Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1900. Heft I.

München.
Verlag der k. Akademie.
1900.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Conforme Abbildung der Halbebene auf ein Flächenstück, welches von einer circularen Kurve dritter Ordnung oder einer bicircularen Kurve vierter Ordnung begrenzt wird.

Von **Johann Goettler.**

(*Eingelaufen 11. Mai.*)

(Mit Taf. II u. III.)

Im Jahre 1894 hat Herr Professor Lindemann eine Methode angegeben,[1]) nach der das Problem der conformen Abbildung für eine Kurve

$$f(z, z_1) = 0$$

erledigt werden kann, wenn sich eine rationale Funktion von x und y mit reellen Coeffizienten derartig bestimmen lässt, dass eine passende Potenz des Quotienten (Φ eine rationale Funktion)

$$\frac{\Phi(z, z_1)}{\dfrac{\partial f}{\partial z_1}}$$

eine rationale Funktion von z wird. Dabei ist bemerkt, dass dieser Fall unter andern bei der Ellipse und Parabel (von Schwarz behandelt), bei der Hyperbel (von Lindemann behandelt), ferner bei der circularen Kurve dritter Ordnung und der bicircularen Kurve vierter Ordnung vorliegt. Die beiden letztgenannten Fälle sollen hier behandelt werden.

[1]) Sitzungsberichte der physikal.-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr., 7. Juni 1894.

§ 1. Circulare Kurven dritter Ordnung.

I. Die Gleichung einer circularen Kurve dritter Ordnung kann bei bekannter Bezeichnungsweise geschrieben werden:

$$\alpha z^2 z_1 + \alpha_1 z_1^2 z + \beta z z_1 + \gamma z^2 + \gamma_1 z_1^2 + \delta z + \delta_1 z_1 + \varepsilon = 0. \quad (1)$$

Setzt man hierin $\alpha = A - i \cdot A'$, $\beta = 2B$, $\gamma = C - i \cdot C'$, $\delta = D - i \cdot D'$, $\varepsilon = E$, so erhält man die Gleichung der Kurve in gewöhnlichen Coordinaten:

$$2(x^2 + y^2)(Ax + A'y) + 2x^2(B + C) + 2y^2(B - C) + 4xyC' + 2Dx + 2D'y + E = 0.$$

Jede dieser Kurven besitzt zwei konjugiert imaginäre Asymptoten:

$$2(A \pm iA')(x \pm iy) + 2C \pm iC' = 0$$

und eine reelle Asymptote:

$$(A^2 + A'^2)(Ax + A'y) + A' \cdot [A^2(B - C) + A'^2(B + C) - AA'C'] = 0.$$

Figur 1 gibt eine circulare Kurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt; die X Achse ist die reelle Asymptote. Figur 2 ist eine solche Kurve mit Doppelpunkt; Figur 3 ein spezieller Fall von 2. Figur 4 eine circulare Kurve mit isoliertem Punkt ($x = y = 0$). Die reelle Asymptote ist in Figur 2, 3 und 4 als punktierte Gerade gezeichnet.

II. Aus der Gleichung $f(z, z_1) = 0$ der Kurve (1) folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz = -\frac{\partial f}{\partial z_1} \cdot dz_1$$

und hieraus:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(\frac{dz}{dZ}\right)\right] - \frac{d}{dZ}\left[\log\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)\right]$$
$$= \frac{d}{dZ}\left[\log\left(\frac{dz_1}{dZ}\right)\right] - \frac{d}{dZ}\left[\log\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right],$$

wenn Z eine reelle Grösse ist.

Die Funktion:

$$\Phi(z, Z) \equiv \frac{d}{dZ}\left[\log\left(\frac{dz}{dZ}\right)\right] - \frac{d}{dZ}\left[\log\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)\right]$$

ist also am Rande der Kurve $f = 0$ überall reell.

