) nicht geändert, wenn man η_i durch $\eta_i + \lambda\,\zeta_i$ ersetzt. Daraus folgt: Allen Punkten einer Geraden g, die den singulären Punkt S enthält, ist dieselbe μ_3 zugeordnet. Man erkennt auch sofort, dass zwei verschiedenen Punkten η, η', deren Verbindungslinie nicht durch S geht, auch zwei verschiedene μ_3 zugeordnet sind.

3. Jede zugeordnete μ_3 enthält den Punkt S; ist daher eine solche Ebene durch die Relation

$$u_1\,\xi_1 + \ldots + u_5\,\xi_5 = 0 \text{ oder } u_\xi = 0 \tag{4}$$

definirt, so besitzt die alternirende Matrix:

$$\begin{Vmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{15} & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{51} & a_{52} & \ldots & 0 & u_5 \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_5 & 0 \end{Vmatrix} \tag{5}$$

den Rang vier. Umgekehrt, ist dies der Fall, so haben die linearen Gleichungen mit den 6 Variabeln ξ_i. ϱ:

$$u_\xi = 0;\ \sum{}^k a_{ik}\,\xi_k = \varrho\,u_i\ \ (i = 1 \ldots 5)$$

zwei Lösungensysteme

$$\begin{gathered} \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_5, 0 \\ \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_5, \varrho \quad (\varrho \neq 0), \end{gathered}$$

d. h. die durch (4) definirte μ_3 ist jedem Punkte der Geraden

g zugeordnet, die die Punkte η, ζ verbindet. Jede in der μ_3 gelegene Gerade, die dem Complex a angehört, trifft g und umgekehrt, m. a. W.: die auf der μ_3 gelegenen Complexgeraden bilden einen speziellen R_3-Complex mit der Direktrix g.

Demgegenüber ist für eine beliebige, durch (4) dargestellte Ebene die Determinante (5) nicht null, und die auf ihr liegenden Complexgeraden bilden einen allgemeinen R_3-Complex. In der That schliesst man aus bekannten Sätzen[1]), dass sich die linke Seite der Gleichung (1) vermöge der beiden kongruenten Relationen $u_\xi = 0$, $u_\eta = 0$ auf eine Bilinearform in 4 Variabelnpaaren vom Range 4 oder 2 reducirt, je nachdem der Rang der Matrix (5) gleich 6 oder 4 ist.

4. Wir sagen, eine μ_2, die durch die Gleichungen

$$(6) \qquad u_\xi = 0, \quad v_\xi = 0$$

definirt sei, „genügt" dem Complex a, oder „ist eine μ_2 des Complexes a" (eine „Complex-μ_2"), wenn irgend zwei ihrer Punkte die Gleichung (1) erfüllen. Dazu ist notwendig und hinreichend, dass drei linear unabhängige Punkte der μ_2 wechselseitig in der genannten Beziehung stehen. Dann verschwindet die linke Seite von (1) identisch vermöge (6) und der dazu congruenten Relationen $u_\eta = 0$, $v_\eta = 0$[2]). Damit also durch (6) eine Complex-μ_2 definirt sei, ist notwendig und hinreichend, dass die Matrix:

$$(7) \qquad \begin{Vmatrix} 0 & a_{12} & .. & a_{15} & u_1 & v_1 \\ . & . & .. & . & . & . \\ a_{51} & a_{52} & .. & 0 & u_5 & v_5 \\ u_1 & u_2 & .. & u_5 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & .. & v_5 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

den Rang 4 besitze[3]). Man erkennt unmittelbar, dass es für einen allgemeinen Complex ∞^3 solcher Complex-μ_2 gibt; sie

[1]) Vgl. z. B. mein Buch: „Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem etc." (Leipzig 1900), Kap. IX, § 3.

[2]) Diese Berichte 1900, p. 280.

[3]) Vgl. z. B. mein Buch a. a. O.

gehen alle durch den singulären Punkt S, und man erhält sie sämtlich, indem man die ∞^3 Geraden des allgemeinen R_3-Complexes, den der Complex a aus einer beliebigen nicht durch S gehenden μ_3 ausschneidet (Nr. 3), mit S durch je eine μ_2 verbindet. Durch einen beliebigen Punkt P gehen einfach unendlich viele Complex-μ_2; diese bilden ein Büschel mit der Axe PS, das in der dem Punkte P zugeordneten μ_3 liegt.

Ist m eine beliebige, durch S gehende μ_2, und sind P, Q irgend zwei auf ihr gelegene Punkte, deren Verbindungslinie nicht durch S geht, so schneiden sich die beiden μ_3, die bezw. den Punkten P und Q zugewiesen sind, in einer ebenfalls durch S gehenden μ_2, die wir die „zu m conjugirte“ nennen, und mit m' bezeichnen wollen; m und m' haben nur den Punkt S gemein. Die Beziehung zwischen m und m' ist wechselseitig; eine Complex-μ_2 und nur eine solche ist sich selbst conjugirt.

5. Ist der Complex a speziell, so besitzen die Gleichungen (3) drei unabhängige Lösungen; die entsprechenden Punkte definiren eine μ_2, die wir die „singuläre μ_2“ von a nennen und mit s bezeichnen. Jede Gerade, die s schneidet, gehört dem Complex an, und umgekehrt; ein spezieller Complex ist also durch Angabe seiner singulären μ_2 eindeutig bestimmt. Jede μ_2, die s nach einer Geraden schneidet, ist eine Complex-μ_2, und umgekehrt; die Mannigfaltigkeit der Complex-μ_2 ist infolgedessen ∞^4. Dagegen gibt es jetzt nur ∞^1 zugeordnete μ_3, die ein Büschel bilden und alle die s enthalten. Jede solche Ebene hat die Eigenschaft, dass irgend zwei ihrer Punkte die Complexgleichung (1) befriedigen, dass also die linke Seite von (1) vermöge der Definitionsgleichung $u_\xi = 0$ einer solchen μ_3 und vermöge der dazu congruenten Relation $u_\eta = 0$ identisch verschwindet. Infolge dessen kann die Gleichung (1) auch in der Form

$$u_\xi\, v_\eta - u_\eta\, v_\xi = 0$$

geschrieben werden, worin $u_\xi = 0$ und $v_\xi = 0$ irgend zwei zugeordnete Ebenen bedeuten.

Umgekehrt, gibt es ein Relationenpaar $u_\xi = 0$, $u_\eta = 0$, das die Gleichung (1) identisch befriedigt, so ist a ein spezieller Complex.

6. Wir betrachten nunmehr eine Schaar von ∞^1 Complexen

$$\sum_1^5{}^i \sum_1^5{}^k (\lambda\, a_{ik} + \mu\, \beta_{ik})\, \xi_i\, \eta_k = 0, \tag{8}$$

und nehmen zunächst an, dass in der Matrix

$$|\lambda\, a_{ik} + \mu\, \beta_{ik}| \quad (i, k = 1, \ldots 5) \tag{9}$$

nicht alle 4-reihigen Hauptunterdeterminanten für beliebige λ, μ verschwinden. Wir bezeichnen ferner mit:

$$(-1)^{i+1} \cdot \Pi_i$$

das Pfaff'sche Aggregat der Ordnung 4, dessen Quadrat gleich derjenigen 4-reihigen Unterdeterminante ist, die aus dem Schema (2) durch Streichung der i^{ten} Zeile und Spalte entsteht, setzen also:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= a_{23}\, a_{45} + a_{24}\, a_{53} + a_{25}\, a_{34} \\ -\Pi_2 &= a_{13}\, a_{45} + a_{14}\, a_{53} + a_{15}\, a_{34} \text{ etc.,} \end{aligned}$$

und legen den Buchstaben $K_1 \ldots K_5$ die analoge Bedeutung hinsichtlich des Complexes β bei. Die Unterdeterminante, die aus (9) durch Weglassung der i^{ten} Zeile und Spalte entsteht, ist dann gleich dem Quadrat des Ausdrucks:

$$A_i = \lambda^2\, \Pi_i + \lambda\, \mu\, \Omega_i + \mu^2\, K_i, \tag{10}$$

wobei die Ω_i in folgender Weise definirt sind:

$$\Omega_1 = a_{23}\, \beta_{45} + a_{24}\, \beta_{53} + \ldots + a_{45}\, \beta_{23} \text{ u. s. w.}$$

Die linearen Gleichungen:

$$\sum_1^5{}^k \omega_k\, (\lambda\, a_{ik} + \mu\, \beta_{ik}) = 0 \quad (i = 1 \ldots 5) \tag{11}$$

besitzen ein und nur ein Lösungensystem $\omega_1 \ldots \omega_5$, bestehend aus binären Formen in λ, μ, die wir auf ihren Minimalgrad m

reducirt denken. Die Theorie der Elementarteiler[1]) liefert dann folgende Gleichung:

$$(12) \qquad 5 = 2m + 1 + 2l,$$

worin l den Grad des grössten gemeinsamen Divisors der binären Formen A_i bezeichnet; m hat also einen der Werte 2, 1, 0.

7. Bei der folgenden Untersuchung richten wir unser Hauptaugenmerk auf die Frage nach den Mannigfaltigkeiten μ_2, die die Congruenz (α, β), d. h. alle Complexe der Schaar (8) befriedigen; eine solche μ_2 nennen wir kurz eine „Congruenz-μ_2" oder eine „μ_2 der Congruenz (α, β)." Diese Definition überträgt sich ohne weiteres auf mehr als zweigliedrige Congruenzen. Insbesondere erkennt man leicht: Damit eine zweidimensionale ebene Mannigfaltigkeit der r-gliedrigen Congruenz $(\alpha, \beta \,.\,.\, \varepsilon)$ genüge, ist notwendig und hinreichend, dass sie r bestimmte, irgendwie ausgewählte, aber linear unabhängige Complexe der Schaar $(\alpha, \beta, \,.\,.\, \varepsilon)$ befriedige. Dazu ist natürlich vor allem notwendig, dass sie die singulären Punkte aller in der Schaar vorhandenen allgemeinen Complexe enthalte, und die singuläre μ_3 eines jeden der Schaar angehörenden speziellen Complexes nach je einer Geraden schneide.

8. Hat die in Nr. 6 definirte Zahl m den Wert 2, so gibt es (wegen $l = 0$) in der Schaar (8) keinen speziellen Complex. Zwei verschiedene Complexe der Schaar besitzen verschiedene singuläre Punkte; alle diese Punkte liegen nach Nr. 6 in einer μ_3 und erfüllen daselbst einen Kegelschnitt C. Die Annahme nämlich, dass ∞^1 singuläre Punkte von Complexen der Schaar (8) eine Gerade erfüllen, zieht, wie wir in der nächsten Nr. sehen werden, die Bedingung $m = 1$ nach sich.

Nach Nr. 7 gibt es also nur eine einzige „Congruenz-μ_2", d. h. ein einziges zweigliedriges Relationensystem (6) derart, dass in der siebenzeiligen Matrix

---

[1]) Vgl. z. B. meine Arbeit: „Ueber Schaaren von Bilinearformen", diese Berichte 1898, p. 374.

$$(13)\qquad \left\| \begin{matrix} \lambda\, a_{ik} + \mu\, \beta_{ik}, & u_i, & v_i \\ u_k & , 0, & 0 \\ v_k & , 0, & 0 \end{matrix} \right\| \text{[1]}$$

alle 6-reihigen Hauptdeterminanten für beliebige Werte λ, μ verschwinden. Dieses zweigliedrige Relationensystem wird auch erhalten, wenn man in der 5-zeiligen Matrix:

$$\| \xi_i, \Pi_i, \Omega_i, K_i \| \quad (i = 1, .. 5)$$

alle 4-reihigen Determinanten null setzt, oder noch einfacher in der Form:

$$(14)\qquad \sum^i \sum^k a_{ik}\, K_k\, \xi_i = 0,\ \sum \sum \beta_{ik}\, \Pi_k\, \xi_i = 0$$

mit Hilfe der Bemerkung, dass die in Rede stehende μ_2 derjenigen Ebene angehören muss, die dem singulären Punkt des einen Complexes im andern Complex zugewiesen ist.

Die Congruenz (α, β) umfasst in dem vorliegenden Fall ∞^4 Gerade, von denen je ∞^1 durch einen beliebigen Punkt des R_4, und je ∞^2 durch einen Punkt des Kegelschnitts C gehen.

9. Wenn die singulären Punkte der ∞^1 Complexe (8) eine Gerade g erfüllen sollen, so müssen in der Matrix

$$(15)\qquad \left\| \begin{matrix} \Pi_1 & \Omega_1 & K_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Pi_5 & \Omega_5 & K_5 \end{matrix} \right\|$$

die dreireihigen Determinanten alle verschwinden, und wir dürfen annehmen, dass nicht alle zweireihigen Determinanten null sind, da sonst die Complexe (8) einen gemeinsamen singulären Punkt hätten, also $m = 0$ wäre.

