Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1900. Heft I.

München.
Verlag der k. Akademie.
1900.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber die Reducirbarkeit eines Pfaff'schen Systems auf eine gegebene Zahl von Termen.

Von **Eduard von Weber.**

(*Eingelaufen 7. Juli.*)

1. Eines der zunächst sich darbietenden und wichtigsten Probleme in der allgemeinen Theorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen ist die Beantwortung der Frage: Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass ein gegebenes System von $n-m$ Pfaff'schen Gleichungen in n Variabeln:

$$(1)\qquad dx_{m+h} = \sum_{1}^{m}{}^{s}\, a_{sh}(x_1, \ldots x_n)\, dx_s \quad (h = 1, 2, \ldots n-m)$$

sich auf eine Form mit nur τ Differentialelementen:

$$(2)\qquad \sum_{1}^{\tau}{}^{s}\, F_{sh}\, df_s = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots n-m)$$

bringen lässt, wo $f_1, f_2, \ldots f_\tau$ unabhängige Funktionen der Variabeln $x_1 \ldots x_n$ bedeuten, und unter τ eine Zahl verstanden wird, die nicht kleiner als $n-m$ und nicht grösser als $n-2$ ist?

Wir wollen die Beantwortung dieser Frage „das Problem A" nennen.

Die Annahme $\tau = n-1$ führt auf eine triviale Aufgabe, die Annahme $\tau = n-m$ auf den Fall, dass das System (1) unbeschränkt integrabel ist; dazu ist bekanntlich notwendig und hinreichend, dass man identisch habe:

$$a_{iks} \equiv 0 \quad (i, k = 1, \ldots m; \;\; s = 1, \ldots n - m),$$

wenn gesetzt wird:

$$A_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^{n-m} {}^h a_{ih} \frac{\partial f}{\partial x_{m+h}}; \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

$$a_{iks} \equiv - a_{kis} \equiv A_i a_{ks} - A_k a_{is},$$

oder, für die unaufgelöste Form des Systems (1):

$$\sum_1^n {}^k \xi_{ik} \, d x_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n - m),$$

dass die alternirenden bilinearen Gleichungen:

$$\sum_1^n {}^k \sum_1^n {}^l \left(\frac{\partial \xi_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial \xi_{il}}{\partial x_k} \right) d x_k \, \delta x_l = 0$$

vermöge der Relationen:

$$\sum_1^n {}^k \xi_{ik} \, d x_k = \sum_1^n {}^k \xi_{ik} \, \delta x_k = 0 \quad (i = 1 \ldots n - m)$$

identisch stattfinden.

2. Es gilt zunächst der Satz: Damit sich das System (1) in der Form (2) darstellen lasse, ist notwendig und hinreichend, dass in der alternirenden Matrix:

$$(3) \quad \left\| \begin{matrix} 0, & \sum^s \lambda_s a_{12s}, & \ldots & \sum^s \lambda_s a_{1ms}, & A_1 f_1, & \ldots & A_1 f_\varrho \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \sum^s \lambda_s a_{m1s}, & \sum^s \lambda_s a_{m2s} & \ldots\ldots & 0, & A_m f_1 & \ldots & A_m f_\varrho \\ A_1 f_1, & A_2 f_1 & \ldots & A_m f_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ A_1 f_\varrho, & A_2 f_\varrho & \ldots & A_m f_\varrho & 0, & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|$$

alle $2\varrho + 2$-reihigen Hauptunterdeterminanten identisch, d. h. für jedes beliebige Werthsystem

$$x_1 \ldots x_n, \; \lambda_1 \ldots \lambda_{n-m}$$

verschwinden, wenn

$$\varrho = r - n + m$$

gesetzt wird.

In der That, aus unserer Annahme folgt, dass das Pfaff'sche System

(4) $$d x_{m+h} = \sum a_{ih}\, d x_i; \quad d f_1 = 0, \ldots d f_\varrho = 0$$

unbeschränkt integrabel sein muss; dazu ist nach dem oben gesagten notwendig und hinreichend, dass die $n - m$ bilinearen Gleichungen:

(5) $$\sum_1^m{}^i \sum_1^m{}^k a_{iks}\, d x_i\, \delta x_k = 0 \quad (s = 1 \ldots n - m)$$

vermöge der Relationen (4) und der dazu congruenten, in den δx geschriebenen, d. h. also vermöge der Gleichungen:

(6) $$\sum_1^m A_i f_k\, d x_i = 0, \quad \sum_1^m A_i f_k\, \delta x_i = 0 \quad (k = 1 \ldots \varrho)$$

identisch bestehen; dasselbe muss also auch für die Relation

$$\sum \sum \sum \lambda_s\, a_{iks}\, d x_i\, \delta x_k = 0$$

bei beliebigen Werten der λ stattfinden, und diese Bedingung findet bekanntlich[1]) ihren Ausdruck in dem Verschwinden aller $2\varrho + 2$-reihigen Determinanten in (3).

Umgekehrt, sind diese Bedingungen erfüllt, die Gleichungen (4) also unbeschränkt integrabel und $f_1, \ldots f_\varrho, f_{\varrho+1}, \ldots f_r$ ihre Integrale, so kann das System (1) augenscheinlich in der Form (2) geschrieben werden. Eine erste notwendige (aber, wie sich zeigen wird, keineswegs hinreichende) Bedingung für die Möglichkeit der Darstellung (2) ist also die, dass der Rang der Matrix

(7) $$\left\| \sum_1^{n-m}{}^s \lambda_s\, a_{iks} \right\| \quad (i, k = 1, \ldots m)$$

nicht grösser als 2ϱ sei.[2])

3. Die obigen Bedingungen können offenbar auch so formulirt werden:

---

[1]) Vgl. z. B. mein Buch: „Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem" Leipzig 1900, S. 308 ff.

[2]) Diese Bedingung wurde schon von H. Grassmann ausgesprochen; vgl. Herrn Engels Note in Grassmanns Werken Bd. I, Abt. 2, pag. 480.

Damit sich das Pfaff'sche System (1) auf eine Form mit nur τ Differentialelementen reduciren lasse, ist notwendig und hinreichend, dass

1) überhaupt wenigstens **ein** System von $\varrho = \tau - n + m$ congruenten Relationenpaaren

$$\xi_{1i}\, dx_1 + \ldots + \xi_{mi}\, dx_m = 0 \quad (i = 1 \ldots \varrho) \tag{8}$$

$$\xi_{1i}\, \delta x_1 + \ldots + \xi_{mi}\, \delta x_m = 0 \quad (i = 1 \ldots \varrho) \tag{9}$$

existire, vermöge dessen alle $n - m$ bilinearen Gleichungen (5) identisch erfüllt sind;

2) dass sich unter diesen Relationensystemen eines so auswählen lasse, dass die Gleichungen (1) (8) zusammen ein unbeschränkt integrables System bilden.

Bei der Lösung des Problems A handelt es sich natürlich darum, die Bedingungen für die Möglichkeit einer Darstellung (2) durch Gleichungen zwischen den Coefficienten a_{ik} des gegebenen Systems (1) allein auszudrücken, also die $f_1 \ldots f_\varrho$ aus den Bedingungen der vorigen Nr. zu eliminiren. Für die einfachsten Fälle $m = 3$ und $m = 4$ reicht dazu, wie wir sehen werden, der Satz dieser Nr. vollständig aus.

In allen Fällen erhält man aus der Forderung, dass in der Matrix (3) alle $2\varrho + 2$-reihigen Determinanten identisch verschwinden, in den Unbekannten $f_1 \ldots f_\varrho$ und den Independenten $x_1 \ldots x_n$ ein Differentialsystem 1. O., das auf seine Integrabilität hin zu untersuchen ist.