Aus Gleichung (1) ist

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 = \alpha^2 \cdot z^4 + z^3 \cdot (2\alpha\beta - 4\alpha_1\gamma) + z^2 \cdot (\beta^2 + 2\alpha\delta_1 - 4\alpha_1\delta - 4\gamma\gamma_1)$$
$$+ z \cdot (2\beta\delta_1 - 4\alpha_1\varepsilon - 4\gamma_1\delta) + (\delta_1^2 - 4\gamma_1\varepsilon). \qquad (2)$$

Setzt man $M = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2$ und $z' = \frac{dz}{dZ}$, so ist:

$$\Phi(z, Z) = \frac{d}{dZ}(\log z') - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dZ}(\log M). \qquad (3)$$

Die Pole der Funktion Φ sind erstens die Punkte $M = 0$, d. h. die Brennpunkte der Kurve $f = 0$. Ist $z = a$ ein solcher Punkt und $Z = A$ sein Bild, so ist in seiner Nähe:

$$z - a = (Z - A) \cdot \mathfrak{P}(Z - A).$$

Mithin ist Φ an dieser Stelle dargestellt durch:

$$\Phi(z, Z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{Z - A} + \mathfrak{P}(Z - A). \qquad (4)$$

Liegt ferner ein isolierter Punkt im Innern des abzubildenden Flächenstückes (Fig. 4), so ist an dieser Stelle, wenn $z = b$ der fragliche Punkt und $Z = B$ sein Bild ist:

$$z - b = (Z - B) \cdot \mathfrak{P}(Z - B);$$

Φ ist also in der Nähe dieses Punktes dargestellt durch:

$$\Phi(z, Z) = \frac{-1}{Z - B} + \mathfrak{P}(Z - B). \qquad (5)$$

Es ist nämlich vermöge $M = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2$ in diesem Falle $(z - b)$ ein quadratischer Faktor von M.

Enthält der Rand des Flächenstückes einen Doppelpunkt der Kurve und ist $\gamma \cdot \pi$ der Winkel der im Doppelpunkt gezogenen Tangenten, so ist in der Nähe dieses Punktes die Kurve durch die Tangenten dargestellt und somit nach dem Schwarz'schen Satz [1]) an dieser Stelle, wenn $z = c$ der Doppelpunkt und $Z = C$ sein Bild ist:

$$z - c = (Z - C)^\gamma \cdot \mathfrak{P}(Z - C).$$

Hieraus folgt, da $z - c$ ein quadratischer Faktor von M ist, wiederum:

$$\Phi(z, Z) = \frac{-1}{Z - C} + \mathfrak{P}(Z - C). \tag{6}$$

Liegt ferner der Punkt $z = \infty$ am Rande des Flächenstückes und ist $Z = D$ sein Bild, so hat die Entwicklung statt:

$$z = \frac{1}{Z - D} \cdot \mathfrak{P}(Z - D).$$

Es restiert hieraus:

$$\Phi(z, Z) = \mathfrak{P}(Z - D). \tag{7}$$

Dieser Punkt $z = \infty$ ist also als gewöhnlicher Punkt des Randes zu betrachten.

---

[1]) Unter dem „Schwarz'schen" Satz verstehen wir den von H. A. Schwarz in Crelle Bd. 70, p. 109 aufgestellten Satz: „Die allgemeinste Funktion, durch welche der in der Nähe des Scheitels $z = c$ liegende Teil der Fläche eines Winkels $\gamma \cdot \pi$ $[\gamma > 0]$ in der Ebene

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \quad [0 < \varphi \overline{<} \gamma \cdot \pi;\ 0 < r < r_0]$$

auf die Ebene $Z = R \cdot e^{i\Phi}$ $[0 < \Phi \overline{<} \pi]$ conform so abgebildet wird, dass in der Nähe dieser Stelle jedem Punkt z ein stetig mit ihm fortrückender Punkt Z entspricht, während die Werte $r = \mathrm{mod}\, c$, $Z = C$; $\varphi = 0$, $\Phi = 0$; $\varphi = \gamma \cdot \pi$, $\Phi = \pi$ einander entsprechen, ist in der Nähe dieses Punktes dargestellt durch:

$$z - c = (Z - C)^\gamma \cdot \mathfrak{P}(Z - C)\text{“}.$$

Hiebei bedeutet C eine reelle Zahl, $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe mit reellen Coeffizienten. Der Satz gilt zunächst für einen geradlinig begrenzten Winkel $\gamma \cdot \pi$ und lässt sich sofort nach Schwarz (l. c. pag. 116) auf einen von Kreisbögen gebildeten Winkel erstrecken.

Die in der genannten Arbeit gemachten Schlüsse reichen aber auch hin, wenn der Winkel $\gamma \cdot \pi$ von beliebigen Kurven begrenzt wird und die Darstellung auf die Umgebung des Punktes $z = c$, $Z = C$ sich beschränkt.