Die Formen A_i (Nr. 6) sind also unter der gemachten Annahme lineare Combinationen zweier Formen $\Phi(\lambda, \mu)$ und $\Psi(\lambda, \mu)$, die sich nicht nur um einen constanten Faktor unterscheiden, und der singuläre Punkt des den Parameterwerten

[1] Wir gebrauchen hier und im folgenden für geränderte alternirende Schemata eine auch sonst übliche abkürzende Schreibweise.

λ, μ entsprechenden Complexes der Schaar (8) hat die Coordinaten

$$(16) \qquad \varrho\, \xi_i = a_i\, \Phi(\lambda, \mu) + b_i\, \Psi(\lambda, \mu),$$

worin ϱ einen Proportionalitätsfaktor, die a_i, b_i Constante bedeuten. Die in λ, μ quadratische Gleichung:

$$\Phi - \omega\, \Psi = 0$$

besitzt, wenn für ω eine beliebige von Null verschiedene Constante gewählt wird, zwei Lösungen λ_1, μ_1 und λ_2, μ_2, deren Determinante $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$ von Null verschieden ist. Sind nun die Complexe, die bezw. den Parameterwerten

$$(17) \qquad \lambda_1, \mu_1;\ \lambda_2, \mu_2$$

entsprechen, beide allgemein, so sind die Grössen $\Psi(\lambda_1, \mu_1)$ und $\Psi(\lambda_2, \mu_2)$ beide von Null verschieden, da andernfalls die Formen $A_1 \ldots A_5$ für eines der beiden Wertsysteme (17) verschwänden; ferner verschwinden die Grössen

$$(18) \qquad a_i\, \omega + b_i \quad (i = 1, \ldots 5)$$

nicht alle, da sonst die A_i proportional, also $m = 0$ wäre. Die genannten beiden allgemeinen Complexe haben dann einen gemeinschaftlichen singulären Punkt mit den Coordinaten (18), was offenbar wiederum auf die Voraussetzung $m = 0$ hinauskommt.

Ist aber einer der genannten zwei Complexe speziell, etwa der den Parameterwerten λ_1, μ_1 entsprechende, so hat man

$$a_i\, \Phi(\lambda_1, \mu_1) + b_i\, \Psi(\lambda_1, \mu_1) = 0,$$

und infolgedessen $\Phi(\lambda_1, \mu_1) = 0$, $\Psi(\lambda_1, \mu_1) = 0$, da die Determinanten $a_i b_k - a_k b_i$ aus dem vorhin angeführten Grund nicht alle verschwinden; die Formen Φ und Ψ, und mithin auch die Formen $A_1 \ldots A_5$ haben also einen Linearfaktor gemein, d. h. die Zahlen, die in Nr. 6 mit m und l bezeichnet wurden, haben beide den Wert 1.

10. Umgekehrt, ist $m = l = 1$, so haben die A_i einen Linearfaktor gemein, d. h. die Schaar (8) enthält einen und nur einen speziellen Complex, dessen singuläre μ_2 mit s be-

$$(13)\qquad \begin{Vmatrix} \lambda\, a_{ik} + \mu\, \beta_{ik}, & u_i, & v_i \\ u_k & , 0, & 0 \\ v_k & , 0, & 0 \end{Vmatrix}\ ^{1)}$$

alle 6-reihigen Hauptdeterminanten für beliebige Werte λ, μ verschwinden. Dieses zweigliedrige Relationensystem wird auch erhalten, wenn man in der 5-zeiligen Matrix:

$$\| \xi_i, \Pi_i, \Omega_i, K_i \| \quad (i = 1, \ldots 5)$$

alle 4-reihigen Determinanten null setzt, oder noch einfacher in der Form:

$$(14)\qquad \sum^i \sum^k a_{ik} K_k \xi_i = 0, \quad \sum \sum \beta_{ik} \Pi_k \xi_i = 0$$

mit Hilfe der Bemerkung, dass die in Rede stehende μ_2 derjenigen Ebene angehören muss, die dem singulären Punkt des einen Complexes im andern Complex zugewiesen ist.

Die Congruenz (a, β) umfasst in dem vorliegenden Fall ∞^4 Gerade, von denen je ∞^1 durch einen beliebigen Punkt des R_4, und je ∞^2 durch einen Punkt des Kegelschnitts C gehen.

9. Wenn die singulären Punkte der ∞^1 Complexe (8) eine Gerade g erfüllen sollen, so müssen in der Matrix

$$(15)\qquad \begin{Vmatrix} \Pi_1 & \Omega_1 & K_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Pi_5 & \Omega_5 & K_5 \end{Vmatrix}$$

die dreireihigen Determinanten alle verschwinden, und wir dürfen annehmen, dass nicht alle zweireihigen Determinanten null sind, da sonst die Complexe (8) einen gemeinsamen singulären Punkt hätten, also $m = 0$ wäre.

Die Formen A_i (Nr. 6) sind also unter der gemachten Annahme lineare Combinationen zweier Formen $\Phi(\lambda, \mu)$ und $\Psi(\lambda, \mu)$, die sich nicht nur um einen constanten Faktor unterscheiden, und der singuläre Punkt des den Parameterwerten

[1] Wir gebrauchen hier und im folgenden für geränderte alternirende Schemata eine auch sonst übliche abkürzende Schreibweise.

λ, μ entsprechenden Complexes der Schaar (8) hat die Coordinaten

(16) $$\varrho\, \xi_i = a_i\, \Phi(\lambda, \mu) + b_i\, \Psi(\lambda, \mu),$$

worin ϱ einen Proportionalitätsfaktor, die a_i, b_i Constante bedeuten. Die in λ, μ quadratische Gleichung:

$$\Phi - \omega\, \Psi = 0$$

besitzt, wenn für ω eine beliebige von Null verschiedene Constante gewählt wird, zwei Lösungen λ_1, μ_1 und λ_2, μ_2, deren Determinante $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$ von Null verschieden ist. Sind nun die Complexe, die bezw. den Parameterwerten

(17) $$\lambda_1, \mu_1;\ \lambda_2, \mu_2$$

entsprechen, beide allgemein, so sind die Grössen $\Psi(\lambda_1, \mu_1)$ und $\Psi(\lambda_2, \mu_2)$ beide von Null verschieden, da andernfalls die Formen $A_1 \ldots A_5$ für eines der beiden Wertsysteme (17) verschwänden; ferner verschwinden die Grössen

(18) $$a_i\, \omega + b_i \quad (i = 1, \ldots 5)$$

nicht alle, da sonst die A_i proportional, also $m = 0$ wäre. Die genannten beiden allgemeinen Complexe haben dann einen gemeinschaftlichen singulären Punkt mit den Coordinaten (18), was offenbar wiederum auf die Voraussetzung $m = 0$ hinauskommt.

Ist aber einer der genannten zwei Complexe speziell, etwa der den Parameterwerten λ_1, μ_1 entsprechende, so hat man

$$a_i\, \Phi(\lambda_1, \mu_1) + b_i\, \Psi(\lambda_1, \mu_1) = 0,$$

und infolgedessen $\Phi(\lambda_1, \mu_1) = 0$, $\Psi(\lambda_1, \mu_1) = 0$, da die Determinanten $a_i b_k - a_k b_i$ aus dem vorhin angeführten Grund nicht alle verschwinden; die Formen Φ und Ψ, und mithin auch die Formen $A_1 \ldots A_5$ haben also einen Linearfaktor gemein, d. h. die Zahlen, die in Nr. 6 mit m und l bezeichnet wurden, haben beide den Wert 1.

10. Umgekehrt, ist $m = l = 1$, so haben die A_i einen Linearfaktor gemein, d. h. die Schaar (8) enthält einen und nur einen speziellen Complex, dessen singuläre μ_2 mit s be-

$$(13)\qquad \left\| \begin{matrix} \lambda\, a_{ik} + \mu\, \beta_{ik}, & u_i, & v_i \\ u_k & , 0, & 0 \\ v_k & , 0, & 0 \end{matrix} \right\|\ ^{1)}$$

alle 6-reihigen Hauptdeterminanten für beliebige Werte λ, μ verschwinden. Dieses zweigliedrige Relationensystem wird auch erhalten, wenn man in der 5-zeiligen Matrix:

$$\| \xi_i, \Pi_i, \Omega_i, K_i \| \quad (i = 1, .. 5)$$

alle 4-reihigen Determinanten null setzt, oder noch einfacher in der Form:

$$(14)\qquad \sum^i \sum^k a_{ik} K_k \xi_i = 0, \quad \sum \sum \beta_{ik} \Pi_k \xi_i = 0$$

mit Hilfe der Bemerkung, dass die in Rede stehende μ_2 derjenigen Ebene angehören muss, die dem singulären Punkt des einen Complexes im andern Complex zugewiesen ist.

Die Congruenz (α, β) umfasst in dem vorliegenden Fall ∞^4 Gerade, von denen je ∞^1 durch einen beliebigen Punkt des R_4, und je ∞^2 durch einen Punkt des Kegelschnitts C gehen.

9. Wenn die singulären Punkte der ∞^1 Complexe (8) eine Gerade g erfüllen sollen, so müssen in der Matrix

$$(15)\qquad \left\| \begin{matrix} \Pi_1 & \Omega_1 & K_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Pi_5 & \Omega_5 & K_5 \end{matrix} \right\|$$

die dreireihigen Determinanten alle verschwinden, und wir dürfen annehmen, dass nicht alle zweireihigen Determinanten null sind, da sonst die Complexe (8) einen gemeinsamen singulären Punkt hätten, also $m = 0$ wäre.

Die Formen A_i (Nr. 6) sind also unter der gemachten Annahme lineare Combinationen zweier Formen $\Phi(\lambda, \mu)$ und $\Psi(\lambda, \mu)$, die sich nicht nur um einen constanten Faktor unterscheiden, und der singuläre Punkt des den Parameterwerten

1) Wir gebrauchen hier und im folgenden für geränderte alternirende Schemata eine auch sonst übliche abkürzende Schreibweise.

λ, μ entsprechenden Complexes der Schaar (8) hat die Coordinaten

(16) $$\varrho\, \xi_i = a_i\, \Phi(\lambda, \mu) + b_i\, \Psi(\lambda, \mu),$$

worin ϱ einen Proportionalitätsfaktor, die a_i, b_i Constante bedeuten. Die in λ, μ quadratische Gleichung:

$$\Phi - \omega\, \Psi = 0$$

besitzt, wenn für ω eine beliebige von Null verschiedene Constante gewählt wird, zwei Lösungen λ_1, μ_1 und λ_2, μ_2, deren Determinante $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$ von Null verschieden ist. Sind nun die Complexe, die bezw. den Parameterwerten

(17) $$\lambda_1, \mu_1;\ \lambda_2, \mu_2$$

entsprechen, beide allgemein, so sind die Grössen $\Psi(\lambda_1, \mu_1)$ und $\Psi(\lambda_2, \mu_2)$ beide von Null verschieden, da andernfalls die Formen $A_1 \ldots A_5$ für eines der beiden Wertsysteme (17) verschwänden; ferner verschwinden die Grössen

(18) $$a_i\, \omega + b_i \quad (i = 1, \ldots 5)$$

nicht alle, da sonst die A_i proportional, also $m = 0$ wäre. Die genannten beiden allgemeinen Complexe haben dann einen gemeinschaftlichen singulären Punkt mit den Coordinaten (18), was offenbar wiederum auf die Voraussetzung $m = 0$ hinauskommt.

Ist aber einer der genannten zwei Complexe speziell, etwa der den Parameterwerten λ_1, μ_1 entsprechende, so hat man

$$a_i\, \Phi(\lambda_1, \mu_1) + b_i\, \Psi(\lambda_1, \mu_1) = 0,$$

und infolgedessen $\Phi(\lambda_1, \mu_1) = 0$, $\Psi(\lambda_1, \mu_1) = 0$, da die Determinanten $a_i b_k - a_k b_i$ aus dem vorhin angeführten Grund nicht alle verschwinden; die Formen Φ und Ψ, und mithin auch die Formen $A_1 \ldots A_5$ haben also einen Linearfaktor gemein, d. h. die Zahlen, die in Nr. 6 mit m und l bezeichnet wurden, haben beide den Wert 1.

10. Umgekehrt, ist $m = l = 1$, so haben die A_i einen Linearfaktor gemein, d. h. die Schaar (8) enthält einen und nur einen speziellen Complex, dessen singuläre μ_2 mit s be-

zeichnet werde; die singulären Punkte der ∞^1 Complexe (8) erfüllen eine Gerade g, die die Mannigfaltigkeit s in einem Punkte P trifft.