4. Statt dieses Differentialsystems wollen wir indes ein anderes betrachten, das für unsere Zwecke, insbesondere für die Behandlung des sogleich zu besprechenden „Problems B" besonders geeignet ist.

Aus der Darstellung (2) des Pfaff'schen Systems (1) folgt, dass die Relationen

$$f_1 = c_1,\ f_2 = c_2, \ldots f_\tau = c_\tau$$

für jedes Wertsystem der arbiträren Constanten c ein τ-gliedriges Integraläquivalent, also wenn wir die Ausdrucksweise der Geometrie in dem n-dimensionalen Punktraum $R_n(x_1 \ldots x_n)$ heranziehen, eine „$n - \tau$-dimensionale Integralmannigfaltigkeit," oder kurz eine „Integral-$M_{n-\tau}$" des Pfaff'schen Systems (1) darstellen. Durch jeden Punkt $x_1^0 \dots x_n^0$ geht eine und nur eine solche $M_{n-\tau}$ hindurch. Wird eine dieser $M_{n-\tau}$ durch die Relationen

$$(10) \qquad x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \dots u_\nu) \quad (i = 1 \dots n;\ \nu = n - \tau)$$

dargestellt, wo die u wesentliche unabhängige Parameter bedeuten, so genügen die x identisch den Differentialgleichungen

$$(11) \qquad \frac{\partial x_{m+h}}{\partial u_r} = \sum_1^m {}^i a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \quad (r = 1, \dots \nu;\ h = 1, \dots n - m)$$

und somit auch den folgenden:

$$(12) \qquad \sum_1^m {}^i \sum_1^m {}^k a_{ikh} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} = 0$$

$$(r, s = 1, 2, \dots \nu;\ h = 1, 2, \dots n - m),$$

die sich durch Derivation von (11) nach $u_1 \dots u_\nu$ und Vergleichung der links auftretenden Ableitungen $\frac{\partial^2 x_{m+h}}{\partial u_r \partial u_s}$ ergeben. Wir wollen das System (11) (12) mit S_ν bezeichnen. Umgekehrt liefert jedes Integral (10) des Differentialsystems S_ν von der Eigenschaft, dass in der Matrix

$$(13) \qquad \begin{Vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_r} & \frac{\partial x_2}{\partial u_r} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix} \quad (r = 1, \dots \nu)$$

nicht alle ν-reihigen Determinanten identisch verschwinden, eine Integral-$M_{n-\tau}$ von (1).

Ist ferner das Differentialsystem S_ν so beschaffen, dass durch jeden Punkt $x_1^0 \dots x_n^0$ eines gewissen n-dimensionalen (also nur durch Ungleichungen definirten) Gebietes des R_n wenigstens eine Integral-$M_{n-\tau}$ hindurchgeht, so lässt sich das Pfaff'sche System (1) in der Form (2) schreiben, und umgekehrt.

5. Aus der allgemeinen Theorie der Systeme partieller Differentialgleichungen [1]) ergeben sich jetzt nachstehende Resultate.

Fügt man zu dem System S_ν der Reihe nach diejenigen Gleichungen, die aus ihm durch wiederholte Derivation nach $u_1 \ldots u_\nu$ hervorgehen, so gelangt man nach einer endlichen Anzahl solcher Derivationen entweder (durch Elimination der partiellen Ableitungen der x) zu Widersprüchen, ev. Relationen in den Variabeln x allein, oder zu einem Differentialsystem, das durch Auflösung nach gewissen partiellen Ableitungen der x in ein „canonisches, passives System" Σ verwandelt werden kann. Als canonische Form [2]) kann man dabei immer eine solche wählen, die aus lauter Relationen der Form

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu} x_i}{\partial u_1^{\alpha_1}\, \partial u_2^{\alpha_2} \ldots \partial u_\nu^{\alpha_\nu}} = \varphi_{i,\alpha_1\ldots\alpha_\nu}\left(x_1, \ldots x_n, \ldots \frac{\partial^{\beta_1+\ldots\beta_\nu} x_k}{\partial u_1^{\beta_1} \ldots \partial u_\nu^{\beta_\nu}} \ldots\right)$$

mit folgenden Eigenschaften besteht: Keine der links vorkommenden Ableitungen tritt auf einer der rechten Seiten auf; für jede in $\varphi_{i,\alpha_1\ldots\alpha_\nu}$ vorkommende Ableitung $\dfrac{\partial^{\beta_1+\ldots+\beta_\nu} x_k}{\partial u_1^{\beta_1} \ldots \partial u_\nu^{\beta_\nu}}$ ist $\Sigma\beta < \Sigma\alpha$; gilt das Gleichheitszeichen, so ist $k \leqq i$, und im Falle $k = i$ die erste nicht verschwindende der Differenzen $\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 - \alpha_2 \ldots$ positiv. Bezeichnet man mit Riquier die auf den linken Seiten der Gleichungen Σ vorkommenden partiellen Ableitungen und alle die unbegrenzt vielen, durch Derivation nach $u_1 \ldots u_\nu$ daraus hervorgehenden Ableitungen als „principale", die Variabeln $x_1 \ldots x_n$ selbst und die noch übrigen partiellen Ableitungen der x als „parametrische" Grössen des Systems Σ, so findet die Passivität des letzteren darin ihren Ausdruck, dass man vermöge der Gleichungen Σ und der daraus durch unbegrenzte Derivation folgenden Relationen jede principale Ableitung auf eine und nur eine Weise durch die parametrischen Grössen allein ausdrücken kann.

[1]) Vgl. C. Riquier, Ann. éc. norm. 1893, p. 65, 123, 167; Par. sav. [étr.] 32; A. Tresse, Acta math. 18 p. 1 (1894) u. a.

[2]) Vgl. A. Tresse a. a. O.

Sind dann $u_1^0 \dots u_\nu^0$ beliebige Constante, so besitzt das Differentialsystem Σ — und infolgedessen auch das System S_ν — ein und nur ein System an der Stelle u^0 regulärer Integralfunktionen $x_1 \dots x_n$ von der Eigenschaft, dass sich die x und ihre sämtlichen parametrischen Ableitungen $\frac{\partial^{i+k+\dots+l} x_h}{\partial u_1^i \partial u_2^k \dots \partial u_\nu^l}$ vermöge der Gleichungen $u_1 = u_1^0 \dots u_\nu = u_\nu^0$ bezw. auf die willkürlich vorgeschriebenen „Anfangswerte"

$$x_1^0 \dots x_n^0, \dots \left(\frac{\partial^{i+k+\dots+l} x_h}{\partial u_1^i \partial u_2^k \dots \partial u_\nu^l}\right)_0 \dots$$

reduciren, vorausgesetzt, dass die rechten Seiten der Gleichungen Σ in der Umgebung dieser Anfangswerte regulär sind, und die n Potenzreihen

$$\sum \left(\frac{\partial^{i+k+\dots+l} x_h}{\partial u_1^i \dots \partial u_\nu^l}\right)_0 (u_1 - u_1^0)^i \dots (u_\nu - u_\nu^0)^l \text{ [1]}$$

einen gemeinsamen n-dimensionalen Convergenzbezirk besitzen.

Insbesondere besitzt also das System Σ wenigstens e i n e Integral-M_ν, die den willkürlich gewählten (nur durch Ungleichungen beschränkten) Punkt $x_1^0 \dots x_n^0$ enthält: hieraus und aus der vorigen Nr. folgt:

„Damit das Pfaff'sche System (1) sich in der Form (2) darstellen lasse, worin die r Funktionen $f_1 \dots f_r$ von einander unabhängig sind, ist notwendig und hinreichend, dass aus den Relationen S_ν und den Gleichungen, die hieraus durch unbegrenzt wiederholte Derivation nach $u_1 \dots u_\nu$ hervorgehen, weder das Verschwinden aller ν-reihigen Determinanten der Matrix (13), noch eine Relation zwischen den Variabeln $x_1 \dots x_n$ allein folge. Ob diese Bedingungen erfüllt sind, oder nicht, lässt sich in jedem einzelnen Fall durch eine endliche Zahl von Differentiationen und Eliminationen entscheiden.