Der Punkt $z = \infty$ kann auch im Innern des Flächenstückes liegen; auch in diesem Fall ist:

$$\Phi(z, Z) = \mathfrak{P}(Z - D). \tag{7a}$$

Es kann (bei Kurven vierter Ordnung) auch der Fall eintreten, dass der Grad von M,[1]) welcher im allgemeinen der vierte ist, sich um ϱ Einheiten reduciert ($\varrho = 1, 2, 3, 4$). In diesem Fall gilt für den Punkt $z = \infty$, mag er nun im Innern oder am Rande des Flächenstückes liegen, die Entwicklung

$$\Phi(z, Z) = -\frac{\varrho}{2} \cdot \frac{1}{Z - D} + \mathfrak{P}(Z - D). \tag{8}$$

Hat $M = 0$ eine σ fache Wurzel $z = b$ und liegt dieser Punkt im Innern des Flächenstückes, so ist

$$M = (Z - B)^{\sigma} \cdot \mathfrak{P}(Z - B)$$

und deshalb an dieser Stelle

$$\Phi(z, Z) = -\frac{\sigma}{2} \cdot \frac{1}{Z - B} + \mathfrak{P}(Z - B). \tag{9}$$

Liegt aber der Punkt $z = b$ am Rande des Flächenstückes und ist der Winkel an jener Stelle $\beta \cdot \pi$, so ist $\Phi(z, Z)$ in der Nähe dieser Stelle dargestellt durch:

$$\Phi(z, Z) = \frac{(2 - \sigma) \cdot \beta - 2}{2} \cdot \frac{1}{Z - B} + \mathfrak{P}(Z - B). \tag{10}$$

Ist $R(Z)$ eine rationale Funktion von Z, welche für reelle Z reell ist und in bekannter Weise den Anforderungen der Gleichungen 4 bis 10 entsprechend gewählt ist, so ergibt sich die Abbildung des Flächenstückes auf die Halbebene vermittelt durch eine Gleichung von der Form:

$$\Phi(z, Z) = R(Z)$$

oder:

$$\int^{z} \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int^{Z} dZ \cdot e^{\int R(Z) \cdot dZ} + D' \tag{11}$$

D und D' sind Konstante, die Integrale als Funktionen der obern Grenzen zu betrachten. Sehr zu bemerken ist, dass beide Seiten der Gleichung (11) elliptische Integrale sind.

---

[1]) Confer Gleichung 25, pag. 176.

III. Wir betrachten die durch die Kurve (Fig. 1)

$$z^2 \cdot z_1 - z \cdot z_1^2 = 2\, a^3\, i$$

oder

$$(x^2 + y^2) \cdot y = a^3$$

zerschnittene Ebene. Die Rechnung ergibt:

$$M = z\,(z^3 - 8\, a^3\, i).$$

$M = 0$ hat also die vier Wurzeln $a_1 = 0$; $a_2 = -2\, a\, i$; $a_3 = a\,(i + \sqrt{3})$; $a_4 = a\,(i - \sqrt{3})$.

Entsprechen die Punkte $z = a_1$ und $Z = A$, $z = a_2$ und $Z = A'$ einander, so wird das unterhalb der Kurve befindliche Flächenstück auf die Halbebene abgebildet durch:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z(z^3 - 8a^3 i)}} = D \cdot \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)(Z-A')(Z-A_1')}} + D' \quad (12)$$

Durch dieselbe Gleichung wird das oberhalb der Kurve befindliche Flächenstück abgebildet, wenn $Z = A$ das Bild von $z = a_3$ und $Z = A'$ das des Punktes $z = a_4$ ist.

Um $\int \frac{dz}{\sqrt{M}}$ zu reducieren, setzt man

$$z = \frac{-2\, a\, i\,(1 - t)}{(\sqrt{3} + 1) + t(\sqrt{3} - 1)}$$

und findet:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z\,(z^3 - 8\, a^3\, i)}} = k \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - \varkappa^2 t^2)}},$$

wobei k eine Konstante und $\varkappa = i \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{3} + 3}}$ gesetzt ist.