Diese letztere Behauptung ergibt sich folgendermassen: Jede Gerade der Congruenz (α, β) trifft die Mannigfaltigkeit s (Nr. 5), und die Verbindungslinie der singulären Punkte irgend zweier Complexe der Schaar ist eine Congruenzgerade; die Annahme ferner, dass g auf s liege, ist unstatthaft, da sonst die Gleichungen

$$(19) \qquad \sum\nolimits^k \alpha_{ik}\, \xi_k = 0, \quad \sum\nolimits^k \beta_{ik}\, \xi_k = 0 \quad (i = 1, .. 5)$$

von allen singulären Punkten ξ der Complexe unserer Schaar erfüllt würden, also der Fall $m = 0$ vorläge.

Sind α und β allgemeine Complexe, und λ_0, μ_0 die Parameter des speziellen Complexes der Schaar, so hat der vorhin genannte Punkt P Coordinaten der Form $\varrho\, \Pi_i + \sigma\, K_i$, und man hat:

$$\varrho\, \sigma \neq 0; \quad \lambda_0\, \mu_0 \neq 0;$$

$$(20) \quad \sum\nolimits^k (\lambda_0\, \alpha_{ik} + \mu_0\, \beta_{ik})\,(\varrho\, \Pi_k + \sigma\, K_k) = 0 \quad (i = 1, 2, .. 5),$$

oder auch:

$$(21) \quad \lambda_0\, \sigma \sum\nolimits^k \alpha_{ik}\, K_k + \mu_0\, \varrho \sum\nolimits^k \beta_{ik}\, \Pi_k = 0 \quad (i = 1, 2, .. 5),$$

in Worten: Bezeichnet man mit M die $\mu_3\,(g, s)$, so ordnet jeder Complex der Schaar (8) einem beliebigen Punkte von g eben die Mannigfaltigkeit M zu (Nr. 2). In der That drücken ja die Relationen (21) aus, dass die μ_3, die der Complex α dem Punkte K_k zuweist, übereinstimmt mit der μ_3, die der Complex β dem Punkte Π_k zuordnet; also ordnet jeder Complex der Schaar (8) einem beliebigen Punkte von g dieselbe μ_3 zu, und letztere enthält g, aber offenbar auch s, d. i. die singuläre Mannigfaltigkeit des in der Schaar enthaltenen speziellen Complexes.

Daraus folgt sofort: Alle in M liegenden Geraden, die g schneiden, sind Congruenzgerade, alle einfach unendlich vielen in M gelegenen μ_2, die g enthalten, sind Congruenz-μ_2, und nach Nr. 7 gibt es auch keine andere Congruenz-μ_2; M möge die ausgezeichnete Ebene der Congruenz (a, β) heissen.

Die Gleichungen (14) reduciren sich jetzt auf eine einzige, nämlich diejenige der ausgezeichneten Ebene. Man erhält die allgemeinste Congruenz von der hier studirten Beschaffenheit, indem man einen beliebigen allgemeinen Complex a und einen beliebigen speziellen Complex β wählt, doch so, dass der singuläre Punkt von a nicht auf der singulären μ_2 von β gelegen ist.

11. Ist die in Nr. 6 definirte Zahl $m = 0$, so wird wegen Gleichung (12) die Zahl $l = 2$, d. h. die Pfaff'schen Aggregate A_i sind proportional. Die Complexe der Schaar haben also einen gemeinsamen singulären Punkt S, und es gibt zwei im allgemeinen verschiedene spezielle Complexe, die der Schaar angehören, und deren singuläre μ_2 beide durch S gehen. Sind s, s' diese beiden μ_2, und bedeutet a einen allgemeinen Complex der Schaar, so schneiden alle Geraden von a, die mit s einen Punkt gemein haben, auch die Mannigfaltigkeit s' und umgekehrt, d. h. s und s' sind hinsichtlich des Complexes a conjugirt (Nr. 4 am Schluss).

Man erhält die allgemeinste in Rede stehende Configuration, wenn man a beliebig wählt, und unter β einen speziellen Complex versteht, dessen singuläre μ_2 durch den singulären Punkt S von a geht. Wählt man insbesondere eine μ_2 des Complexes a (Nr. 4), dann und nur dann coincidiren die beiden speziellen Complexe der Schaar (a, β), d. h. die 4-reihigen Hauptunterdeterminanten der Matrix (9) werden alle mit λ^4 proportional.

Durch jede Gerade g einer Congruenz (a, β), für die $m = 0$ ist, geht im allgemeinen (d. h. wenn g den singulären Punkt S nicht enthält) eine und nur eine Congruenz-μ_2; es ist dies diejenige μ_2, die g mit S verbindet. Dasselbe gilt für jede Gerade, die S enthält, ohne in einer der beiden singulären Mannigfaltigkeiten s, s' zu liegen; dagegen ist jede in s oder s' gelegene Gerade auf einfach unendlich vielen Congruenz-μ_2

enthalten. Es gibt daher im gegenwärtigen Fall zweifach unendlich viele Congruenz-μ_2.

12. Verschwinden in der Matrix (9) alle vierreihigen Determinanten identisch, so sind alle Complexe der Schaar (8) speziell, und die linearen Gleichungen (11) besitzen 3 Lösungensysteme, deren Minimalgradzahlen hinsichtlich λ, μ mit m_1, m_2, m_3 bezeichnet seien. Sind dann die Elemente der Matrix (9) nicht proportional, also die Complexe α und β nicht identisch, so folgt aus der Theorie der Bilinearformen[1]) die Gleichung:

$$5 = 2\,(m_1 + m_2 + m_3) + 3.$$

Man hat sonach $m_1 = m_2 = 0$, $m_3 = 1$, d. h. die linearen Gleichungen (19) haben zwei und nur zwei Lösungen η_i, ζ_i gemein. Die Verbindungslinie der Punkte η, ζ werde mit g bezeichnet. Die ∞^1 singulären μ_2 der Complexe unserer Schaar bilden ein Büschel mit der Axe g, das in einer μ_3 gelegen ist. Diese letztere μ_3 nennen wir die „singuläre Ebene M". Da jede Congruenz-μ_2 alle singulären μ_2 nach je einer Geraden schneiden muss (Nr. 7), so gibt es zwei Arten von Congruenz-μ_2: einmal sämtliche 3-fach unendlich vielen μ_2, die in M liegen, sodann die zweifach unendlich vielen μ_2, die die Gerade g enthalten. Die Congruenz ist identisch mit dem Inbegriff aller Geraden, die entweder g schneiden oder in M liegen.

Ist $u_\xi = 0$ die Definitionsgleichung der Ebene M, so verschwinden in der Matrix:

$$(22)\qquad \left\|\begin{matrix} \lambda\, a_{ik} + \mu\, \beta_{ik}, & u_i \\ u_k & , 0 \end{matrix}\right\|$$

alle 4-reihigen Hauptunterdeterminanten identisch, und M ist die einzige Ebene dieser Eigenschaft.

13. Die Sätze der vorigen Nr. lassen sich leicht verallgemeinern. Wir betrachten die r-gliedrige Congruenz ($r > 2$):

$$(23)\qquad \sum\sum (\lambda\, a_{ik} + \mu\, \beta_{ik} + \ldots + \tau\, \varepsilon_{ik})\, \xi_i\, \eta_k = 0$$

und nehmen an, dass der Rang des Schemas

[1]) Vgl. z. B. diese Berichte 1898, pag. 374.

(24) $$\| \lambda a_{ik} + \ldots + \tau \varepsilon_{ik} \| \quad (i, k = 1, \ldots 5)$$

gleich zwei sei. Dann sind alle Complexe der Schaar (23) speziell; von den singulären μ_2 der Complexe $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ schneiden sich also je zwei nach einer Geraden. Diese $r - 1$-fach unendlich vielen Mannigfaltigkeiten haben also entweder

a) eine Gerade g gemein, d. h. die $5r$ linearen Gleichungen:

(25) $$\sum^k a_{ik} \xi_k = 0, \ldots \sum^k \varepsilon_{ik} \xi_k = 0 \quad (i = 1, \ldots 5)$$

besitzen zwei Lösungen, und man hat $r = 3$; oder

b) sie liegen alle in einer dreidimensionalen linearen Mannigfaltigkeit M, der „singulären Ebene der Congruenz (23)", und es ist $r = 3$ oder 4.

Im ersten Fall besteht die Congruenz $(\alpha \beta \gamma)$ aus allen Geraden, die g treffen; es gibt zweifach unendlich viele Congruenz-μ_2, die alle durch g gehen und mit den singulären μ_2 der Complexe (23) identisch sind. Ist im Falle b) $r = 4$, so sind die Congruenzgeraden mit dem Inbegriff der in M liegenden Geraden identisch; ist aber $r = 3$, so haben die singulären μ_2 der Complexe α, β, γ einen Punkt P gemein, und die Congruenz setzt sich zusammen aus allen durch P gehenden und allen in M liegenden Geraden; unter beiden Annahmen gibt es dreifach unendlich viele Congruenz-μ_2, nämlich alle in M gelegenen μ_2.

Ist im Falle b) die Ebene M durch die Gleichung $u_\xi = 0$ definirt, so erhält man zur Bestimmung der Unbekannten u_i ein verträgliches System linearer Gleichungen, indem man ausdrückt, dass in der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \lambda a_{ik} + \ldots + \tau \varepsilon_{ik}, & u_i \\ u_k & , 0 \end{matrix} \right\|$$

alle 4-reihigen Hauptunterdeterminanten identisch verschwinden, und es gibt nur e i n Wertsystem u_i dieser Eigenschaft.

Natürlich folgt aus der Existenz einer Ebene $u_\xi = 0$, deren sämtliche Gerade den Complexen $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ genügen, auch umgekehrt, dass der Rang der Matrix (24) gleich zwei ist.

Ist der Rang der Matrix (24) gleich vier, so enthält die Schaar (23) ∞^{r-1} allgemeine Complexe. Eine Congruenz-μ_2 muss alle singulären Punkte dieser Complexe enthalten. Soll also überhaupt eine Congruenz-μ_2 existiren, so müssen die singulären Punkte der ∞^{r-1} Complexe entweder auf einer μ_2 liegen, oder eine Gerade erfüllen, oder endlich alle identisch sein; wir wollen diese Annahmen der Reihe nach besprechen.

14. Bezeichnet man ähnlich wie in Nr. 6 mit

$$A_i = \Omega_{11}^{(i)}\lambda^2 + \Omega_{22}^{(i)}\mu^2 + \ldots + \Omega_{rr}^{(i)}\tau^2 + \Omega_{12}^{(i)}\lambda\mu + \ldots + \Omega_{r-1,r}^{(i)}\sigma\tau$$

das Pfaff'sche Aggregat, dessen Quadrat gleich ist dem durch Streichung der i^{ten} Zeile und Spalte aus (24) entstehenden Minor, so ist der singuläre Punkt des Complexes (23) durch die Gleichungen

$$(26) \qquad \varrho\,\xi_i = A_i \quad (i = 1, \ldots 5)$$

definirt, worin ϱ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet.

Damit diese Punkte alle einer μ_2 angehören, ist notwendig und hinreichend, dass alle 4-reihigen, nicht aber alle 3-reihigen Determinanten der Matrix:

$$(27) \qquad \left\| \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \Omega_{11}^{(i)} & \Omega_{12}^{(i)} & \ldots & \Omega_{r-1,r}^{(i)} & \Omega_{rr}^{(i)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|$$

verschwinden, und man erhält die Definitionsgleichungen dieser μ_2, indem man obiger Matrix die Spalte $\xi_1 \ldots \xi_5$ beifügt, und alle 4-reihigen Determinanten des so gebildeten Schemas Null setzt. Damit aber diese μ_2 wirklich eine Congruenz-μ_2 sei, ist weiterhin auszudrücken, dass sie die Complexe $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ alle befriedigt (Nr. 7).

15. Damit die singulären Punkte der Complexe (23) eine Gerade g erfüllen, ist notwendig und hinreichend, dass in der Matrix (27) alle dreireihigen, aber nicht alle zweireihigen Unterdeterminanten verschwinden. Dann reduciren sich die quadratischen Formen $A_1 \ldots A_5$ auf nur 2 linear unabhängige, d. h. die Formeln (26) können auf folgende Gestalt gebracht werden:

(28) $$\varrho\, \xi_i = a_i\, \Phi + b_i\, \Psi \quad (i = 1, .. 5),$$

worin Φ, Ψ zwei quadratische Formen der r Variabeln $\lambda, \mu, .. \tau$, und die a_i, b_i Constante bedeuten. Die Determinanten $a_i b_k - a_k b_i$ verschwinden offenbar nicht alle, da sonst die singulären Punkte der Complexe (23) alle identisch wären.