[1] Die Summe erstreckt sich über alle parametrischen Ableitungen von x_h.

Bezeichnet man allgemein mit S_λ das System:

$$\frac{\partial x_{m+h}}{\partial u_r} = \sum_1^m {}^i a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \quad (r = 1 \,..\, \lambda;\ h = 1 \,..\, n - m)$$

$$\sum_1^m {}^i \sum_1^m {}^k a_{ikh} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} = 0$$

$$(r, s = 1, 2, \,..\, \lambda;\ h = 1, 2, \,..\, n - m),$$

und besitzt S_ν die im vorigen Satze genannte Eigenschaft, so gilt Analoges a fortiori für alle Systeme S_λ, wo $\lambda < \nu$.

Verlangt man, um die Ideen zu fixiren, dass die $n - \nu = \tau$ Funktionen f_i hinsichtlich $x_{\nu+1} \,..\, x_{\nu+2} \,..\, x_n$ unabhängig seien, so kann man in S_ν die Variabeln $x_1 \,..\, x_\nu$ statt $u_1 \,..\, u_\nu$ als Independente einführen.

6. Die Bedingungen der vorigen Nr. verlangen natürlich vor allem, dass nicht schon aus den Relationen (11) (12) selber das Verschwinden aller ν-reihigen Determinanten in (13) oder eine Relation zwischen den x allein hervorgehe, m. a. W., dass sich ν linear unabhängige Funktionensysteme

$$(14) \qquad \eta_{1s}, \eta_{2s}, \,..\, \eta_{ms} \quad (s = 1, 2, \,..\, \nu)$$

derart bestimmen lassen, dass die Beziehungen

$$(15) \qquad \sum_1^m {}^i \sum_1^m {}^k a_{ikh}\, \eta_{ir}\, \eta_{ks} = 0$$

$$(r, s = 1, 2, \,...\, \nu;\ h = 1, 2, \,..\, n - m)$$

erfüllt sind. Es ist dies nichts anderes als die in Nr. 3 unter 1) aufgestellte Forderung. In der That, gibt es $\nu = n - \tau = m - \varrho$ Grössensysteme (14) der genannten Eigenschaft, so besitzen die Gleichungen

$$\sum \eta_{is}\, \xi_i = 0 \quad (s = 1, 2, \,..\, m - \varrho)$$

genau ϱ linear unabhängige Lösungensysteme

$$\xi_{1i}, \xi_{2i} \,...\, \xi_{mi} \quad (i = 1, 2, \,..\, \varrho),$$

und die bilinearen Gleichungen (5) sind offenbar vermöge der ϱ linear unabhängigen Relationenpaare (8) (9) identisch erfüllt. Umgekehrt, ist letzteres der Fall, und bedeuten die Grössen

(14) die ν linear unabhängigen Lösungensysteme der Relationen:

$$\xi_{1i}\eta_1 + \ldots + \xi_{mi}\eta_m = 0 \quad (i = 1 \ldots \varrho),$$

so bestehen offenbar auch die Beziehungen (15), was zu zeigen war.

7. Bemerkenswert ist der Spezialfall, dass schon das Differentialsystem S_ν selber durch Auflösung nach gewissen Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial u_r}$ in ein canonisches passives System verwandelt werden kann. Dazu ist notwendig und hinreichend, dass das System S_ν und die Gleichungen, die hieraus durch unbegrenzte Derivation nach den u folgen, weder das Verschwinden aller ν-reihigen Determinanten (13) noch auch irgend eine nicht in S_ν enthaltene Relation zwischen den Grössen

$$x_i, \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \quad (i = 1, \ldots n;\ r = 1, \ldots \nu)$$

zur Folge haben. Alle Systeme $S_2, S_3, \ldots S_{\nu-1}$ besitzen dann a fortiori die analogen Eigenschaften.

8. Eine weitere Spezialisirung der Annahme der letzten Nr. ist für die allgemeine Theorie der partiellen Differentialprobleme von besonderem Interesse. Es seien für das System S_ν die Bedingungen der vorigen Nr. erfüllt, und es werde die Forderung hinzugefügt, dass aus S_ν und den aus ihm durch Derivationen folgenden Gleichungen keine andern Relationen in den Variabeln

$$(16) \qquad x_i, \frac{\partial x_i}{\partial u_1}, \frac{\partial x_i}{\partial u_2}, \ldots \frac{\partial x_i}{\partial u_{\nu-1}} \quad (i = 1 \ldots n)$$

folgen, als solche, die vermöge $S_{\nu-1}$ (vgl. Nr. 5) identisch bestehen, ebenso, dass aus dem System $S_{\nu-1}$ und den daraus durch unbegrenzte Derivation folgenden Gleichungen für die Variabeln

$$x_i, \frac{\partial x_i}{\partial u_1}, \ldots \frac{\partial x_i}{\partial u_{\nu-2}} \quad (i = 1 \ldots n)$$

keine andern Relationen hervorgehen können, als solche, die in $S_{\nu-2}$ enthalten sind, u. s. w., endlich dass S_2 zu S_1 in der analogen Beziehung stehe. Betrachten wir jetzt eine beliebige Integral-$M_{\nu-1}$ des Differentialsystems $S_{\nu-1}$:

$$(17) \qquad x_i = \psi_i(u_1\, u_2 \,.\,.\, u_{\nu-1}) \quad (i = 1, 2, \,.\,.\, n),$$

und beachten, dass jede partielle Ableitung der x, die in der canonischen Auflösung von $S_{\nu-1}$ parametrisch ist, infolge unserer Annahmen sich offenbar auch unter den parametrischen Ableitungen der canonischen Form von S_ν findet, so erschliesst man nach Nr. 5 die Existenz einer Integral-M_ν des Systems S_ν, die jene Integral-$M_{\nu-1}$ vollständig enthält. Eine Ausnahme würde nur dann eintreten, wenn für jedes Wertsystem der Grössen (16), das durch die Relationen (17) definirt wird, die rechten Seiten der canonischen Auflösung von S_ν aufhörten, sämtlich regulär zu sein. Da dies aber, wie man leicht erkennt, nur für besondere Integral-$M_{\nu-1}$ eintreten kann, die ausser $S_{\nu-1}$ noch andere partielle Differentialgleichungen erfüllen, so schliesst man:

Unter den zu Anfang dieser Nr. gemachten Voraussetzungen geht durch jede Integral-M_1 des gegebenen Pfaff'schen Systems im Allgemeinen wenigstens **eine** Integral-M_2, durch jede Integral-M_2 wenigstens **eine** Integral-M_3 etc., endlich durch jede Integral-$M_{\nu-1}$ wenigstens **eine** Integral-M_ν.

Die Aufstellung der hiezu notwendigen und hinreichenden Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten a_{ik} des Pfaff'schen Systems bezeichnen wir als das „Problem B.“ Es erhebt sich in jedem einzelnen Fall insbesondere die Frage nach der grössten Zahl ν von der angegebenen Beschaffenheit.

9. Damit die Forderungen der vorigen Nr. erfüllt seien, ist vor allem nötig, dass ausser den Bedingungen der Nr. 6 noch die folgenden erfüllt seien: Bezeichnet man allgemein mit G_λ das Relationensystem

$$\sum_1^m{}^i \sum_1^m{}^k a_{ikh}\, \eta_{ir}\, \eta_{ks} = 0$$

$$(r, s = 1, 2, \ldots \lambda;\ h = 1, 2, \ldots n - m),$$

so dürfen aus den Relationen G_ν durch Elimination der $\eta_{i\nu}$ nur solche Relationen folgen, die vermöge $G_{\nu-1}$ identisch erfüllt sind, ebenso dürfen aus $G_{\nu-1}$ durch Elimination der $\eta_{i,\nu-1}$ nur solche Gleichungen hervorgehen, die in $G_{\nu-2}$ enthalten sind, u.s.w.