IV. Als Beispiel einer circularen Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt betrachten wir die Kurve (Fig. 2)

$$z^2 z_1 + z\, z_1^2 + a\, i\,(z^2 - z_1^2) - a\, z\, z_1 = 0$$

oder:

$$2\, x\,(x^2 + y^2) - 4\, a\, x\, y - a\,(x^2 + y^2) = 0.$$

Derjenige Winkel der im Doppelpunkt gezogenen Tangenten, in welchem die Schleife liegt, sei $\gamma \cdot \pi$. Man findet:

$$M = z^2 \cdot [z^2 - 2\,a\,z\,(1 + 2\,i) - 3\,a^2].$$

$M = 0$ hat ausser dem Doppelpunkt die Wurzelpunkte $a_1 = a\,i$; $a_2 = 2\,a + 3\,a\,i$.[1])

Bei der in den Gleichungen 4 bis 10 angewendeten Bezeichnungsweise findet man folgende Abbildungen:

a) Das von der Schleife eingeschlossene Flächenstück mit dem Winkel $\gamma \cdot \pi$.

$$\int \frac{d\,z}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{d\,Z}{Z - C} + D' \tag{13}$$

oder:[2])

$$3a^2 + az(2i+1) - ai\sqrt{3} \cdot \sqrt{z^2 - 2a(2i+1)z - 3a^2} = D \cdot z \cdot (Z - C)^{-\gamma} \tag{13a}$$

b) Das Aeussere der Schleife — Winkel $(2 - \gamma) \cdot \pi$ — die Punkte a_1 und a_2 liegen im Innern.

$$J = D \cdot \int \frac{d\,Z}{(Z - C) \cdot \sqrt{(Z - A)(Z - A_1)(Z - A')(Z - A_1')}} + D', \tag{14}$$

wenn

$$J = \{3a^2 + az(2i + 1) - ai\sqrt{3} \cdot \sqrt{z^2 - 2az(2i + 1) - 3a^2}\} \cdot z^{-1}$$

gesetzt wird.

c) Der Raum auf der rechten Seite des Kurvenzuges — Winkel $\gamma \cdot \pi$ — der Punkt a_2 liegt im Innern.

$$J = D \cdot \int \frac{d\,Z}{(Z - C) \cdot \sqrt{(Z - A')(Z - A_1')}} + D' \tag{14a}$$

oder:

---

[1]) In den Figuren sind die Wurzelpunkte von $M = 0$ durch numerierte Punkte dargestellt.

[2]) Die Constante D der Gleichung (13a) ist natürlich eine andere als die der Gleichung (13); dasselbe gilt auch für die folgenden Gleichungen.

III. Wir betrachten die durch die Kurve (Fig. 1)

$$z^2 \cdot z_1 - z \cdot z_1^2 = 2 a^3 i$$

oder

$$(x^2 + y^2) \cdot y = a^3$$

zerschnittene Ebene. Die Rechnung ergibt:

$$M = z (z^3 - 8 a^3 i).$$

$M = 0$ hat also die vier Wurzeln $a_1 = 0$; $a_2 = -2 a i$; $a_3 = a (i + \sqrt{3})$; $a_4 = a (i - \sqrt{3})$.

Entsprechen die Punkte $z = a_1$ und $Z = A$, $z = a_2$ und $Z = A'$ einander, so wird das unterhalb der Kurve befindliche Flächenstück auf die Halbebene abgebildet durch:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z(z^3-8a^3i)}} = D \cdot \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)(Z-A')(Z-A_1')}} + D' \quad (12)$$

Durch dieselbe Gleichung wird das oberhalb der Kurve befindliche Flächenstück abgebildet, wenn $Z = A$ das Bild von $z = a_3$ und $Z = A'$ das des Punktes $z = a_4$ ist.

Um $\int \frac{dz}{\sqrt{M}}$ zu reducieren, setzt man

$$z = \frac{-2 a i (1 - t)}{(\sqrt{3} + 1) + t(\sqrt{3} - 1)}$$

und findet:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z (z^3 - 8 a^3 i)}} = k \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - \varkappa^2 t^2)}},$$

wobei k eine Konstante und $\varkappa = i \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{3} + 3}}$ gesetzt ist.

IV. Als Beispiel einer circularen Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt betrachten wir die Kurve (Fig. 2)

$$z^2 z_1 + z z_1^2 + a i (z^2 - z_1^2) - a z z_1 = 0$$

oder:

$$2 x (x^2 + y^2) - 4 a x y - a (x^2 + y^2) = 0.$$

Derjenige Winkel der im Doppelpunkt gezogenen Tangenten, in welchem die Schleife liegt, sei $\gamma \cdot \pi$. Man findet:

$$M = z^2 \cdot [z^2 - 2\,a\,z\,(1 + 2\,i) - 3\,a^2].$$

$M = 0$ hat ausser dem Doppelpunkt die Wurzelpunkte $a_1 = a\,i$; $a_2 = 2\,a + 3\,a\,i$.[1])