Deuten wir die $\lambda, \mu, .. \tau$ für den Augenblick als homogene Punktcoordinaten in einem Raume $\mathfrak{R}_{r-1}$, so wird durch jeden Punkt $\mathfrak{P}$ dieses Raums ein Complex $\mathfrak{C}$ der Schaar (23) repräsentirt; dieser ist dann und nur dann speziell, wenn $\mathfrak{P}$ auf der Schnittmannigfaltigkeit der beiden Flächen:

(29) $$\Phi = 0, \quad \Psi = 0$$

liegt. Es seien nun $\lambda, \mu, .. \tau$ und $\lambda', \mu', .. \tau'$ zwei Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ des $\mathfrak{R}_{r-1}$, die nicht auf der Mannigfaltigkeit (29) liegen, aber beide der Relation

(30) $$\Phi - \omega\, \Psi = 0$$

genügen, worin ω eine beliebige Constante bedeutet. Dann repräsentiren die Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ allgemeine Complexe $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'$ der Schaar (23) mit gemeinsamem singulären Punkt, und da alle ∞^1 Complexe der durch $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'$ definirten Congruenz diesen singulären Punkt gemein haben, so müssen ihre repräsentirenden Punkte die Relation (30) ebenfalls erfüllen. Enthält also die Fläche (30) zwei Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$, die nicht auf der Mannigfaltigkeit (29) gelegen sind, so enthält sie auch alle Punkte ihrer Verbindungslinie. Daher müssen alle quadratischen Formen $\Phi - \omega\, \Psi$ in je zwei Linearfaktoren zerfallen, und dies ist nur möglich, wenn Φ, Ψ selbst und infolge dessen auch die Pfaffschen Aggregate $A_1 .. A_5$ einen Linearfaktor L gemein haben. Durch die Relation

$$L \equiv a\,\lambda + b\,\mu + .. + e\,\tau = 0$$

wird nun eine in der Schaar (23) enthaltene $r - 1$-gliedrige Congruenz definirt, die aus lauter speziellen Complexen besteht; also muss jedenfalls $r < 5$ sein.

16. Es sei zunächst $r = 3$. Unter α verstehen wir dann einen allgemeinen Complex, unter (β, γ) die soeben constatirte,

aus ∞^1 speziellen Complexen bestehende Congruenz. Ist der singuläre Punkt S von a nicht auf der singulären Ebene M dieser Congruenz gelegen, so kann nach Nr. 7 nur die μ_2, die den Punkt S mit der Schnittgeraden g der beiden singulären μ_2 von β und γ verbindet, den 3 Complexen a, β, γ gleichzeitig genügen. Damit dies der Fall sei, ist notwendig und hinreichend, dass die Gerade g dem Complex a angehöre.

Liegt dagegen S auf M, so gibt es nach Nr. 4 einfach unendlich viele in M gelegene μ_2, die alle eine Gerade g' enthalten und dem Complex a, aber nach Nr. 12 auch den Complexen β und γ genügen; man erkennt auch nach Nr. 7 sofort, dass es keine andern μ_2 der Congruenz (a, β, γ) geben kann.

Zweitens machen wir die Annahme $r = 4$ und bezeichnen wieder mit a einen allgemeinen, mit (β, γ, δ) die Congruenz der ∞^2 speziellen Complexe. Haben die singulären Mannigfaltigkeiten der letzteren eine Gerade g gemein (Nr. 13), und genügt diese dem Complex a, so befriedigt die μ_2 (S, g) und nur diese alle 4 gegebenen Complexe. Besitzt dagegen die Congruenz (β, γ, δ) eine singuläre Mannigfaltigkeit M (Nr. 13), und liegt S auf dieser, so gibt es wie vorhin ein in M gelegenes Büschel von einfach unendlich vielen Mannigfaltigkeiten μ_2, die unsere 4 Complexe gleichzeitig erfüllen. In allen andern Fällen existirt überhaupt keine μ_2 der Congruenz $(a\ \beta\ \gamma\ \delta)$.

Unter der Annahme $r = 5$ endlich muss der singuläre Punkt S des allgemeinen Complexes a auf der singulären Ebene M der speziellen Congruenz $(\beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon)$ liegen, wenn es überhaupt eine μ_2 der 5-gliedrigen Congruenz $(a\,..\,\varepsilon)$ geben soll; ist diese Bedingung erfüllt, so gibt es wie in den früheren Fällen ein Büschel von einfach unendlich vielen Congruenz-μ_2.

17. Aus der vorigen Nr. folgt, dass unter gewissen leicht aufzustellenden rationalen Bedingungsgleichungen für die $a_{ik}, \beta_{ik} \dots$ innerhalb einer zwei- oder mehrgliedrigen Congruenz einfach unendlich viele Congruenz-μ_2 existiren können, die alle in einer μ_3 liegen und daselbst ein Büschel mit gemeinsamer Axe

g **bilden**; diese μ_3 wollen wir dann als die „**ausgezeichnete Ebene**" der Congruenz $(\alpha, \beta, .. \varepsilon)$ bezeichnen.

18. Sind die in Nr. 14 betrachteten quadratischen Formen $\Delta_1, .. \Delta_5$ proportional, dann und nur dann haben die linearen Gleichungen

$$(31) \qquad \sum\nolimits^k \alpha_{ik}\, \xi_k = 0\,, \quad \sum\nolimits^k \beta_{ik}\, \xi_k = 0 \,.. \quad (i = 1\,..\,5)$$

eine Lösung, die Complexe der r-gliedrigen Congruenz $(\alpha, \beta, .. \varepsilon)$ mithin den singulären Punkt S gemein. Es sei R_3 eine beliebige ebene, dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, die den Punkt S nicht enthält. Die auf R_3 gelegenen Geraden des Complexes α bilden dann einen gewöhnlichen R_3-Complex α'; ebenso schneidet β aus dem R_3 einen gewöhnlichen Liniencomplex β' aus, etc. Ist g eine gemeinsame Gerade der Complexe $\alpha', \beta', .. \varepsilon'$, so genügt die $\mu_2\,(g, S)$ allen Complexen der Schaar $(\alpha .. \varepsilon)$, und umgekehrt erhält man auf diesem Wege auch alle μ_2 unserer Congruenz; die Aufsuchung dieser letzteren reducirt sich also auf die Ermittelung der gemeinsamen Geraden mehrerer Liniencomplexe im gewöhnlichen Raum.

Die Congruenz $(\alpha, \beta, .. \varepsilon)$ setzt sich unter der gemachten Annahme zusammen aus den Geraden, die durch S gehen, und aus den Geraden, die in den soeben definirten Congruenz-μ_2 gelegen sind.

19. Eine zweigliedrige Congruenz besteht aus ∞^4 Geraden; durch einen beliebigen Punkt P des R_4, der nicht auf der singulären μ_2 eines in der Congruenz enthaltenen speziellen Complexes gelegen ist oder mit dem singulären Punkt eines der Complexe der Schaar zusammenfällt, geht ein lineares Büschel von Congruenzgeraden; hat P eine der angegebenen besonderen Lagen, so gehen durch ihn ∞^2 Congruenzgeraden. Ist P gemeinsamer singulärer Punkt aller allgemeinen Complexe der Schaar, oder sind die ∞^1 Complexe alle speziell und liegt P auf der gemeinsamen Schnittgeraden ihrer singulären Mannigfaltigkeiten, so sind alle durch P gehenden Geraden in der Congruenz enthalten.

Eine dreigliedrige Congruenz $(\alpha\, \beta\, \gamma)$ besteht im allgemeinen aus ∞^3 Geraden, von denen eine und nur eine durch einen beliebigen Punkt P des R_4 geht. Sollen ∞^4 Congruenzgerade vorhanden sein, so können diese erstens eine dreifach ausgedehnte, notwendig lineare Punktmannigfaltigkeit M erfüllen; dann sind alle Complexe der Schaar speziell, und M ist ihre singuläre Mannigfaltigkeit (Nr. 13). Zweitens aber können die ∞^4 Congruenzgeraden den Raum R_4 erfüllen, und es geht dann durch jeden Punkt P ein lineares Büschel von ∞^1 Congruenzgeraden, mit andern Worten: Bedeuten $\eta_1 \ldots \eta_5$ die Coordinaten von P, so reduciren sich die drei linearen Gleichungen:

$$\sum \sum a_{ik} \eta_k \xi_i = 0, \quad \sum \sum \beta_{ik} \eta_k \xi_i = 0, \quad \sum \sum \gamma_{ik} \eta_k \xi_i = 0$$

auf nur 2 linear unabhängige. Für jedes Wertsystem $\eta_1 \ldots \eta_5$ gibt es also drei Grössen $\varrho, \varrho', \varrho''$, die nicht alle verschwinden und die Relationen

$$\sum^k (\varrho\, a_{ik} + \varrho'\, \beta_{ik} + \varrho''\, \gamma_{ik})\, \eta_k = 0 \quad (i = 1 \ldots 5)$$

erfüllen; d. h. jeder Punkt des R_4 ist entweder auf der singulären μ_2 eines speziellen Complexes der Schaar $(a\, \beta\, \gamma)$ gelegen, oder mit dem singulären Punkte eines Complexes der Schaar identisch. Diese Schaar muss also aus ∞^2 speziellen Complexen bestehen, da sonst die singulären μ_2 bezw. Punkte der ∞^2 Complexe nicht den ganzen Raum R_4 erfüllen könnten.

Die singulären μ_2 der ∞^2 speziellen Complexe müssen ferner eine Gerade g gemein haben. Liegt eine solche Congruenz vor, so geht in der That durch jeden Punkt P ein lineares Büschel von Congruenzgeraden, bestehend aus den Geraden, die g schneiden.

Da durch eine gegebene Gerade g nur drei linear unabhängige μ_2 hindurchgehen, so schliessen wir:

Ist eine Congruenz mehr als dreigliedrig, so kann durch einen beliebigen Punkt des R_4 höchstens **eine** Gerade der Congruenz hindurchgehen.

Soll also eine 4-gliedrige Congruenz ∞^4 Geraden enthalten, so erfüllen diese eine ebene Mannigfaltigkeit M; die ∞^3 Complexe der Schaar sind speziell, M ist ihre singuläre Ebene (Nr. 13).

Eine mehr als 4-gliedrige Congruenz kann aus höchstens ∞^3 Geraden bestehen.

20. Soll durch jeden Punkt des R_4 mindestens eine Gerade der viergliedrigen Congruenz $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ hindurchgehen, so schliesst man aus der Thatsache, dass die vier linearen Gleichungen

$$\sum\sum a_{ik}\,\eta_k\,\xi_i = 0\,..\,\sum\sum \delta_{ik}\,\eta_k\,\xi_i = 0$$

für jedes Wertsystem η linear abhängig sind, genau wie in der vorigen Nr., dass die Congruenz ∞^3 spezielle Complexe enthalten muss. Sie kann nun nicht aus ∞^3 speziellen Complexen bestehen, da in diesem Fall nur durch Punkte der singulären Ebene (Nr. 13), nicht aber durch einen beliebigen Raumpunkt, Congruenzgerade gingen. Also sind die aus den Elementen der Matrix:

$$\lambda\,a_{ik} + \mu\,\beta_{ik} + \nu\,\gamma_{ik} + \varrho\,\delta_{ik} \qquad (i, k = 1,..5)$$

gebildeten Pfaff'schen Aggregate $A_1\,..\,A_5$ (Nr. 14) entweder:

a) proportional, und unsere Congruenz besteht aus allen ∞^3 Geraden, die den gemeinsamen singulären Punkt S der Complexe unserer Schaar enthalten, oder

b) die A_i haben einen in $\lambda\,\mu\,\nu\,\varrho$ linearen homogenen Faktor L gemein. Die durch die Relation $L = 0$ definirte ∞^2-Schaar von speziellen Complexen kann ferner keine singuläre Ebene besitzen, da sonst der singuläre Punkt eines jeden in der Schaar $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ enthaltenen allgemeinen Complexes nach Nr. 13 identisch sein müsste mit dem gemeinsamen Schnittpunkt der singulären Mannigfaltigkeiten jener ∞^2 speziellen Complexe, also wiederum die Annahme a) vorläge; die singulären μ_2 unserer ∞^2 speziellen Complexe haben also eine Gerade g gemein.

Umgekehrt, wählt man im R_4 eine Gerade g beliebig, so gehen durch sie drei linear unabhängige μ_2; die durch diese bestimmten speziellen Complexe nennen wir β, γ, δ. Ist dann α ein beliebiger allgemeiner Complex, dessen singulärer Punkt S nicht auf g liegt, so erhält man die allgemeinste viergliedrige Congruenz von der Art b). Durch jeden Punkt des R_4 geht jetzt in der That eine und im allgemeinen nur eine Gerade der Congruenz $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$; die letztere besteht aus ∞^3 Geraden, die alle die Gerade g schneiden.

21. Wenn eine 5- oder 6-gliedrige Congruenz die Eigenschaft besitzen soll, dass durch einen beliebigen Raumpunkt **eine** Congruenzgerade geht, so müssen alle ihre Complexe den singulären Punkt S, die linearen Gleichungen (25) also eine Lösung gemein haben.