In den einfachsten Fällen $m = 3$ und $m = 4$ wird sich herausstellen, dass diese Bedingungen zusammen mit denjenigen der Nr. 6 bereits die Passivität des Differentialsystems S_ν zur Folge haben.

10. In den Fällen $m = 1$ und $m = 2$ sind die Probleme A und B trivial. Wir betrachten daher zunächst das Pfaff'sche System:

$$(18)\quad dx_{3+h} = a_{1h}\, dx_1 + a_{2h}\, dx_2 + a_{3h}\, dx_3 \quad (h = 1, 2, \ldots n - 3),$$

und fragen, unter welchen Bedingungen sich dieses System auf eine Form mit $n - 2$ Differentialelementen bringen lässt.

Soll zunächst durch jede Integral-M_1 (oder „Integralcurve") des Systems eine Integral-M_2 gehen, so müssen die Gleichungen

$$(19)\quad \sum_1^3{}^i \sum_1^3{}^k a_{ikh}\, \xi_i\, \eta_k = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots n - 3)$$

für jedes Wertsystem $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ ein davon linear unabhängiges Lösungensystem $\eta_1\ \eta_2\ \eta_3$ zulassen, und dies kann offenbar nur dann eintreten, wenn sich die $n - 3$ bilinearen Gleichungen (19) auf eine einzige reduciren, d. h. wenn in der Matrix

$$(20)\quad \left\| \begin{matrix} a_{121} & a_{231} & a_{311} \\ a_{122} & a_{232} & a_{312} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|$$

alle zweireihigen Determinanten identisch verschwinden. Sind also etwa die Elemente der ersten Zeile nicht alle null, so muss man haben:

$$a_{ikh} = \varrho_h\, a_{ik1} \quad (h = 2, 3, \ldots n - m;\ i, k = 1, 2, 3).$$

Ich habe diese Annahme in einer früheren Abhandlung[1]) ausführlich untersucht. Es sei hier nur hervorgehoben, dass ein Pfaff'sches System (18) dieser Art unbegrenzt viele Integral-M_2 besitzt, und dass jede dieser M_2 von ∞^1 „charakteristischen Curven" erzeugt wird, die durch das simultane System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$dx_{3+h} = \sum a_{ih}\, dx_i;\quad dx_1 : dx_2 : dx_3 = a_{231} : a_{311} : a_{121}$$

definirt sind; man erhält die M_2, die durch eine beliebig vorgegebene Integral-M_1 des Systems (18) hindurchgeht, indem man alle diejenigen ∞^1 charakteristischen Curven, die bezw. von den ∞^1 Punkten der Integral-M_1 auslaufen, zu einer M_2 zusammenfasst. Dieser einfache Satz enthält als Spezialfall Cauchy's Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Independenten, sowie die Theorie der von Lie[2]) so genannten „Darboux'schen Systeme" erster Klasse, d. h. derjenigen partiellen Differentialprobleme in zwei Independenten, auf welche sich Cauchy's Methode übertragen lässt.

11. Soll das System (18) überhaupt eine Darstellung

$$df_h = F_h\, df \quad (h = 1, 2, \ldots n-3) \tag{21}$$

zulassen, so muss es nach Nr. 3 ein Funktionensystem $u_1\, u_2\, u_3$ geben, derart, dass die Gleichungen

$$\sum_1^3{}^i \sum_1^3{}^k a_{ikh}\, dx_i\, \delta x_k = 0 \quad (h = 1, \ldots n-3) \tag{22}$$

vermöge der Relationen

$$\begin{aligned} u_1\, dx_1 + u_2\, dx_2 + u_3\, dx_3 &= 0 \\ u_1\, \delta x_1 + u_2\, \delta x_2 + u_3\, \delta x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

erfüllt sind; also hat man

---

[1]) „Zur Invariantentheorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen", Leipziger Berichte 1898, p. 207.

[2]) Leipziger Berichte 1895, p. 71.

$$(24)\qquad \begin{vmatrix} 0 & a_{12h} & a_{13h} & u_1 \\ a_{21h} & 0 & a_{23h} & u_2 \\ a_{31h} & a_{32h} & 0 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ oder } a_{23h}\, u_1 + a_{31h}\, u_2 + a_{12h}\, u_3 = 0;$$

in der Matrix (20) müssen also alle dreireihigen Determinanten identisch verschwinden. Sind nun nicht alle zweireihigen Determinanten null, so besitzen die Gleichungen (24) eine und nur eine Auflösung, und es kommt noch die weitere Forderung hinzu, dass die Gleichungen (18) (23) zusammen ein unbeschränkt integrables System bilden. Man findet hierfür die Bedingung:

$$0 \equiv u_1 (A_2 u_3 - A_3 u_2) + u_2 (A_3 u_1 - A_1 u_3) + u_3 (A_1 u_2 - A_2 u_1).$$

Durch Betrachtung spezieller Fälle überzeugt man sich leicht, dass diese Bedingung nicht für jedes beliebige System (18) stattfindet; ist sie erfüllt, so erhält man durch Integration des Systems (18) (23) eine und wesentlich nur eine Darstellung (21).

Die Probleme A und B sind damit für $m = 3$ vollständig erledigt.

12. Soll das Pfaff'sche System

$$(25)\qquad dx_{4+h} = \sum_1^4 a_{ih}\, dx_i \quad (h = 1, 2, .. n-4)$$

auf eine Form

$$(26)\qquad df_h = F_h\, df \quad (h = 1, 2, .. n-4)$$

gebracht werden können, so muss zunächst der Rang der Matrix

$$(27)\qquad \left\| \sum_1^{n-4}{}^h a_{ikh}\, \lambda_h \right\| \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

gleich zwei sein. Deuten wir daher $\xi_1\, \xi_2\, \xi_3\, \xi_4$ und ebenso $\eta_1 .. \eta_4$ als homogene Punktcoordinaten eines R_3, so sind alle linearen Complexe des R_3, die in der Schaar:

$$(28)\qquad \sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k \left(\sum_1^{n-4}{}^h a_{ikh}\,\lambda_h\right) \xi_i\,\eta_k = 0$$

enthalten sind, speziell.

Es werde mit $\varkappa$ der Rang der Matrix

$$(29)\qquad \left\| \begin{matrix} . & . & . & . & . & . \\ a_{12h} & a_{13h} & a_{14h} & a_{23h} & a_{24h} & a_{34h} \\ . & . & . & . & . & . \end{matrix} \right\| \quad (h = 1, \ldots . n - 4)$$

bezeichnet. Ist dann $\varkappa = 1$, d. h. reducirt sich die Zahl linear unabhängiger Complexe der Schaar (28) auf eins, so kommen wir auf den Fall zurück, den ich in meiner pag. 284 citirten Arbeit betrachtet habe. Die Reduktion auf die Form (26) ist auf unendlich viele Arten möglich, und zwar gehen durch jede Integral-M_1 unbegrenzt viele Integral-M_2, durch jede der letzteren wenigstens eine Integral-M_3 hindurch. Umgekehrt, soll dies der Fall sein, so muss zwei der Rang von (27) und eins derjenige von (29) sein; in der That folgt nach Nr. 9 aus der gemachten Annahme, dass durch jeden Punkt ξ des R_3 wenigstens eine Gerade gehen muss, die allen Complexen der Schaar (28) gemeinsam ist, und durch jede solche Gerade eine Ebene, deren sämtliche Geraden den Complexen der Schaar gemeinsam sind, und dies kann offenbar nur eintreten, wenn alle Complexe der Schaar (28) speziell und identisch sind.