Bei der in den Gleichungen 4 bis 10 angewendeten Bezeichnungsweise findet man folgende Abbildungen:

a) Das von der Schleife eingeschlossene Flächenstück mit dem Winkel $\gamma \cdot \pi$.

$$\int \frac{d\,z}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{d\,Z}{Z - C} + D' \tag{13}$$

oder:[2])

$$3a^2 + az(2i+1) - ai\sqrt{3} \cdot \sqrt{z^2 - 2a(2i+1)z - 3a^2} = D \cdot z \cdot (Z - C)^{-\gamma} \tag{13a}$$

b) Das Aeussere der Schleife — Winkel $(2 - \gamma) \cdot \pi$ — die Punkte a_1 und a_2 liegen im Innern.

$$J = D \cdot \int \frac{d\,Z}{(Z - C) \cdot \sqrt{(Z - A)(Z - A_1)(Z - A')(Z - A_1')}} + D', \tag{14}$$

wenn

$$J = \{3a^2 + az(2i + 1) - ai\sqrt{3} \cdot \sqrt{z^2 - 2az(2i + 1) - 3a^2}\} \cdot z^{-1}$$

gesetzt wird.

c) Der Raum auf der rechten Seite des Kurvenzuges — Winkel $\gamma \cdot \pi$ — der Punkt a_2 liegt im Innern.

$$J = D \cdot \int \frac{d\,Z}{(Z - C) \cdot \sqrt{(Z - A')(Z - A_1')}} + D' \tag{14a}$$

oder:

---

[1]) In den Figuren sind die Wurzelpunkte von $M = 0$ durch numerierte Punkte dargestellt.

[2]) Die Constante D der Gleichung (13a) ist natürlich eine andere als die der Gleichung (13); dasselbe gilt auch für die folgenden Gleichungen.

$$J\cdot(Z-C)^\gamma = D\cdot\{2(C-A')(C-A_1')+(2C-A'-A_1')(Z-C) + 2\cdot\sqrt{(Z-A')(Z-A_1')(C-A')(C-A_1')}\}^\gamma \quad (14b)$$

d) Der Raum auf der linken Seite des Kurvenzuges — zwei Winkel $(1-\gamma)\cdot\pi$ — Punkt a_1 liegt im Innern.[1])

$$J = D\cdot\int\frac{dZ}{(Z-C)(Z-C')\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}} + D' \quad (15)$$

oder:

$$J = D\cdot\left[\frac{2c^2+b(Z-C)+2c\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}}{2c'^2+b'(Z-C')+2c\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}}\cdot\frac{Z-C'}{Z-C}\right]^{1-\gamma}, \quad (15a)$$

wenn

$$b = 2C - A - A_1, \qquad b' = 2C' - A - A_1,$$
$$c^2 = (C-A)(C-A_1), \quad c'^2 = (C'-A)(C'-A_1)$$

gesetzt wird.

e) Der Raum auf der linken Seite des Kurvenzuges, welcher die Schleife mit enthält — Winkel $(2-\gamma)\cdot\pi$.

$$J = D\cdot\int\frac{dZ}{(Z-C)\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}} + D' \quad (16)$$

oder:

$$J\cdot(Z-C)^{2-\gamma} = D\cdot\{2c^2+b(Z-C)+2c\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}\}^{2-\gamma} \quad (16a)$$

V. Eine andere Verteilung der Wurzelpunkte von $M=0$ gibt die Kurve (Fig. 3)

$$z^2 z_1 + z z_1^2 + a(z^2 + z_1^2) = 0$$

oder
$$x(x^2+y^2) + a(x^2-y^2) = 0.$$

Der Winkel der Tangenten im Punkt $z=0$ ist $\frac{1}{2}\cdot\pi$.

Es ist hier:

$$M = z^2\cdot(z^2 - 4az - 4a^2).$$

Die Wurzeln von $M=0$ sind ausser dem Doppelpunkt $z=0$ die Punkte $a_1 = 2a(1-\sqrt{2})$ und $a_2 = 2a(1+\sqrt{2})$.

$Z=A$ sei das Bild des Punktes $z=a_1$ und $Z=A'$ dasjenige von $z=a_2$.