In der That, bezeichnen wir die betrachtete fünfgliedrige Congruenz mit $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon)$, und gehört die viergliedrige Congruenz $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ zu dem vorhin mit a) bezeichneten Typus, so muss der singuläre Punkt von ε mit dem gemeinsamen singulären Punkt S der Complexe α, β, γ, δ übereinstimmen, da ja der Annahme nach alle durch S gehenden Geraden auch in ε enthalten sind.

Ist aber die Congruenz $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ von der Art b) (Nr. 20), und verstehen wir unter $(\beta\,\gamma\,\delta)$ wie vorhin die aus ∞^2 speziellen Complexen bestehende Congruenz, unter α, ε allgemeine Complexe, so wird die Gerade g der Nr. 20 von allen ∞^3 Geraden der Congruenz $(\alpha\,..\,\varepsilon)$ geschnitten, also müssen durch jeden Punkt P von g zweifach unendlich viele Geraden der Congruenz $(\alpha\,\beta\,..\,\varepsilon)$, also auch der Congruenz $(\alpha\,\varepsilon)$ hindurchgehen, d. h. für jeden auf g gelegenen Punkt η reduciren sich die 2 linearen Gleichungen

$$\sum\sum \alpha_{ik}\,\eta_k\,\xi_i = 0, \quad \sum\sum \varepsilon_{ik}\,\eta_k\,\xi_i = 0$$

auf eine einzige; ein beliebiger Punkt P von g ist also entweder

1) mit dem singulären Punkt eines allgemeinen Complexes α' der Schaar $(\alpha\,\varepsilon)$ identisch, oder

2) auf der singulären Mannigfaltigkeit eines in der Schaar $(\alpha\,\varepsilon)$ enthaltenen speziellen Complexes ε' gelegen.

Im Falle 1) besitzt die Congruenz $(\alpha'\,\beta\,\gamma\,\delta)$ den gemeinsamen singulären Punkt P, und wir kommen auf den Fall zurück, der zu Anfang dieser Nr. erledigt wurde. Da es ferner in der Congruenz $(\alpha\,\varepsilon)$ nicht ∞^1 spezielle Complexe gibt, so wäre unter der Voraussetzung 2) die ganze Gerade g auf der singulären Mannigfaltigkeit eines speziellen Complexes ε' gelegen; ε' wäre also einerseits in der Congruenz $(\beta\ \gamma\ \delta)$, andererseits in der Congruenz $(\alpha\ \varepsilon)$ enthalten, was mit der linearen Unabhängigkeit unserer 5 Complexe unverträglich ist.

Da es ferner nach Nr. 18 nicht mehr als 6 linear unabhängige Complexe mit gemeinschaftlichem singulären Punkt geben kann, so existiren für eine mehr als sechsgliedrige Congruenz höchstens ∞^3 Raumpunkte, durch welche Congruenzgeraden hindurchgehen.

22. Schliesslich wollen wir noch die Frage erörtern, unter welchen Bedingungen eine mehr als dreigliedrige Congruenz dreifach unendlich viele Geraden enthält. Der Fall, dass diese Geraden den ganzen Raum R_4 durchziehen, wurde in den beiden vorhergehenden Artikeln erledigt. Es bleibt also nur noch die Möglichkeit zu diskutiren, dass die ∞^3 Congruenzgeraden eine dreifach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit, d. h. also eine „Fläche“ M erfüllen. Durch jeden Punkt P von M geht nun der Annahme nach ein System von ∞^1 Geraden, die auf M gelegen sind und ein lineares Büschel bilden, d. h. in einer durch P gehenden und auf M liegenden zweifach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeit π enthalten sind.

Es sind nun mindestens ∞^1 solcher Mannigfaltigkeiten π vorhanden; gibt es deren weniger als ∞^3, so müssen umgekehrt jeder Mannigfaltigkeit π mindestens ∞^1 auf ihr liegende Punkte P zugewiesen sein, in dem Sinne, dass alle durch einen solchen Punkt gehenden und auf π liegenden Geraden unserer Congruenz angehören. Dann aber sind alle Geraden, die in π liegen, Congruenzgerade; mithin existiren einfach unendlich viele Congruenz-μ_2, und wir kommen auf die in Nr. 16 studirten Fälle zurück. Unter den dort angegebenen Bedingungen gibt es in der That einfach unendlich viele Congruenz-μ_2, die ein Büschel mit gemeinsamer Axe g bilden und in der „ausgezeichneten Ebene M“ gelegen sind, und infolge dessen auch ∞^3 Congruenzgerade, die in M liegen und einen speziellen R_3-Complex mit der Direktrix g darstellen.

Gibt es dreifach unendlich viele Mannigfaltigkeiten π, so ist die Fläche M offenbar wiederum eine Ebene, und die ∞^3 Geraden der Congruenz bilden innerhalb derselben einen allgemeinen linearen R_3-Complex. Die Bilinearformen

$$(32) \qquad \sum_1^5 \sum_1^5 a_{ik}\,\xi_i\,\eta_k, \quad \sum_1^5 \sum_1^5 \beta_{ik}\,\xi_i\,\eta_k \ldots \sum_1^5 \sum_1^5 \varepsilon_{ik}\,\xi_i\,\eta_k$$

reduciren sich also, wenn die Ebene M durch die Gleichung $u_\xi = 0$ dargestellt wird, vermöge dieser Gleichung und der dazu congruenten $u_\eta = 0$ auf nur eine einzige Bilinearform in 4 Variabelnpaaren. Durch Bildung geeigneter Linearcombinationen kann man insbesondere erreichen, dass alle Bilinearformen (32) mit Ausnahme der ersten vermöge $u_\xi = 0$, $u_\eta = 0$ identisch verschwinden. Dann sind aber alle Complexe der Schaar $(\beta \,..\, \varepsilon)$ speziell und besitzen die singuläre Mannigfaltigkeit M (Nr. 13). Indem wir diese Sätze zusammenfassen, gelangen wir zu dem Resultat:

Damit eine r-gliedrige Congruenz aus dreifach unendlich vielen Geraden bestehe, ohne dass durch jeden Punkt des R_4 eine dieser Geraden hindurchgeht, ist notwendig und hinreichend, dass $r = 4$ oder 5 sei, dass ferner die Pfaff'schen Aggregate $A_1 \,..\, A_5$ einen Linearfaktor L gemein haben, dass endlich im Falle $r = 4$ die durch $L = 0$ definirte spezielle Congruenz eine singuläre Ebene besitze.

Aus dieser und den beiden vorhergehenden Nummern folgt ferner:

Eine vier- oder mehrgliedrige Congruenz kann höchstens zweifach unendlich viele Geraden enthalten, ausser wenn die Pfaff'schen Aggregate $A_1 \,..\, A_5$ proportional sind oder einen Linearfaktor gemein haben, oder identisch verschwinden. In den beiden ersten Fällen besteht die Congruenz aus ∞^3, in dem zuletzt genannten Fall aus ∞^4 Geraden.

II. Reduction der $n-5$-gliedrigen Pfaff'schen Systeme mit n Veränderlichen.

23. Die Theorie des linearen R_4-Complexes soll uns nun zur Beantwortung folgender Frage dienen:

Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass ein $n-5$-gliedriges Pfaff-sches System in n Variabeln

$$(33)\qquad d\,x_{5+h} = \sum_1^5{}^i\, a_{ih}(x_1\, x_2 \ldots x_n)\, d\,x_i \quad (h = 1, \ldots n-5)$$

sich auf eine Form mit nur $n-5+\varrho$ Differentialelementen

$$(34)\qquad d\,f_{\varrho+h} = \sum_1^{\varrho}{}^i\, F_{ih}\, d\,f_i \quad (h = 1, \ldots n-5)$$

bringen lasse, worin die Funktionen

$$f_1,\ f_2,\ \ldots f_{n-5+\varrho}$$

unabhängig sind?

Die Thatsache, dass das vorgelegte System (33) in der Form (34) geschrieben werden kann, ist nach Nr. 2 meiner früheren Arbeit[1]) mit der andern äquivalent, dass vermöge der Relationen

$$(35)\qquad \sum_1^5{}^i\, \xi_i \cdot A_i f_k = 0,\ \sum_1^5{}^i\, \eta_i \cdot A_i f_k = 0 \quad (k = 1, \ldots \varrho)$$

sämtliche Bilinearformen der Schaar:

$$(36)\qquad \sum_1^5{}^i \sum_1^5{}^k \left(\sum_1^{n-5}{}^h a_{ikh}\, \lambda_h\right) \xi_i\, \eta_k$$

identisch verschwinden; dabei ist gesetzt:

---

[1]) Diese Berichte 1900, pag. 276.

$$A_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^{n-5} {}^k a_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_{5+k}}$$

$$a_{ikh} = - a_{kih} = A_i a_{kh} - A_k a_{ih},$$

und die $\lambda_1 \dots \lambda_{n-5}$ bedeuten willkürliche Parameter.

Damit also eine Darstellung (34) möglich sei, ist notwendig und hinreichend:

1) dass überhaupt wenigstens ein System von ϱ congruenten Relationenpaaren

$$\begin{aligned} u_{i1} \xi_1 + \dots + u_{i5} \xi_5 = 0 \\ u_{i1} \eta_1 + \dots + u_{i5} \eta_5 = 0 \end{aligned} \quad (i = 1, \dots \varrho)$$

existire, vermöge deren die sämtlichen Bilinearformen der Schaar (36) identisch verschwinden;

2) dass sich unter den so definirten ϱ-gliedrigen Relationensystemen

$$(37) \qquad u_{i1} dx_1 + u_{i2} dx_2 + \dots + u_{i5} dx_5 = 0 \quad (i = 1 \dots \varrho)$$

wenigstens eines derart auswählen lasse, dass die Pfaff'schen Gleichungen (33) und (37) zusammen ein $n - 5 + \varrho$-gliedriges unbeschränkt integrables System bilden.

Mit $\varkappa$ bezeichnen wir fortan immer den „Charakter" des Pfaff'schen Systems (33), d. i. den Rang der aus 10 Spalten und $n - 5$ Zeilen bestehenden Matrix

$$(38) \qquad \left\| \begin{matrix} a_{121} & a_{131} & \dots & a_{451} \\ a_{122} & a_{132} & \dots & a_{452} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \end{matrix} \right\|,$$

also die Anzahl der linear unabhängigen Complexe in der Schaar (36); ferner mit 2σ den Rang der alternirenden 5-zeiligen Matrix

$$(39) \qquad \left\| \sum_1^{n-5} {}^h \lambda_h a_{ikh} \right\| \quad (i, k = 1, \dots 5),$$

d. h. die Ordnung der höchsten in dieser Matrix enthaltenen Hauptunterdeterminanten, die nicht für jedes beliebige Wertsystem $x_1 \dots x_n$, $\lambda_1 \dots \lambda_{n-5}$ verschwinden.

Da für die oben definirte Zahl ϱ nur die Werte 1, 2, 3 in Betracht kommen, so untersuchen wir zunächst die Annahme $\varrho = 1$.

24. Damit das gegebene Pfaff'sche System (33) auf die Form:

$$(40) \qquad d f_{h+1} = F_h \, d f_1 \quad (h = 1, \ldots n - 5)$$

gebracht werden könne, ist zunächst notwendig, dass $2\sigma = 2$ [1]), also alle Complexe der Schaar (36) speziell seien. Ist überdies $\varkappa = 1$, so kann, wie ich früher gezeigt habe[2]), das gegebene Pfaff'sche System immer, und zwar auf unendlich viele Arten, in die Form (40) umgesetzt werden.

Ist aber $\varkappa = 2$, so besitzt nach Nr. 13 die Complexschaar (36) eine singuläre Ebene, die durch die Relation

$$(41) \qquad u_1 \xi_1 + \ldots + u_5 \xi_5 = 0$$

dargestellt werde, und das Relationenpaar $u_\xi = 0$, $u_\eta = 0$ ist das einzige, vermöge dessen alle Bilinearformen der Schaar (36) identisch null sind. Zur Existenz einer reducirten Form (40) ist jetzt notwendig und hinreichend, dass das Pfaff'sche System

$$(42) \qquad \begin{cases} d x_{5+h} = \sum_1^5{}' a_{ih} \, d x_i \quad (h = 1 \ldots n - 5) \\ u_1 \, d x_1 + \ldots + u_5 \, d x_5 = 0 \end{cases}$$

unbeschränkt integrabel sei, mit andern Worten, dass in der Matrix:

$$(43) \qquad \begin{Vmatrix} 0 & u_{12} & \ldots & u_{15} & u_1 \\ u_{21} & 0 & \ldots & u_{25} & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot & \cdot \\ u_{51} & u_{52} & \ldots & 0 & u_5 \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_5 & 0 \end{Vmatrix} \quad (u_{ik} = A_i u_k - A_k u_i)$$

alle 4-reihigen Hauptunterdeterminanten verschwinden. Die u_i bedeuten dabei leicht zu bildende rationale Funktionen der Grössen a_{ikh}.