13. Ist der Rang der Matrix (27) gleich 2 und $\varkappa = 2$, d. h. enthält die Schaar (28) zwei und nur zwei linear unabhängige Complexe, so bilden die Leitgeraden der ∞^1 Complexe der Schaar ein ebenes Büschel. Ist

$$(30)\qquad w_1\,\xi_1 + w_2\,\xi_2 + w_3\,\xi_3 + w_4\,\xi_4 = 0$$

die Gleichung der Büschelebene, so ist das Relationenpaar

$$(31)\qquad w_1\,dx_1 + \ldots + w_4\,dx_4 = 0$$

$$(32)\qquad w_1\,\delta x_1 + \ldots + w_4\,\delta x_4 = 0$$

das einzige, vermöge dessen alle bilinearen Gleichungen:

$$(33)\qquad \sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k a_{ikh}\,dx_i\,\delta x_k = 0 \quad (h = 1, \ldots n - 4)$$

identisch erfüllt sind. Es gibt dann eine (und nur eine) Darstellung (26), wenn das Pfaff'sche System (25) (31) unbeschränkt integrabel ist, d. h. wenn in der Matrix:

$$\begin{Vmatrix} 0 & \beta_{12} & . & \beta_{14} & w_1 \\ . & . & . & . & . \\ \beta_{41} & \beta_{42} & . & 0 & w_4 \\ w_1 & w_2 & . & w_4 & 0 \end{Vmatrix} \quad (\beta_{ik} = A_i w_k - A_k w_i)$$

alle 4-reihigen Hauptunterdeterminanten verschwinden. Dieser Fall lässt sich leicht auf denjenigen der Nr. 11 zurückführen. Unter der gemachten Annahme gibt es nämlich ein Funktionensystem $\xi_1 \,..\, \xi_4$, das den Relationen

$$(34) \qquad \sum_1^4{}^i a_{ikh}\, \xi_i = 0 \quad (k = 1 \,..\, 4;\ h = 1, \,..\, n - 4)$$

genügt, indem ξ den gemeinsamen Schnittpunkt der Leitgeraden der Complexe (28) bezeichnet; also gestattet das Pfaff'sche System (25) die infinitesimale Transformation[1])

$$Xf \equiv \xi_1 A_1 f + \,..\, + \xi_4 A_4 f,$$

und wird, indem man die $n - 1$ Integrale der Gleichung

$$(35) \qquad \xi_1 A_1 f + \,..\, + \xi_4 A_4 f = 0$$

als neue Variable einführt, auf ein $n - 4$-gliedriges Pfaff'sches System in $n - 1$ Variabeln reducirt, für das also m den Wert 3 hat. Da die Anzahl unabhängiger bilinearer Covarianten durch die Transformation sich nicht ändert,[1]) so erhalten wir in der That den Fall der Nr. 11.

Ist 2 der Rang von (27) und $\varkappa = 3$, sind also 3 und nicht mehr linear unabhängige Complexe in der Schaar (28) vorhanden, so besteht letztere aus ∞^3 speziellen Complexen, deren Leitgeraden entweder durch einen Punkt $\xi_1 \,..\, \xi_4$ gehen, oder eine Ebene (30) erfüllen, je nachdem die Gleichungen (34) eine Lösung besitzen oder nicht. Im letzteren Falle ergeben sich für die Möglichkeit einer Darstellung (26) ganz analoge

---

[1]) S. meine Arbeit, Leipziger Berichte 1898, p. 209.

Bedingungen wie soeben; im ersteren Falle ist eine Darstellung (26) überhaupt nicht möglich.

Da nun unter der Annahme, dass 2 der Rang der Matrix (27) sei, in der Schaar (28) mehr als drei linear unabhängige Complexe nicht enthalten sein können, so sind die Probleme A und B für den Fall $m = 4$, $\nu = 3$ völlig erledigt.

14. Wir wenden uns zu dem Problem B unter der Annahme $m = 4$, $\nu = 2$; der Rang der Matrix (27) werde mit 2σ bezeichnet.

1) $2\sigma = 4$, $\varkappa = 1$. Nach meiner oben citirten Abhandlung kann das Pfaff'sche System (25) auf unbegrenzt viele Arten in der Form

$$d f_1 = F\, d f + \Phi\, d\varphi;\ d f_2 = 0, \ldots d f_{n-4} = 0$$

geschrieben werden, worin die n Funktionen

$$f, \varphi, f_1, f_2, \ldots f_{n-4}, F, \Phi$$

unabhängig sind; durch jede Integral-M_1 gibt es unbegrenzt viele Integral-M_2.

2) $2\sigma = 4$, $\varkappa = 2$. Die Schaar (28) enthält nur zwei (im allgemeinen verschiedene) spezielle Complexe. Durch jeden Punkt ξ, der nicht auf einer Leitgeraden eines der speziellen Complexe liegt, geht eine einzige, den Complexen (28) gemeinsame Gerade, so dass die Bedingungen der Nr. 9 erfüllt sind. Ferner hat das System S_2 hier die Form:

$$\frac{\partial x_{4+h}}{\partial u_r} = \sum_1^4{}^i a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \quad (h = 1, \ldots n-4;\ r = 1, 2) \tag{36}$$

$$\sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k a_{ikh} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_2} = 0 \quad (h = 1, \ldots n-4), \tag{37}$$

(wobei man von den Relationen (37) nur die zwei ersten beizubehalten braucht), und kann nach den Grössen

$$\frac{\partial x_3}{\partial u_2}, \ \frac{\partial x_4}{\partial u_2}, \ \frac{\partial x_{4+h}}{\partial u_1}, \ \frac{\partial x_{4+h}}{\partial u_2} \quad (h = 1 \ldots n-4)$$

aufgelöst werden; diese Auflösung ist canonisch, und offenbar passiv, da die zwei Werte, die sich für jede der Ableitungen $\frac{\partial^2 x_{4+h}}{\partial u_1 \partial u_2}$ durch Derivation von (36) ergeben, vermöge (37) identisch ausfallen. Dementsprechend geht durch jede Integralcurve des Pfaff'schen Systemes (25) mindestens eine, und, wie man leicht erkennt, auch nur eine Integral-M_2 hindurch. Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn die gegebene Integral-M_1, die wir durch Gleichungen der Form

$$x_i = \psi_i(u_1) \quad (i = 1 \,.\,.\, n)$$

definirt denken, ausser den Relationen

$$\frac{\partial x_{4+h}}{\partial u_1} = \sum_1^4{}^i a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u_1}$$

auch noch das eine oder das andere der Gleichungspaare:

$$\sum_1^4{}^k \omega_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial u_1} = 0; \quad \sum_1^4{}^k \bar{\omega}_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial u_1} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

erfüllt, wobei die beiden Relationenpaare

$$\sum{}^k \omega_{ik}\, \xi_k = 0, \quad \sum{}^k \bar{\omega}_{ik}\, \xi_k = 0 \quad (i = 1, 2)$$

bezw. die Direktricen der in der Schaar (28) enthaltenen zwei speziellen Complexe definiren sollen. Eine solche Integral-M_1 heisse eine „Charakteristik"; sie ist auf unbegrenzt vielen zweifach ausgedehnten Integralmannigfaltigkeiten des Pfaff'schen Systems (25) enthalten. Umgekehrt enthält jede Integral-M_2 je einfach unendlich viele Charakteristiken eines jeden der beiden Systeme.