[1]) $Z=A$ ist das Bild von $z=a_1$ und $Z=A'$ das von $z=a_2$. Dasselbe gilt bei den Gleichungen **14** und **14a**.

a) Das Innere der Schleife wird abgebildet durch:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z - C) \cdot \sqrt{(Z - A)(Z - A_1)}} + D' \tag{17}$$

Geht man durch die Transformation

$$Z = i \frac{\zeta - i}{\zeta + i}$$

von der positiven Halbebene Z auf das Innere des Einheitskreises der ζ Ebene über und lässt die Punkte $z = 0$ und $\zeta = -i$, ferner $z = a_1$ und $\zeta = 0$ einander entsprechen, so erhält man die Abbildung:

$$\frac{4a^2 + 2az - 2ai \cdot \sqrt{z^2 - 4az - 4a^2}}{z} = 2ai\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{\zeta} + i\sqrt{i}}{\sqrt{\zeta} - i\sqrt{i}}} \tag{17a}$$

b) Das Aeussere der Schleife — Winkel $\frac{3}{2} \cdot \pi$ — der Punkt a_2 liegt im Innern des Flächenstückes.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z - C) \cdot \sqrt{(Z - A')(Z - A_1')}} + D' \tag{18}$$

Ordnet man die Punkte $z = 0$, $\zeta = -i$ und $z = a_2$, $\zeta = 0$ beim Uebergang auf das Innere des Einheitskreises der ζ Ebene einander zu, so ergibt sich:

$$\frac{4a^2 + 2az - 2ai \cdot \sqrt{z^2 - 4az - 4a^2}}{z} = -2ai\sqrt{2} \cdot \left[\frac{\sqrt{\zeta} + i\sqrt{i}}{\sqrt{\zeta} - i\sqrt{i}}\right]^{\frac{3}{2}} \tag{18a}$$

c) Der Raum rechts vom Kurvenzug — Winkel $\frac{1}{2} \cdot \pi$ — Punkt a_2 im Innern.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z - C)\sqrt{(Z - A')(Z - A_1')}} + D' \tag{19}$$

Geht man wieder auf den Einheitskreis über und ordnet die Punkte $z = 0$, $\zeta = -i$ und $z = a_2$, $\zeta = 0$ einander zu, so ist die Abbildung gegeben durch:

$$\frac{4a^2 + 2az - 2ai \cdot \sqrt{z^2 - 4az - 4a^2}}{z} = -2ai\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{\zeta} + i\sqrt{i}}{\sqrt{\zeta} - i\sqrt{i}}} \tag{19a}$$

d) Der Raum links vom Kurvenzug — zwei Winkel $\frac{1}{2} \cdot \pi$.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C)(Z-C')} + D'. \tag{20}$$

oder:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \sqrt{\frac{Z-C'}{Z-C}}. \tag{20a}$$

Entsprechen die Punkte $z = 0$, $\zeta = +1$ und $z = 0$, $\zeta = -1$ einander, indem $z = 0$ einmal als obere, einmal als untere Ecke des Flächenstückes betrachtet wird, so erhält man:

$$\frac{4a^2 + 2az - 2ai \cdot \sqrt{z^2 - 4az - 4a^2}}{z} = D \cdot \sqrt{\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}}. \tag{20b}$$

Die Constante D ist erst bestimmt, wenn ein negativ reelles z einem rein imaginären ζ zugeordnet wird.

e) Der Raum links vom Kurvenzug, welcher die Schleife mit enthält — Winkel $\frac{3}{2} \cdot \pi$ — Punkt a_1 im Innern.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C) \cdot \sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}} + D'. \tag{21}$$

Unter Zuordnung von $z = 0$, $\zeta = -i$ und $z = a_1$, $\zeta = 0$ erhält man:

$$\frac{4a^2 + 2az - 2ai \cdot \sqrt{z^2 - 4az - 4a^2}}{z} = 2ai\sqrt{2} \cdot \left[\frac{\sqrt{\zeta} + i\sqrt{i}}{\sqrt{\zeta} - i\sqrt{i}}\right]^2 \tag{21a}$$

Zu bemerken ist, dass diese spezielle soeben betrachtete Kurve durch die Transformation $t = \frac{z^2}{z+a}$ in die reelle Achse der t Ebene übergeführt wird und somit die Abbildungen V auch auf anderem bekannten Weg erhalten werden können. Im allgemeinen aber ist dies nicht der Fall.