---

[1]) Diese Berichte 1900, pag. 275.

[2]) Leipziger Berichte 1898, pag. 207.

Ist $\varkappa = 3$, so besitzt die Congruenz (36) eine singuläre Ebene (41) oder nicht, je nachdem die $5\,(n-5)$ linearen Gleichungen

$$(44) \qquad \sum_1^5{}^k a_{ikh}\,\xi_k = 0 \quad (i = 1,..5;\ h = 1..n-5)$$

eine einzige oder zwei linear unabhängige Lösungen zulassen, je nachdem also die $5\,(n-5)$-spaltige und 5-zeilige Matrix, die durch Nebeneinandersetzen der $n-5$ alternirenden fünfzeiligen Schemata $\| a_{ik1} \|$, $\| a_{ik2} \|$, etc. entsteht, den Rang 4 oder den Rang 3 hat. Nur im ersteren Fall ist eine Darstellung (40) möglich, und zwar ist dazu weiterhin notwendig (und hinreichend), dass in der Matrix (43) wiederum alle vierreihigen Hauptunterdeterminanten Null sind.

Im Falle $\varkappa = 4$, $2\,\sigma = 2$ endlich gibt es immer eine singuläre Ebene (41), und man erhält für die Möglichkeit einer reducirten Form (40) dieselben Bedingungen wie soeben.

25. Wir diskutiren nunmehr die Bedingungen dafür, dass das vorgelegte $n-5$-gliedrige Pfaff'sche System (33) in der Form

$$(45) \qquad d\,f_{2+h} = F_{1h}\,d\,f_1 + F_{2h}\,d\,f_2 \quad (h = 1,..n-5)$$

geschrieben werden kann, und zwar werde zunächst $2\,\sigma = 2$ angenommen.

Unter der Voraussetzung $\varkappa = 1$ ist nach dem Anfang der vorigen Nr. eine Darstellung (45) immer in dem Sinne möglich, dass die Funktion f_2 ganz beliebig gewählt werden kann.

Wir betrachten nun zunächst die Annahme $\varkappa = 3$ oder 4, und fügen im ersten Fall noch ausdrücklich die Bedingung hinzu, dass die Congruenz (36) eine singuläre Ebene besitze (was für $\varkappa = 4$ immer stattfindet). Diese Ebene werde durch die Gleichung (41) dargestellt. Ist dann das Pfaff'sche System (42) unbeschränkt integrabel, und bedeutet f_2 eine willkürliche Funktion von $x_1 .. x_n$, so bilden die Gleichungen (42) zusammen mit $d\,f_2 = 0$ ebenfalls ein unbeschränkt integrables $n-3$-gliedriges System, und man schliesst, dass für das vorgelegte $n - 5$-gliedrige System (33) unbegrenzt viele Darstellungen (45) existiren, in denen f_2 willkürlich gewählt werden kann, worauf die übrigen Funktionen f_i auf eine und wesentlich nur eine Weise bestimmt sind.

Ist das Pfaff'sche System (42) nicht unbeschränkt integrabel, so schreiben wir es in der Form:

$$(46) \qquad d x_{4+h} = b_{1h} \, d x_1 + \ldots + b_{4h} \, d x_4 \quad (h = 1 \ldots n - 4).$$

Setzen wir dann:

$$B_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^{n-4}{}^h b_{ih} \frac{\partial f}{\partial x_{4+h}} \quad (i = 1, \ldots 4),$$

$$b_{ikl} \equiv - b_{kil} \equiv B_i b_{kl} - B_k b_{il},$$

so ist die Anzahl der linear unabhängigen bilinearen Formen des Systems

$$(47) \qquad \sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k b_{ikl} \, \xi_i' \, \eta_k' \quad (l = 1, \ldots n - 4)$$

gleich eins; denn vermöge der Relation (41) und der dazu congruenten verschwinden alle Bilinearformen der Schaar (36) identisch. Also hat man Identitäten der Form:

$$b_{ikl} \equiv \varrho_l \, b_{ik1} \quad (l = 2, 3, \ldots n - 4),$$

und der Rang der Matrix

$$(48) \qquad \| b_{ik1} \| \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

ist gleich 4 oder 2, je nachdem derjenige der Matrix (43) gleich 6 oder 4 ist.

Soll nun für das ursprünglich vorgelegte $n - 5$-gliedrige Pfaff'sche System eine Darstellung (45) existiren, so müssen nach Nr. 23 die Relationen

$$(49) \qquad \sum_1^5{}^i A_i f_1 \cdot \xi_i = 0; \quad \sum_1^5{}^i A_i f_2 \cdot \xi_i = 0$$

eine Congruenz-μ_2 der Complexschaar (36) darstellen, also mit den congruenten Relationen zusammen alle Bilinearformen (36) anulliren. Da aber nach Nr. 13 jede Congruenz-μ_2 in der singulären Ebene der Congruenz (36) enthalten ist, so muss

$u_\xi = 0$ eine Folge des Gleichungspaares (49) sein. Mit Rücksicht auf die vermöge (33) bestehende Identität

$$d f_i \equiv A_1 f_i \cdot d x_1 + \ldots + A_5 f_i \cdot d x_5$$

muss also auch das Pfaff'sche System (42) durch die Relationen

$$d f_1 = 0, \; d f_2 = 0, \ldots d f_{n-3} = 0$$

befriedigt werden.

Kann also das n — 5-gliedrige System (33) auf die Form (45) gebracht werden, so lässt sich das n — 4-gliedrige System (42) in der Gestalt:

$$(50) \qquad d f_{1+h} = \Phi_h \, d f_1 \quad (h = 1, \ldots n - 4)$$

schreiben, und offenbar gilt auch die Umkehrung dieses Satzes. Damit sich aber das System (42) auf die angegebene Gestalt reduciren lasse, ist nach meiner früheren Arbeit[1]) notwendig und hinreichend, dass der Rang der Matrix (48) gleich 2 sei, und es folgt:

Ist $2\sigma = 2$, $\varkappa = 3$ und besitzt die Congruenz (36) eine singuläre Ebene, oder ist $2\sigma = 2$, $\varkappa = 4$, so lässt sich das gegebene n — 5-gliedrige Pfaff'sche System dann und nur dann auf n — 3 Terme reduciren, wenn die 6-reihige alternirende Determinante (43) identisch verschwindet; es gibt dann unbegrenzt viele Darstellungen der geforderten Beschaffenheit.

26. Um die Voraussetzung $\varrho = 2$, $2\sigma = 2$ vollständig zu erledigen, bleiben nur noch die Annahmen $\varkappa = 2$, $\varkappa = 3$ zu diskutiren, letztere für den Fall, dass keine singuläre Ebene existirt. In beiden Fällen haben die singulären μ_2 der Complexe unserer Schaar (36) eine Gerade g, und mithin die linearen Gleichungen (44) zwei Lösungen ξ', ξ'' gemein, d. h. das Pfaff'sche System (33) gestattet[1]) die beiden unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$X' f \equiv \Sigma\, \xi_i' A_i f; \quad X'' f \equiv \Sigma\, \xi_i'' A_i f,$$

[1]) Leipziger Berichte 1898, pag. 207.

und die Gleichungen $X'f = 0$, $X''f = 0$ bilden ein zweigliedriges vollständiges System mit $n-2$ Integralen $y_1, \ldots y_{n-2}$. Führt man diese nebst zwei beliebigen andern Funktionen als neue Variabeln in das System (33) ein, so verwandelt sich letzteres in ein Pfaff'sches System, das nur mehr die Variabeln y enthält, also die Form

$$(51) \qquad d\,y_{3+h} = \sum_1^3{}^i c_{ih}(y_1 \ldots y_{n-2})\,d\,y_i \quad (h = 1 \ldots n-5)$$

annimmt. Wir fügen diesem System zwei beliebige Gleichungen

$$(52) \qquad d\,y_1 : d\,y_2 : d\,y_3 = \Phi_1 : \Phi_2 : \Phi_3$$

hinzu, worin die Φ irgend welche Funktionen der y bedeuten; stellen dann die Relationen

$$(53) \qquad \Psi_i(y_1 \ldots y_{n-2}) = \text{Const.} \quad (i = 1, \ldots n-3)$$

die allgemeinen Integralgleichungen des simultanen Systems (51) (52) dar, so kann das System (51) in der Form

$$d\,\Psi_{2+h} = \Phi_{1h}\,d\,\Psi_1 + \Phi_{2h}\,d\,\Psi_2 \quad (h = 1 \ldots n-5)$$

geschrieben werden, und man erhält für das ursprüngliche System (33) eine Darstellung mit $n-3$ Termen, indem man in die Ψ statt der y wieder die Variabeln x einführt und f_i statt Ψ_i schreibt.

Im Falle $\varkappa = 3$ erhält man durch diese Methode alle überhaupt möglichen Darstellungen (45). Denn ist (45) eine solche reducirte Form, so stellen die Relationen (49) eine Congruenz-μ_2 dar; da aber nach Nr. 13 jede Congruenz-μ_2 durch die Gerade g geht, so muss man auch haben:

$$\sum{}^i A_i f_k \cdot \xi_i' = 0, \quad \sum{}^i A_i f_k \cdot \xi_i'' = 0 \quad (k = 1, 2),$$

mithin genügen f_1 und f_2 dem vollständigen System $X'f = 0$, $X''f = 0$. Aus der Gleichberechtigung der $n-3$ Funktionen f_i folgt sonach, dass alle diese Funktionen von $y_1 \ldots y_{n-2}$ allein abhängen, dass also die Gleichungen $f_i = \text{const.}$ eine Schaar von ∞^{n-3} Integralcurven des Pfaff'schen Systems (51) definiren.

Für $\varkappa = 2$ aber existirt noch eine zweite Kategorie reducirter Formen mit $n - 3$ Termen, entsprechend der Thatsache, dass es in diesem Fall noch eine zweite Art von Congruenz-μ_2 gibt, diejenigen nämlich, die ohne die Gerade g zu enthalten auf der singulären Ebene $u_\xi = 0$ der Congruenz gelegen sind. Man erkennt nämlich leicht, dass die 6-reihige Determinante (43) in diesem Fall identisch verschwindet (vgl. die vorige Nr.).

27. Bei der Aufstellung der Bedingungen dafür, dass das Pfaff'sche System (33) sich unter der Annahme $2\sigma = 4$ auf eine reducirte Form mit $n - 3$ Differentialelementen bringen lasse, können wir wiederum den Fall $\varkappa = 1$ von vorneherein ausscheiden; denn unter dieser Voraussetzung gibt es unendlich viele Darstellungen

$$df_3 = F_1\, df_1 + F_2\, df_2;\; df_4 = 0, \ldots\, df_{n-3} = 0,$$

die durch Integration simultaner Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen gefunden werden[1]).

Ist $\varkappa \geqq 2$, so existirt nach den Artikeln 8—11 und 14—18 entweder überhaupt keine μ_2, die sämtlichen Complexen der Congruenz (36) genügt, oder es findet einer der 3 folgenden Fälle statt:

a) Es gibt eine und nur eine Congruenz-μ_2, die durch 2 Gleichungen der Form

$$(54) \qquad \sum_1^5 \mu_i\, \xi_i = 0, \quad \sum_1^5 \mu_i'\, \xi_i = 0$$

repräsentirt wird, worin die μ, μ' gewisse leicht zu bildende rationale Funktionen der a_{ikl} bedeuten.

b) Die Congruenz (36) besitzt eine „ausgezeichnete Ebene“:

$$(55) \qquad u_1\, \xi_1 + \ldots + u_5\, \xi_5 = 0,$$

worin die u rationale Funktionen der a_{ikl} bedeuten, und es gibt einfach unendlich viele Congruenz-μ_2, die alle in dieser Ebene liegen und ein Büschel mit der Axe g bilden.

---

[1]) Leipziger Berichte 1898, pag. 217 ff.

c) Die Complexe der Schaar (36) haben den singulären Punkt P gemein, und die (für $\varkappa \leq 4$ stets vorhandenen) Congruenz-μ_2 gehen alle durch P.

Für jeden dieser 3 Fälle existiren nach den citirten Artikeln mehrere Alternativen, deren jede durch ein System rationaler Bedingungsgleichungen zwischen den a_{ikl} charakterisirt ist. Damit für das vorgelegte Pfaff'sche System eine reducirte Form mit $n - 3$ Termen existire, ist notwendig, dass einer dieser 3 Fälle realisirt sei. Dazu treten die sogleich aufzustellenden Integrabilitätsbedingungen.

28. Im Falle a) ist eine Darstellung (45) dann und nur dann möglich, wenn das Pfaff'sche System (33) zusammen mit den Gleichungen $\mu_{dx} = 0$, $\mu'_{dx} = 0$ ein $n - 3$-gliedriges unbeschränkt integrables System bildet.