Wie man sieht, ergibt sich hier eine Theorie, die den bekannten Sätzen über partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung mit zwei Independenten ganz analog ist, und auch wirklich nicht nur die zuletzt genannte Theorie, sondern auch diejenige der sog. Darboux'schen Systeme zweiter Klasse als Spezialfälle in sich schliesst. Indem wir wegen weiterer Einzelheiten teils auf eine frühere Abhandlung,[1]) teils auf eine an anderer Stelle zu gebende ausführliche Darlegung verweisen müssen, erwähnen wir hier nur noch, dass jedes $n-m$-gliedrige Pfaff'sche System in n Variabeln, dessen bilineare Covarianten sich auf genau $m-2$ linear unabhängige reduciren, zu einer analogen Theorie Anlass gibt, indem es im Allgemeinen eine und nur eine Integral-M_2 besitzt, die eine gegebene Integral-M_1 enthält.

Ist $2\sigma = 4$, so kann, falls die Bedingungen der Nr. 9 für $\nu = 2$ erfüllt sein sollen, $\varkappa$ nicht > 2 sein, da sonst nicht durch jeden Punkt des R_3 eine den Complexen (28) gemeinsame Gerade hindurchgehen könnte.

3) Es sei $2\sigma = 2$; dann ist $\varkappa \leqq 3$.

Ist $\varkappa = 1$, so kann die Zahl ν der Nr. 8 gleich 3 genommen werden.

Ist $\varkappa = 2$, so kann das Differentialsystem (36) (37), genau wie beim vorhergehenden Fall, ohne weiteres die canonische passive Form erhalten, und man schliesst, dass durch jede Integral-M_1 des Pfaff'schen Systems (25) im allgemeinen eine und nur eine Integral-M_2 geht. Diese Integralmannigfaltigkeit wird aber nunmehr durch Integration eines simultanen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen gefunden. In der That reducirt sich das Pfaff'sche System (25) unter der gemachten Annahme durch Einführung der Integrale der in Nr. 13 betrachteten Gleichung (35) als neuer Variabler auf ein System mit $n-1$ Variabeln, oder etwas anders ausgedrückt, die durch eine gegebene Integral-M_1 gehende Integral-M_2 wird erzeugt von den ∞^1 charakteristischen Curven der Gleichung (35), die bezw. von den ∞^1 Punkten der M_1 ausgehen.

Soll endlich im Falle $2\sigma = 2$, $\varkappa = 3$ durch jeden Punkt des R_3 eine gemeinsame Gerade der ∞^2 speziellen Complexe (28) gehen, so müssen die Leitgeraden der letzteren einen Punkt

[1]) „Ueber gewisse Systeme Pfaff'scher Gleichungen", Sitzungsber. der math.-phys. Classe der k. bayer. Akad. d. Wiss., Bd. XXV, p. 423 (1895).

$\xi_1 \dots \xi_4$, also die Gleichungen (34) auch jetzt wieder ein Lösungensystem gemein haben. Dann aber geht durch jede Integral-M_1 eine Integral-M_2, die genau wie vorhin von den charakteristischen Curven der partiellen Differentialgleichung (35) erzeugt wird.

Wir können die Ergebnisse dieser Nr. so zusammenfassen: Damit durch jede Integral-M_1 des Pfaff'schen Systems (25) eine Integral-M_2 hindurchgehe, ist notwendig und hinreichend, dass entweder in der Matrix (29) alle dreireihigen Determinanten identisch verschwinden, oder dass die Gleichungen (34) ein Lösungensystem besitzen.

15. Indem wir nun dazu übergehen, für die noch übrigen Fälle, die sich unter der Annahme $\nu = 2$, $m = 4$ darbieten, das Problem A, d. h. die Möglichkeit einer Darstellung

(38) $$d f_{4+h} = F_h \, d f + \Phi_h \, d \varphi \quad (h = 1, 2, \dots n-4)$$

des Pfaff'schen Systems (25) zu erörtern, betrachten wir zunächst

1) den Fall $2\sigma = 2$, $\varkappa = 3$ unter der Annahme, dass die Leitgeraden der ∞^2 speziellen Complexe der Schaar (28) nicht durch einen Punkt gehen, sondern in einer Ebene liegen, die im $R_3(\xi_1 \dots \xi_4)$ durch die Gleichung

$$w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 + w_3 \xi_3 + w_4 \xi_4 = 0$$

definirt werde. Dann sind die Relationen (37) mit den folgenden

$$\sum w_i \frac{\partial x_i}{\partial u_1} = 0, \quad \sum w_i \frac{\partial x_i}{\partial u_2} = 0$$

algebraisch äquivalent, d. h. jede Integral-M_2 des Pfaff'schen Systems (25) erfüllt auch die Pfaff'sche Gleichung

(39) $$w_1 \, d x_1 + \dots + w_4 \, d x_4 = 0.$$

Wenn wir von dem in Nr. 13 behandelten Fall absehen, dass das System (25) (39) unbeschränkt integrabel ist, und beachten, dass die bilinearen Gleichungen (33) vermöge der Relation (39) und der dazu congruenten identisch verschwinden, so erkennen wir in den Gleichungen (25) (39) ein $n-3$-gliedriges

Pfaff'sches System mit n Variabeln, dessen bilineare Covarianten sich auf eine einzige

$$\sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k \beta_{ik}\, d x_i\, \delta x_k = 0 \quad (\beta_{ik} = A_i w_k - A_k w_i)$$

reduciren. In Nr. 10 wurde gezeigt, dass dieses System, und mithin auch das gegebene Pfaff'sche System (25) sich in unbegrenzt vielen Weisen auf eine Form mit $n-2$ Differentialelementen reduciren lässt. Diese Reduction verlangt die Integration einer linearen homogenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die offenbar in der Gestalt:

$$(40) \qquad \begin{vmatrix} 0, & \beta_{12}, & \beta_{13}, & \beta_{14}, & w_1, & A_1 f \\ \beta_{21}, & 0, & \beta_{23}, & \beta_{24}, & w_2, & A_2 f \\ \beta_{31}, & \beta_{32}, & 0 & \beta_{34}, & w_3, & A_3 f \\ \beta_{41}, & \beta_{42}, & \beta_{43}, & 0, & w_4, & A_4 f \\ w_1, & w_2, & w_3, & w_4, & 0 & 0 \\ A_1 f, & A_2 f, & A_3 f, & A_4 f, & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

geschrieben werden kann; durch jede Integral-M_1 des Pfaff-schen Systems (25) (39) geht eine und nur eine, von den Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung (40) erzeugte Integral-M_2 hindurch.

2) Es sei $2\sigma = 4$, $\varkappa = 3$, und es werde ferner angenommen, dass die Leitgeraden der in der Schaar (28) vorhandenen ∞^1 speziellen Complexe eine allgemeine Regelschaar 2. Grads bilden. Die Leitschaar der letzteren besteht dann aus allen den Complexen (28) gemeinsamen Geraden, und möge durch die beiden Gleichungen:

$$(41) \qquad \begin{cases} \sum_1^4 \mu_i \xi_i + \varrho \left(\sum_1^4 \nu_i \xi_i\right) = 0; \\ \sum_1^4 \bar{\mu}_i \xi_i + \varrho \left(\sum_1^4 \bar{\nu}_i \xi_i\right) = 0 \end{cases}$$

dargestellt werden, wo ϱ einen Parameter bedeutet. **Es ist** leicht, die μ, ν, $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$ als Funktionen der a_{ik}, **auszudrücken,** doch ist die explicite Aufstellung der betreffenden Formeln für unsere Zwecke nicht nötig. Das allgemeinste Relationenpaar in $dx_1 \dots dx_4$, das mit dem congruenten zusammen alle bilinearen Gleichungen (33) identisch erfüllt, hat darnach die Form:

$$(42) \qquad \begin{cases} \sum \mu_i\, dx_i + \varrho\,(\sum \nu_i\, dx_i) = 0\,; \\ \sum \bar{\mu}_i\, dx_i + \varrho\,(\sum \bar{\nu}_i\, dx_i) = 0\,, \end{cases}$$