VI. Als circulare Kurve dritter Ordnung mit isoliertem Punkt betrachten wir die Kurve (Fig. 4).

$$z^2 z_1 + z z_1^2 + a i (z^2 - z_1^2) - 4 a z z_1 = 0$$

oder:

$$x(x^2 + y^2) - 2axy - 2a(x^2 + y^2) = 0.$$

Es ist hier:

$$M = z^2 \cdot [z^2 - 4\,a\,z\,(2+i) + 12\,a^2].$$

Die in Betracht kommenden Brennpunkte sind nebst dem isolierten Punkt

$a_1 = 2a(2+\sqrt{2}) + 2ai(1+\sqrt{2})$ und $a_2 = 2a(2-\sqrt{2}) + 2ai(1-\sqrt{2})$;

beide Punkte liegen rechts der Kurve.

a) Ist $Z = B$ das Bild des Punktes $z = 0$, so wird das Flächenstück links vom Kurvenzug abgebildet durch:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-B)(Z-B_1)} + D' \tag{22}$$

oder:

$$\frac{6a-(2+i)z+\sqrt{3}\cdot\sqrt{z^2-4az(2+i)+12a^2}}{z} = D \cdot \frac{Z-B_1}{Z-B} \tag{22a}$$

b) Sind $Z = A$ und $Z = A'$ die Bilder der Punkte $z = a_1$ und $z = a_2$, so wird die Abbildung des Flächenstückes rechts vom Kurvenzug vermittelt durch:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)(Z-A')(Z-A'_1)}} + D'. \tag{23}$$

§ 2. Bicirculare Kurven vierter Ordnung.

I. Die Gleichung einer bicircularen Kurve vierter Ordnung ist:

$$k z^2 z_1^2 + \alpha z^2 z_1 + \alpha_1 z z_1^2 + \beta z z_1 + \gamma z^2 + \gamma_1 z_1^2 + \delta z + \delta_1 z_1 + \varepsilon = 0, \tag{24}$$

oder, wenn

$\alpha = A - i\,A'$, $\beta = 2\,B$, $\gamma = C - i\,C'$, $\delta = D - i\,D'$, $\varepsilon = E$

gesetzt wird:

$$k(x^2+y^2)^2 + 2(x^2+y^2)(Ax+A'y) + 2x^2(B+C) + 2y^2(B-C)$$
$$+ 4\,x\,y\,C' + 2\,D\,x + 2\,D'y + E = 0.$$

Die Kurve hat vier imaginäre Asymptoten, von denen je zwei parallel sind. Ist $R = \pm i$, so sind ihre Gleichungen

$$2k(x+Ry) = -(A+A'R) \pm \sqrt{A^2 - A'^2 + 2AA'R - 2k(2C+RC')}.$$

Die Kurve kann einen Doppelpunkt besitzen. Leitet man aus der Gleichung der Kurve $f=0$ wieder nach Lindemann

$$\frac{d}{dZ}\left\{\log\left(\frac{dz}{dZ}\right)\right\}-\frac{d}{dZ}\left\{\log\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)\right\}=\frac{d}{dZ}\left\{\log\left(\frac{dz_1}{dZ}\right)\right\}-\frac{d}{dZ}\left\{\log\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right\}$$

her, so findet man wiederum, dass die Funktion

$$\Phi(z,Z)\equiv\frac{d}{dZ}\{\log z'\}-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dZ}(\log M)$$

für reelle Z am Rande von $f=0$ reell ist, wenn $z'=\frac{dz}{dZ}$ und

$$M=z^4(\alpha^2-4k\gamma)+z^3(2\alpha\beta-4k\delta-4\alpha_1\gamma)+z^2(\beta^2+2\alpha\delta_1-4\alpha_1\delta-4k\varepsilon-4\gamma\gamma_1)$$
$$+z(2\beta\delta_1-4\alpha_1\varepsilon-4\gamma_1\delta)+(\delta_1^2-4\gamma_1\varepsilon). \tag{25}$$

Die Funktion Φ wird unendlich erstens in den Punkten $M=0$, zweitens in dem etwa vorhandenen isolierten Punkt, welcher im Innern liegt, drittens in einem etwa vorhandenen Doppelpunkt, welcher am Rande des betrachteten Flächenstückes liegt. Im ersten Fall gilt die obige Entwicklung der Gleichung (4), im zweiten die der Gleichung (5), im dritten die der Gleichung (6). Ferner sind die Gleichungen 8, 9 und 10 zu beachten.

Ist $z=c$ ein Doppelpunkt von $f=0$, so ist $z-c$ ein quadratischer Faktor von M.