Unter der Annahme b) ist, wie man durch die Schlussweise der Nr. 25 erkennt, eine reducirte Form (45) dann und nur dann herstellbar, wenn das Pfaff'sche System

$$(56) \qquad \begin{cases} d\,x_{5+h} = \sum_1^5 {}^i\, a_{ik}\, d\,x_i \quad (h = 1\,..\,n-5) \\ u_1\, d\,x_1 + \,..\, + u_5\, d\,x_5 = 0 \end{cases}$$

auf die Form

$$(57) \qquad d\,f_{1+h} = F_h\, d\,f_1 \quad (h = 1, 2, \,..\, n-4)$$

gebracht werden kann. Nun enthält die ausgezeichnete Ebene (55) dreifach unendlich viele Congruenzgerade, die einen speziellen R_3-Complex bilden, und diese Thatsache findet darin ihren analytischen Ausdruck, dass die $n - 5$ alternirenden Bilinearformen in 4 Variabelnpaaren, die aus den Formen

$$(58) \qquad \sum_1^5 {}^i \sum_1^5 {}^k\, a_{ikh}\, \xi_i\, \eta_k \quad (h = 1\,..\,n-5)$$

entstehen, indem man ξ_5, η_5 mittels der Relationen

$$(59) \qquad u_\xi = 0, \; u_\eta = 0$$

eliminirt, einer unter ihnen proportional sind. Löst man also das $n - 4$-gliedrige Pfaff'sche System (56) in der Form

$$(60) \qquad d\,x_{4+h} = \sum_1^4{}^i\, b_{ih}\, d\,x_i \quad (h = 1\,..\,n-4)$$

auf, und bildet wie in Nr. 25 die Bilinearformen

$$(61) \qquad \sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k\, b_{ikl}\, \xi'_i\, \eta'_k \quad (l = 1\,..\,n-4),$$

so ist die Anzahl der linear unabhängigen unter ihnen gleich zwei oder gleich eins, letzteres offenbar dann und nur dann, wenn in der Matrix (43) der Nr. 25 alle vierreihigen Hauptunterdeterminanten identisch null sind. In dem letzteren Falle lässt sich das Pfaff'sche System (60) immer — und zwar auf unendlich viele Arten — in die Form (57)[1], also das System (33) auf die Gestalt (45) bringen. Im ersteren Fall können wir, um die Ideen zu fixiren, annehmen, dass die Bilinearform $\sum\sum a_{ik1}\,\xi_i\,\eta_k$ nicht vermöge (59) verschwindet, und infolge dessen werden dann die beiden ersten Bilinearformen (61) linear unabhängig. Damit dann das $n-4$-gliedrige System (60) eine Darstellung (57) zulasse, haben wir zunächst auszudrücken[2]), dass die 4-reihige Determinante

$$\| \lambda\, b_{ik1} + \mu\, b_{ik2} \| \quad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

oder, was dasselbe besagt, die 6-reihige alternirende Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdot & \lambda\, a_{151} + \mu\, u_{15} & u_1 \\ \lambda\, a_{211} + \mu\, u_{12} & \cdot & \lambda\, a_{251} + \mu\, u_{25} & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda\, a_{511} + \mu\, u_{51} & \cdot & 0 & u_5 \\ u_1 & \cdot & u_5 & 0 \end{vmatrix}$$

für beliebige Werte $x_1\,..\,x_n$, λ, μ identisch null sei. Diese letztere Determinante ist das Quadrat einer binären quadratischen Form in λ, μ, die offenbar für $\mu = 0$ verschwindet, da sich ja jede der Bilinearformen (58) vermöge $u_\xi = 0$, $u_\eta = 0$ auf die linke Seite einer speziellen Complexgleichung des R_3

[1]) Leipziger Berichte 1898, pag. 213 f.

[2]) Diese Berichte 1900, pag. 285.

reducirt. Wir erhalten sonach nur zwei unabhängige neue Bedingungen, von denen die eine das identische Verschwinden der Determinante (43) ausdrückt.

Sind diese Bedingungen erfüllt, und deuten wir $\xi'_1 \,..\, \xi'_4$ als homogene Punktcoordinaten im R_3, so sind alle R_3-Complexe der Schaar:

$$\sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k (\lambda\, b_{ik1} + \mu\, b_{ik2})\, \xi'_i\, \eta'_k = 0$$

speziell, und ihre Direktricen bilden ein Strahlenbüschel in einer Ebene:

$$v_1\, \xi'_1 + \,..\, + v_4\, \xi'_4 = 0,$$

worin die v rationale Funktionen der a_{ikh}, u_{ik} bedeuten. Die Gleichungen $v_{\xi'} = 0$, $v_{\eta'} = 0$ sind die einzigen, vermöge derer alle Bilinearformen (61) verschwinden, und es erübrigt schliesslich noch auszudrücken, dass die Pfaff'schen Gleichungen (56) mit der Gleichung

$$v_1\, d\,x_1 + \,..\, + v_4\, d\,x_4 = 0$$

zusammen ein n — 3-gliedriges unbeschränkt integrables System bilden. Sind auch diese Bedingungen erfüllt, dann und nur dann existirt für das vorgelegte n — 5-gliedrige Pfaff'sche System (33) eine und offenbar auch nur eine reducirte Form mit n — 3 Differentialelementen, welch' letztere man durch Integration des genannten unbeschränkt integrabeln Systems ermittelt.

29. Die Annahme c) der Nr. 27 erledigt sich durch die Bemerkung, dass in diesem Falle die linearen Gleichungen

$$\text{(62)} \qquad \sum_1^5{}^k a_{ikh}\, \xi_k = 0 \quad (i = 1, \,..\, 5;\ h = 1 \,..\, n - 5)$$

eine und nur eine Lösung ξ' besitzen, das Pfaff'sche System (33) also[1]) die infinitesimale Transformation:

$$\text{(63)} \qquad X'f \equiv \xi'_1\, A_1 f + \,..\, + \xi'_5\, A_5 f$$

---

[1]) Leipziger Berichte 1898, pag. 209.

gestattet. Sind $y_2, y_3, \ldots y_n$ die Integrale der partiellen Differentialgleichung $X'f = 0$, so lässt sich das System auf die Gestalt:

$$(64) \qquad d\,y_{5+h} = \sum_2^5{}' \, b_{ih}(y_2 \ldots y_n)\, d\,y_i \quad (h = 1 \ldots n - 5)$$

bringen, die nur mehr die Variabeln y enthält. Aus der Thatsache, dass alle μ_2, die der Congruenz (36) angehören, den Punkt P mit den Coordinaten $\xi'_1 \ldots \xi'_5$ enthalten, schliesst man genau wie in Nr. 26, dass die Funktionen $f_1 \ldots f_{n-3}$ einer jeden überhaupt möglichen reducirten Form mit $n - 3$ Termen von den Variabeln $y_2 \ldots y_n$ allein abhängen. Demnach kommt die Herstellung der allgemeinsten reducirten Form (45) darauf hinaus, das System (64), d. h. also ein n — 5-gliedriges Pfaff-sches System in $n - 1$ Variabeln auf eine Form mit $n - 3$ Differentialelementen zu reduciren, ein Problem, das ich in meiner früheren Abhandlung[1]) vollständig erledigt habe. Die Bedingungen für die Möglichkeit einer solchen Reduction erscheinen dabei zunächst in der Form rationaler Relationen zwischen den Coefficienten b_{ih} und ihren Ableitungen; es ist aber leicht, diese Gleichungen in solche umzusetzen, die nur die a_{ih} und ihre Derivirten enthalten[2]).

30. Der Fall $\varrho = 3$, d. h. die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass das vorgelegte n — 5-gliedrige Pfaff'sche System auf eine Form mit $n - 2$ Termen:

$$(65) \quad d\,f_{3+h} = F_{1h}\, d\,f_1 + F_{2h}\, d\,f_2 + F_{3h}\, d\,f_3 \quad (h = 1 \ldots n - 5)$$

gebracht werden kann, führt auf eine überaus grosse Zahl verschiedener Möglichkeiten. Wir begnügen uns daher, den Gang der Untersuchung zu skizziren; auch wollen wir nur solche

---

[1]) Diese Berichte 1900, pag. 2-8 ff.

[2]) Am einfachsten mittels der Bemerkung, dass identisch:

$$b_{ih}(y_2\, y_3 \ldots y_n) \equiv a_{ih}(x_1^0, y_2 \ldots y_n),$$

wenn die y die Hauptintegrale der Gleichung $X'f = 0$ hinsichtlich x_1^0 bedeuten.

Fälle behandeln, in denen eine Reduction auf weniger als $n-2$ Differentialelemente nicht möglich ist.

Nehmen wir daher zunächst wieder die Zahl $2\sigma = 2$ an, so haben wir nur die Fälle $\varkappa = 3$ und $\varkappa = 4$ unter der Voraussetzung zu betrachten, dass die spezielle Congruenz

$$(66) \qquad \sum_1^5{}^i \sum_1^5{}^k \left(\sum_1^{n-5}{}^h a_{ikh}\lambda_h\right)\xi_i\eta_k$$

eine singuläre Ebene $u_\xi = 0$ besitzt. Unter dieser Annahme aber lässt sich das $n-4$-gliedrige Pfaff'sche System (56), dessen bilineare Covarianten sich auf eine einzige reduciren, immer auf eine Form mit $n-2$ Differentialelementen bringen[1]), und dasselbe gilt sonach auch für das gegebene System (33). Auch erhält man, wenn $\varkappa = 4$, solcherweise alle möglichen Darstellungen (65), da ja unter den gemachten Voraussetzungen alle Geraden der Congruenz (66) in der singulären Ebene $u_\xi = 0$ gelegen sind (Nr. 13 und 19). Im Falle $\varkappa = 3$ dagegen existirt noch eine zweite Kategorie von Darstellungen (65); denn die dreigliedrige Congruenz (66) setzt sich jetzt aus zweierlei Arten von Geraden zusammen: aus denjenigen, die in der singulären Ebene liegen, und aus denjenigen, die durch den gemeinsamen Schnittpunkt P der singulären Mannigfaltigkeiten unserer ∞^2 speziellen Complexe hindurchgehen. Hat P die Coordinaten ξ', so haben die Gleichungen (62) die Lösung ξ_i' gemein, und das vorgelegte Pfaff'sche System gestattet die infinitesimale Transformation $X'f$ der Nr. 29, kann also in ein $n-5$-gliedriges System mit $n-1$ Variabeln verwandelt werden; reducirt man das letztere irgendwie auf $n-2$ Terme[2]), so erhält man für das erstere die allgemeinste Darstellung (65) der zweiten Art.

31. Indem wir uns nunmehr der Betrachtung des Falles $\varrho = 3$, $2\sigma = 4$ zuwenden, fassen wir zunächst diejenigen Fälle $\varkappa \geq 3$ ins Auge, in denen durch einen beliebigen Punkt des R_4 eine und nur eine Gerade der Congruenz (66) hindurchgeht

---

[1]) Leipziger Berichte 1898, pag. 213 f.

[2]) Vgl. die analoge Betrachtung der Nr. 26.

(Nr. 19, 20). In meiner früheren Abhandlung[1]) habe ich die Frage nach der Möglichkeit einer Darstellung (65) zurückgeführt auf die Untersuchung des Differentialsystems

$$(67) \qquad \frac{\partial x_{5+h}}{\partial u} = \sum_1^5{}^i a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u}; \quad \frac{\partial x_{5+h}}{\partial v} = \sum_1^5{}^i a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial v};$$

$$(68) \qquad \sum_1^5{}^i \sum_1^5{}^k a_{ikh} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v} = 0 \quad (h = 1 \,..\, n-5).$$

Infolge der gemachten Annahmen reduciren sich die Gleichungen (68), wenn man darin $\frac{\partial x_1}{\partial v} \,..\, \frac{\partial x_5}{\partial v}$ als lineare homogene Variable betrachtet, auf nur drei Gleichungen, die linear unabhängig sind, solange die $\frac{\partial x_i}{\partial u}$ nicht gewisse Bedingungsgleichungen erfüllen (Nr. 20 und 21). Wir dürfen dann, um die Ideen zu fixiren annehmen, dass die Gleichungen (67) (68) nach den Grössen

$$\frac{\partial x_{5+h}}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_{5+h}}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_4}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_5}{\partial v}$$

aufgelöst seien; und dieses System ist offenbar passiv[2]), da ja die beiden Ausdrücke für $\frac{\partial^2 x_{5+k}}{\partial u \, \partial v}$, die sich durch Derivation der Gleichungen (67) ergeben, wegen der Form des Differentialsystems (67) (68) identisch ausfallen.