worin ϱ eine arbiträre Funktion der x bedeutet; diese ist jetzt so zu bestimmen, dass das $n-2$-gliedrige Pfaff'sche System (25) (42) unbeschränkt integrabel wird. Zu diesem Zweck betrachten wir die Gleichungen (25) (42) als ein Pfaff'sches System in $n+1$ Variabeln $\varrho, x_1 \dots x_n$. Die bilinearen Covarianten desselben reduciren sich auf die beiden folgenden:

$$\sum \sum (\mu_{ik} + \varrho\, \nu_{ik})\, dx_i\, \delta x_k + \sum \nu_i\,(d\varrho\, \delta x_i - \delta \varrho\, dx_i) = 0,$$

$$\sum \sum (\bar{\mu}_{ik} + \varrho\, \bar{\nu}_{ik})\, dx_i\, \delta x_k + \sum \bar{\nu}_i\,(d\varrho\, \delta x_i - \delta \varrho\, dx_i) = 0,$$

worin zur Abkürzung

$$A_i\, \mu_k - A_k\, \mu_i \equiv \mu_{ik} \quad \text{u. s. w.}$$

gesetzt wurde. Von diesen zwei Gleichungen ist keine eine Folge der andern; denn sonst wäre die Relation $\sum \nu_i\, \xi_i = 0$ eine Folge von $\sum \bar{\nu}_i\, \xi_i = 0$ und von (41), d. h. die Regelschaar (41) wäre ein Kegel oder ein ebenes Büschel.

Nehmen wir, um die Ideen zu fixiren, an, dass die Gleichungen (42), solange ϱ beliebig, nach dx_3, dx_4 auflösbar seien, so können wir das Pfaff'sche System (25) (42) in der Form schreiben:

$$(43) \qquad dx_{2+h} = b_{1h}\, dx_1 + b_{2h}\, dx_2 \quad (h = 1, \dots n-2),$$

wo die b_{ik} rationale Funktionen von ϱ bedeuten.

Setzen wir:

$$B_0 f \equiv \frac{\partial f}{\partial \varrho}; \quad B_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^{n-2}{}^h\, b_{ih} \frac{\partial f}{\partial x_{2+h}} \quad (i = 1, 2);$$

$$b_{0h} \equiv 0; \quad B_i\, b_{kh} - B_k\, b_{ih} \equiv b_{ikh} \quad (i, k = 0, 1, 2),$$

so verschwinden nach dem eben gesagten in der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} b_{011} & b_{121} & b_{201} \\ b_{012} & b_{122} & b_{202} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|$$

alle dreireihigen, aber nicht alle zweireihigen Determinanten identisch.

Um auf das Pfaff'sche System (43) die Methode der Nr. 11 anzuwenden, suchen wir zwei Funktionen v_1, v_2 der Variabeln x_i, ϱ so zu bestimmen, dass die Relation

$$d\varrho = v_1\, d x_1 + v_2\, d x_2 \tag{44}$$

mit (43) zusammen ein unbeschränkt integrables System liefert. Nach Nr. 11 müssen die v den Gleichungen

$$v_1\, b_{20h} + v_2\, b_{01h} = b_{12h} \quad (h = 1 \,..\, n-2) \tag{45}$$

genügen, und sind hierdurch offenbar als rationale Funktionen von ϱ eindeutig bestimmt. Ferner muss man haben:

$$(B_1 f + v_1 B_0 f,\ B_2 f + v_2 B_0 f) \equiv 0,$$

oder also:

$$\begin{gathered}(B_1 B_2) + v_2 (B_1 B_0) + v_1 (B_0 B_2) + \\ + B_0 f (B_1 v_2 - B_2 v_1 + v_1 B_0 v_2 - v_2 B_0 v_1) \equiv 0;\end{gathered} \tag{46}$$

da aber die drei ersten Terme wegen (45) eine identisch verschwindende Summe haben, so folgt:

$$B_1 v_2 - B_2 v_1 + v_1 B_0 v_2 - v_2 B_0 v_1 \equiv 0. \tag{47}$$

Es ist dies eine algebraische Gleichung in ϱ; ist sie für jedes beliebige ϱ erfüllt, dann und nur dann ist das Pfaff'sche System (43) (44) unbeschränkt integrabel. Bedeuten $f_1, f_2, \,..\, f_{n-1}$ seine Integrale, so erhält man für das gegebene Pfaff'sche System (25) zunächst eine Darstellung der Form

$$F_{1h}\, d f_1 + \,..\, + F_{n-1,h}\, d f_{n-1} = 0 \quad (h = 1, \,..\, n-4), \tag{48}$$

wo die F, f Funktionen von $\varrho, x_1 \,..\, x_n$ bedeuten, und das Zeichen d sich auf diese $n+1$ Variabeln bezieht. Da aber das unbeschränkt integrable System (43) (44) nach $d\varrho$ aufgelöst ist, so kann eine der Gleichungen $f_i = c$, etwa

$$f_{n-1}(\varrho, x_1 \,.\,. x_n) = c$$

(wo c eine arbiträre Constante bedeutet), nach ϱ aufgelöst werden. Substituirt man diesen Wert von ϱ in (48), so erhält man für das Pfaff'sche System (25) eine Form mit $n-2$ Differentialelementen, und es gibt, wie man sieht, einfach unendlich viele Darstellungen dieser Art.

Ist die Bedingung (47) nicht für jedes ϱ erfüllt, so kann die Grösse ϱ höchstens auf eine endliche Zahl von Arten als Funktion von $x_1, .\,. x_n$ so bestimmt werden, dass das Pfaff'sche System (25) (42) unbeschränkt integrabel wird. In der That, damit die Funktion ϱ das genannte System unbeschränkt integrabel mache, ist notwendig und hinreichend, dass man identisch habe:

$$B_1 b_{2h} - B_2 b_{1h} + B_0 b_{2h} \cdot B_1 \varrho - B_0 b_{1h} \cdot B_2 \varrho \equiv 0,$$

dass also ϱ den beiden nicht homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen

$$(49) \qquad B_1 \varrho = v_1, \quad B_2 \varrho = v_2$$

genüge. Setzt man nun

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x_i} = p_i; \quad B_1 \varrho - v_1 \equiv F; \quad B_2 \varrho - v_2 \equiv \Phi,$$

so muss die Funktion ϱ auch die folgende Identität befriedigen:

$$0 \equiv [F\,\Phi] \equiv \sum_1^n \frac{\partial F}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial \varrho}\right).$$

Diese Gleichung aber reducirt sich, wenn man die Relationen (49) berücksichtigt, auf eine in den p_i lineare Relation, die aus (46) dadurch entsteht, dass man darin $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ durch p_i und $B_0 f$ durch -1 ersetzt, m. a. W. auf die algebraische Gleichung (47).

Für jede einzelne Wurzel ϱ dieser Gleichung hat man jetzt zu prüfen, ob das System (25) (42) unbeschränkt integrabel wird; dabei kann indes auch noch die Annahme $\varrho = \infty$ in Betracht kommen, d. h. es können die Gleichungen

$$\sum \nu_i\, dx_i = 0\,, \quad \sum \bar{\nu}_i\, dx_i = 0$$

mit (25) zusammen ein unbeschränkt integrables System bilden, also zu einer Darstellung (38) Anlass geben.