Wie in Nr. 14 meiner früheren Arbeit[3]) schliessen wir jetzt, dass durch eine beliebige Integralcurve

$$x_i = \psi_i(u) \quad (i = 1, \,..\, n)$$

des vorgelegten Pfaff'schen Systems (33) eine und nur eine zweifach ausgedehnte Integralmannigfaltigkeit

$$x_i = \psi_i(u, v) \quad (i = 1, \,..\, n)$$

---

[1]) Diese Berichte 1900, pag. 276 ff.
[2]) a. a. O., pag. 278 ff.
[3]) a. a. O., pag. 288.

des Systems hindurchgeht. Wählt man also eine Schaar von ∞^{n-2} Integralcurven beliebig, und ermittelt die bezw. durch sie hindurchgehenden 2-fach ausgedehnten Integralmannigfaltigkeiten, so kann der Inbegriff der letzteren nach Elimination der Parameter u, v durch Gleichungen der Gestalt

$$f_i(x_1 x_2 \ldots x_n) = c_i \quad (i = 1 \ldots n-2)$$

definirt werden, womit eine Darstellung (65) des vorgelegten Pfaff'schen Systems gefunden ist. Mithin haben wir den Satz:

Gestattet ein $n-5$-gliedriges Pfaff'sches System in n Variabeln eine infinitesimale Transformation der Schaar (63), (d. h. haben die Complexe (66) den singulären Punkt gemein), oder ist $\varkappa = 4$ und der Fall b) der Nr. 20 realisirt, oder ist $\varkappa = 3$, so lässt sich das vorgelegte System stets auf unbegrenzt viele Arten in einer Form mit nur $n-2$ Differentialelementen schreiben.

Dasselbe gilt a fortiori für $\varkappa = 2$ oder 1; in diesen Fällen gibt es durch jede Integralcurve ∞^{∞} zweifach ausgedehnte Integralmannigfaltigkeiten.

Wenn das gegebene System eine infinitesimale Transformation der Form (63) zulässt, so erhält man die allgemeinste Darstellung (65) am einfachsten durch die Methode, die am Schluss der Nr. 30 angegeben wurde. In den beiden übrigen der oben genannten Fälle erfordert die Herstellung der reducirten Form die Integration des Differentialsystems (67) (68), ein Problem, das mit der Integration einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung mit einer Unbekannten und zwei Independenten zahlreiche Analogien aufweist[1]).

32. In allen denjenigen Fällen $\varkappa \geq 4$, die keiner der soeben behandelten Kategorien angehören, und in denen die Congruenz (66) aus dreifach unendlich vielen Geraden besteht, existirt nach Nr. 22 im Raum R_5 immer eine „ausgezeichnete" Ebene $u_5 = 0$, auf der die ∞^3 Congruenzgeraden liegen und

---

[1]) Die letztere Theorie ist in der ersteren als Spezialfall enthalten; vgl. diese Berichte 1900, pag. 290, Zeile 3—8.

einen allgemeinen oder speziellen R_3-Complex bilden; die u sind rationale Funktionen der a_{ikh}. Die Ermittelung der allgemeinsten reducirten Form mit $n - 2$ Termen kommt jetzt darauf hinaus, das in Nr. 28 angegebene $n - 4$-gliedrige Pfaff'sche System (56) auf die Gestalt

$$d f_{2+h} = \Phi_{1h}\, d f_1 + \Phi_{2h}\, d f_2 \quad (h = 1 \,.\,.\, n - 4)$$

zu bringen, und diese Darstellung ist nach Nr. 14 meiner früheren Arbeit[1]) immer möglich, da sich die Bilinearformen (66) vermöge $u_\xi = 0$, $u_\eta = 0$ auf eine einzige reduciren, und das Pfaff'sche System (56) sonach eine oder zwei linear unabhängige bilineare Covarianten besitzt, je nachdem der Rang der Matrix (43) gleich 2 oder grösser als 2 ist. Mithin können wir die Resultate dieser und der vorigen Nr. dahin resumiren, dass eine reducirte Form mit $n - 2$ Termen immer dann (und zwar auf unendlich viele Arten) hergestellt werden kann, wenn die Congruenz (66) aus dreifach unendlich vielen Geraden besteht.

33. In allen bisher nicht genannten Fällen, für die $\varkappa > 4$ ist, kann die Congruenz (66) nach Nr. 22 aus höchstens zweifach unendlich vielen Geraden bestehen. Nehmen wir also an, dass die Congruenz (66) mehr als dreigliedrig sei und ∞^2 Geraden enthalte, so werden die letzteren durch ein oder mehrere Gleichungstripel der Form:

$$\sum_1^5{}^k \mu_{ik}\, \xi_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

definirt sein, worin die μ_{ik} Funktionen von $x_1 \,.\,.\, x_n$ bedeuten, die ausserdem noch von zwei willkürlichen Parametern τ_1, τ_2 rational abhängen. Jedes dieser Tripel liefert, wenn man es zu dem vorgelegten Pfaff'schen System (33) hinzufügt, je ein $n - 2$-gliedriges Pfaff'sches System, und die so erhaltenen Systeme wollen wir bezw. mit S, S', S'' .. bezeichnen. Existirt nun für das vorgelegte System (33) eine reducirte Form mit

[1]) Diese Berichte 1900, pag. 288 f.

$n-2$ Termen, und sind $df_1, .. df_{n-2}$ die darin auftretenden Differentialelemente, so lassen sich die Grössen τ_1, τ_2 als Funktionen der x derart bestimmen, dass eines der Pfaff'schen Systeme $S, S', ..$, wenn man $\tau_1\, \tau_2$ durch ihre Ausdrücke ersetzt, unbeschränkt integrabel wird und die Funktionen $f_1, .. f_{n-2}$ zu Integralen hat. Um also die allgemeinste reducirte Form mit $n-2$ Termen zu finden, haben wir τ_1 und τ_2 in allgemeinster Weise so zu bestimmen, dass eines der Systeme $S^{(i)}$ unbeschränkt integrabel wird.

Zu diesem Zwecke fassen wir eines dieser Systeme, etwa S, ins Auge, betrachten es als $n-2$-gliedriges Pfaff'sches System in $n+2$ unabhängigen Variabeln:

$$x_1, x_2, .. x_n, \tau_1, \tau_2, \tag{69}$$

und untersuchen, ob es sich auf eine Form mit n Differentialelementen

$$df_i\,(x_1 .. x_n, \tau_1, \tau_2) \tag{70}$$

reduciren lässt, derart, dass unter den Relationen $f_i = c_i$ wenigstens zwei existiren, die nach τ_1 und τ_2 auflösbar sind. Da der Unterschied zwischen der Anzahl der Variabeln und der Anzahl der Gleichungen des Systems S gleich vier ist, so lässt sich dies Problem nach den Methoden behandeln, die ich in meiner früheren Arbeit[1]) entwickelt habe. Man hat darnach die Gleichungen S etwa nach $dx_3, dx_4 .. dx_n$ aufzulösen und die zugehörigen alternirenden Bilinearformen in den 4 Variabelnpaaren:

$$dx_1, \delta x_1;\ dx_2, \delta x_2;\ d\tau_1, \delta\tau_1;\ d\tau_2, \delta\tau_2$$

aufzustellen; diese Formen reduciren sich offenbar auf höchstens drei linear unabhängige. Sodann hat man das allgemeinste Relationenpaar

$$d\tau_1 = u_{11}\, dx_1 + u_{12}\, dx_2,$$
$$d\tau_2 = u_{21}\, dx_1 + u_{22}\, dx_2,$$

---

[1]) Diese Berichte 1900, pag. 288—298.

zu suchen, welches mit dem congruenten, in δx, $\delta \tau$ geschriebenen zusammen die genannten Bilinearformen anullirt, und im Verein mit S ein n-gliedriges unbeschränkt integrables System in den $n+2$ Variabeln (69) darstellt. Nach den citirten Untersuchungen ergeben sich dabei verschiedene Fälle, in denen die genannte Reduction von S möglich ist; jeder einzelne dieser Fälle ist durch je ein System von Bedingungsgleichungen zwischen den Grössen a_{iks}, μ_{ik} und ihren partiellen Ableitungen nach den x und τ charakterisirt. Wir wollen diese verschiedenen Relationensysteme mit Σ_1, $\Sigma_2, \ldots$ bezeichnen.

Ist eines der Systeme Σ_i identisch, also für beliebige Werte der $n+2$ Variabeln (69) erfüllt, dann und nur dann erhält man für S, also auch für das vorgelegte $n-5$-gliedrige Pfaff'sche System (33) eine reducirte Form mit n Termen (70). Wenn man also τ_1 und τ_2 aus zweien der Gleichungen $f_i = \text{const.}$ als Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ berechnet und in die genannte reducirte Form substituirt, so ergibt sich eine Darstellung mit $n-2$ Differentialelementen.

Ist keines der Systeme Σ_i identisch befriedigt, so ist die Reduction von S nicht möglich; man erkennt aber leicht, dass jedes Paar von Funktionen $\tau_1\, \tau_2$ der Variabeln x, welches in S eingesetzt dies System unbeschränkt integrabel macht, wenigstens eines der Gleichungssysteme Σ_i erfüllen muss.

Lassen sich also aus jedem der Systeme Σ_i durch Elimination der Variabeln τ_1, τ_2 Relationen in den x allein ableiten, so kann man mittels des gerade betrachteten Systems S überhaupt zu keiner reducirten Form des Pfaff'schen Systems (33) gelangen.

Reducirt sich eines der Systeme Σ_i auf zwei unabhängige Gleichungen, die τ_1 und τ_2 als Funktionen der x zu bestimmen gestatten, so ist noch zu untersuchen, ob diese Funktionen das System S unbeschränkt integrabel machen, und man erhält dann für die Gleichungen (33) eine ganz bestimmte Darstellung mit $n-2$ Termen.

Besteht endlich eines der Systeme $\sum_i$ aus nur einer Relation, die nach einer der Grössen τ_1, τ_2 auflösbar ist, etwa in der Form:

$$\tau_2 = \varphi(\tau_1, x_1 \,..\, x_n),$$

so verwandelt sich S, wenn man τ_2 durch φ ersetzt, in ein n — 2-gliedriges Pfaff'sches System $\bar{S}$ mit $n + 1$ Variabeln, welches jetzt in analoger Weise zu behandeln ist wie vorhin S.

Man hat zunächst zu untersuchen[1]), ob sich $\bar{S}$ auf eine Form mit $n - 1$ Termen

$$d\varphi_i(\tau_1, x_1 \,..\, x_n) \quad (i = 1 \,..\, n-1)$$

bringen lässt, derart, dass wenigstens eine der Gleichungen $\varphi_i =$ const. nach τ_1 auflösbar ist, und erhält wieder gewisse Systeme von Bedingungsgleichungen $\bar{\sum}_1$, $\bar{\sum}_2$, .., deren jedes, falls es identisch erfüllt ist, einen der Fälle charakterisirt, in denen die genannte Reduction möglich ist.

Gibt es für $\bar{S}$ eine solche reducirte Form, so findet man ganz ähnlich wie oben durch Elimination von τ_1 mittels einer der Gleichungen $\varphi_i =$ const. für das vorgelegte n — 5-gliedrige System eine Darstellung mit $n - 2$ Termen. Eine solche erhält man auch, wenn eines der Systeme $\bar{\sum}_i$ sich auf eine einzige Gleichung der Form

$$\tau_1 = \psi(x_1 \,..\, x_n)$$

reducirt, und wenn die so definirte Funktion τ_1 das System $\bar{S}$ unbeschränkt integrabel macht. Ist keine dieser beiden Voraussetzungen erfüllt, so liefert $\bar{S}$ überhaupt keine reducirte Form des gegebenen Pfaff'schen Systems.

Führt man die vorstehende Rechnung für jedes der Systeme S, S', .. durch, so gelangt man in allen Fällen entweder zu der Gesamtheit der überhaupt möglichen reducirten Formen, oder zu dem Nachweis der Unmöglichkeit einer solchen Darstellung.

---

[1]) Diese Berichte 1900, p. 283—285.

Der Fall, dass die Congruenz (66) nur aus einfach unendlich vielen Geraden oder aus einer endlichen Zahl von Geraden besteht, ist durch die Entwickelungen dieser Nr. miterledigt.

34. Als wichtigstes Ergebnis der vorliegenden Untersuchung wollen wir zum Schluss noch constatiren:

Die Reduction eines Pfaff'schen Systems, für das die Zahl der Variabeln um fünf grösser ist als die Zahl der Gleichungen, lässt sich immer auf die Reduction solcher Pfaff'scher Systeme zurückführen, für die der genannte Unterschied kleiner als fünf ist, mit einziger Ausnahme zweier in Nr. 31 behandelter Fälle.

Berichtigung. Zu dem Schlusssatz der Nr. 25 ist ergänzend nachzutragen, dass in dem ersten der beiden genannten Fälle die Determinante (43) stets identisch verschwindet, die Reduction auf $n-3$ Terme also immer möglich ist.

In meiner früheren Arbeit (diese Berichte Bd. 30 (1900), p. 300, Zeile 1 v. o. ist zu lesen: „in n Variabeln“ statt „in m Variabeln“.