3) Wir betrachten den Fall $2\,\sigma = 4$, $\varkappa = 3$ unter der Annahme, dass für die in $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3$ homogene quadratische Form, deren Quadrat mit der vierreihigen alternirenden Determinante (27) identisch ist, die Diskriminante identisch verschwindet, dass also die ∞^1 Geraden, die allen Complexen der Schaar (28) gemeinsam sind, in zwei ebene Büschel zerfallen. Ist das eine dieser Büschel durch das Gleichungspaar:

$$(50) \qquad \sum_1^4{}^i \mu_i\,\xi_i + \varrho \sum_1^4{}^i \nu_i\,\xi_i = 0\,, \quad \sum_1^4{}^i \bar{\mu}_i\,\xi_i = 0$$

definirt, so hat das allgemeinste Relationenpaar in $dx_1 \,..\, dx_4$, das mit dem congruenten zusammen alle bilinearen Gleichungen (33) erfüllt, die Gestalt:

$$(51) \qquad \sum \mu_i\, dx_i + \varrho \sum \nu_i\, dx_i = 0\,, \quad \sum \bar{\mu}_i\, dx_i = 0\,,$$

oder die analoge, aus dem Gleichungspaar des zweiten Büschels zu bildende Form. Damit dann eine Funktion ϱ der Variabeln $x_1 \,..\, x_n$ das $n-2$-gliedrige Pfaff'sche System (25) (51) unbeschränkt integrabel mache, ist notwendig und hinreichend, dass die beiden folgenden Identitäten stattfinden:

$$\begin{vmatrix} 0 & \bar{\mu}_{12} & \bar{\mu}_{13} & \bar{\mu}_{14}, & \mu_1 + \varrho\,\nu_1, & \bar{\mu}_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{\mu}_{41} & \bar{\mu}_{42} & \bar{\mu}_{43} & 0 & \mu_4 + \varrho\,\nu_4, & \bar{\mu}_4 \\ \mu_1 + \varrho\,\nu_1 & & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_2 & \bar{\mu}_3 & \bar{\mu}_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

$$(52) \qquad \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} & \mu_1 + \varrho\nu_1, & \bar{\mu}_1 \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & 0, & \mu_4 + \varrho\nu_4, & \bar{\mu}_4 \\ \mu_1 + \varrho\nu_1 & . & . & & 0 & 0 \\ \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_2 & \bar{\mu}_3 & \bar{\mu}_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

worin gesetzt ist:

$$A_{ik} \equiv \mu_{ik} + \varrho\,\nu_{ik} + \nu_k A_i\,\varrho - \nu_i A_k\,\varrho,$$

und die μ_{ik} u. s. w. die auf pag. 293 angegebene Bedeutung haben.

Die erste dieser Identitäten hat die Form

$$(53) \qquad A\,\varrho + B \equiv 0$$

wo A, B Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ bedeuten. Ist $A \equiv 0$, $B \equiv 0$, so liefert (52) für ϱ eine nichthomogene lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung, und jedes Integral derselben macht das Pfaff'sche System (25) (51) unbeschränkt integrabel; es gibt für das gegebene Pfaff'sche System (25) unbegrenzt viele Formen mit $n - 2$ Differentialelementen. Ist $A \not\equiv 0$, so hat man zu prüfen, ob die durch (53) definirte Funktion ϱ die Relation (52) erfüllt; ist dies der Fall, so erhält man für das Pfaff'sche System (25) eine Form mit $n - 2$ Termen. Schliesslich hat man, wenn $A \equiv 0$, $B \not\equiv 0$, noch zu untersuchen, ob nicht etwa die Gleichungen

$$\sum \nu_i\,dx_i = 0, \quad \sum \bar{\nu}_i\,dx_i = 0$$

mit (25) zusammen ein unbeschränkt integrables System liefern.

Dieselben Untersuchungen sind natürlich auch für die Definitionsgleichungen des andern der beiden Geradenbüschel durchzuführen.

4) Ist $2\sigma = 4$, $\varkappa = 4$, so können die Complexe der Schaar (28) ein Geradenbüschel (50) gemein haben, dann ist die weitere Diskussion dieselbe wie vorhin; oder sie haben zwei Gerade gemein, d. h. es gibt nur zwei verschiedene (oder coincidirende) Relationenpaare

$$(54) \qquad \sum \mu_i \, d x_i = 0, \; \sum \bar{\mu}_i \, d x_i = 0$$

die mit den kongruenten zusammen den bilinearen Gleichungen (33) genügen, also für das gegebene Pfaff'sche System (25) höchstens zwei verschiedene Formen mit $n - 2$ Differentialelementen. Ebenso erkennt man, dass im Falle $\varkappa = 5$ höchstens eine solche Darstellung, im Falle $\varkappa = 6$ aber überhaupt keine existirt.

Durch die vorstehenden Betrachtungen sind die Probleme A und B für $m = 3$ und $m = 4$ vollständig erledigt. Zugleich erkennt man, dass für diese Werte von m die in Rede stehenden Reduktionen stets auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückkommen, mit einziger Ausnahme des Falles Nr. 14, 2).

Die Behandlung der Fälle $m > 4$ erfordert ein genaueres Eingehen auf die Theorie der linearen Complexe in höheren Räumen, d. h. der Schaaren von alternierenden Bilinearformen mit mehr als vier Variabelnpaaren. Ich gedenke meine auf die Fälle $m = 5$ und $m = 6$ bezüglichen Untersuchungen demnächst an anderer Stelle ausführlich darzulegen.

Nachschrift.

Nach Ablieferung dieser Arbeit erhielt ich durch gütige Vermittelung der Herrn A. Mayer und F. Engel Kenntnis von einer Abhandlung des Herrn J. K. Russjan: „Sistema urawnenij Pfaff'a" (Odessa 1899). Herr Russjan versucht darin, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufzustellen, dass ein Pfaff'sches System (1) sich auf die Form (2) bringen lasse; doch sind die Resultate seiner Untersuchung unrichtig. In unserer Bezeichnungsweise lauten die Russjan'schen Bedingungen so: Es müssen in der Matrix $\left\| \sum^s a_{iks}\lambda_s \right\|$ alle $2\varrho + 2$-reihigen[1]) Hauptunterdeterminanten identisch verschwinden, und das System linearer homogener partieller Differentialgleichungen I. Ordnung, das erhalten wird, wenn man ausdrückt, dass die Matrix:

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 0 & \sum^s a_{12s}\lambda_s & .\,. & \sum^s a_{1ms}\lambda_s, & A_1 f \\ \sum^s a_{21s}\lambda_s & 0 & .\,. & \sum^s a_{2ms}\lambda_s, & A_2 f \\ . & . & .\,. & . & . \\ \sum^s a_{m1s}\lambda_s, & \sum^s a_{m2s}\lambda_s & .\,. & 0, & A_m f \\ A_1 f, & A_2 f, & .\,. & A_m f, & 0 \end{array} \right\|$$

höchstens den Rang 2ϱ besitzt, muss ϱ unabhängige Integrale $u_1, u_2, .\,. u_\varrho$ zulassen.

Die Notwendigkeit dieser Bedingungen leuchtet nach Nr. 2 unserer Arbeit unmittelbar ein; Herr Russjan glaubt aber, dass sie auch hinreichen, und dies ist keineswegs der Fall. In der That, wären die genannten Bedingungen hinreichend, so müsste man (wie es auch Herr Russjan thut, l. c. p. 109 ff.), folgern, dass bei geradem m jedes $n - m$-

[1]) $\varrho = \tau - n + m$.

gliedrige Pfaff'sche System in m Variabeln auf eine Form mit $n - \frac{1}{2}m$ Differentialelementen reducirt werden kann, da ja in diesem Fall $\varrho = \frac{1}{2}m$, mithin das obige Schema, als alternirende Matrix der ungeraden Ordnung $m + 1$, für jedes beliebige f einen Rang $< 2\varrho$ besitzt. Also müsste z. B. jedes $n - 4$-gliedrige Pfaff'sche System in n Variabeln auf $n - 2$ Differentialelemente reducirt werden können, was nach den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit nicht der Fall ist, schon deswegen nicht, weil mehr als vier lineare Complexe des R_3 im allgemeinen keine Gerade gemein haben.

Damit werden aber auch alle übrigen Schlüsse der Russjanschen Arbeit, soweit sie sich auf Systeme Pfaff'scher Gleichungen beziehen, illusorisch.