Die Abbildung von Flächenstücken, welche von einer bicircularen Kurve vierter Ordnung begrenzt werden, wird mithin nach den obigen Erörterungen vermittelt durch eine Gleichung der Form

$$\int\frac{dz}{\sqrt{M}}=D\cdot\int e^{\int R(Z)\,dZ}\cdot dZ+D'. \tag{26}$$

II. Wir betrachten zunächst die Kurve (Fig. 5)

$$2z^2z_1^2-2azz_1(z+z_1)-a^3(z+z_1)=0$$

oder:

$$(x^2+y^2)^2-2ax(x^2+y^2)-a^3x=0.$$

Man findet leicht:

$$M=4z^4+8az^3-4a^2z^2+a^4.$$

Die Gleichung $M = 0$ ist irreducibl und hat die Wurzeln

$$a_1 = -2{,}4147\,a,\quad a_2 = -0{,}3916\,a,\quad a_3 = (0{,}4032 + i \cdot 0{,}3191)\,a,$$
$$a_4 = (0{,}4032 - i \cdot 0{,}3191)\,a.$$

Die Punkte a_1 und a_2 liegen ausserhalb, die Punkte a_3 und a_4 innerhalb des Ovals.

Sind $Z = A$ und $Z = A'$ die Bilder der Punkte $z = a_3$ und $z = a_4$, so ist die Abbildung des Ovals auf die Halbebene vermittelt durch die Gleichung:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-A')(Z-A_1)(Z-A_1')}} + D'. \tag{27}$$

Durch dieselbe Gleichung wird die Abbildung des Aeussern des Ovals geleistet, wenn $Z = A$ und $Z = A'$ die Bilder der Punkte $z = a_1$ und $z = a_2$ sind.

III. Als bicirculare Kurve vierter Ordnung mit Doppelpunkt wählen wir die Kurve (Fig. 6)

$$2\,z^2 z_1^2 - 2\,a\,z\,z_1\,(z + z_1) - a^2\,z\,z_1 + a^2\,i\,(z^2 - z_1^2) = 0$$

oder:

$$2\,(x^2 + y^2)^2 - 4\,a\,x\,(x^2 + y^2) - a^2\,(x^2 + y^2) - 4\,a^2\,x\,y = 0.$$

Es ist:

$$M = z^2 \cdot [20\,z^2 + 4\,a\,z\,(4\,i - 3) - 3\,a^2\,(1 + 2\,i)].$$

Die Wurzelpunkte von $M = 0$ sind ausser dem Doppelpunkt $a_1 = \frac{9 - 3\,i}{10} \cdot a$ und $a_2 = -\frac{i}{2} \cdot a$.

In jeder der beiden Schleifen liegt einer dieser Punkte.

a) Setzt man $\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = \log J$, so ist

$$J = \frac{3a(1+2i) - 2z(4i-3) - i \cdot \sqrt{3(1+2i)} \cdot \sqrt{20z^2 + 4az(4i-3) - 3a^2(1+2i)}}{z}. \tag{28}$$

Ist ferner derjenige Winkel der Tangenten des Doppelpunktes, in welchem die kleinere Schleife liegt, $\gamma \cdot \pi$, so wird das Innere einer Schleife abgebildet durch

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C)\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}} + D'. \quad (29)$$

oder:

$$J\cdot(Z-C)^{\gamma} = D\cdot\{2c^2 + b(Z-C) + 2c\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}\}^{\gamma}, \quad (29\,\text{a})$$

wobei $c^2 = (C-A)(C-A_1)$ und $b = 2C - A - A_1$ ist.

b) Das Aeussere einer Schleife — Winkel $(2-\gamma)\cdot\pi$ — ein Wurzelpunkt von $M=0$ liegt im Innern des abzubildenden Flächenstückes.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C)\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}} + D' \quad (30)$$

oder:

$$J\cdot(Z-C)^{2-\gamma} = D\cdot\{2c^2 + b(Z-C) + 2c\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}\}^{2-\gamma}. \quad (30\,\text{a})$$

c) Das Aeussere beider Schleifen — zwei Winkel $(1-\gamma)\cdot\pi$.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C)(Z-C')} + D' \quad (31)$$

oder:

$$J = D\cdot\left\{\frac{Z-C}{Z-C'}\right\}^{1-\gamma}. \quad (31\,\text{a})$$

IV. Als bicirculare Kurve vierter Ordnung mit isoliertem Punkt betrachten wir die Kurve (Fig. 7)

$$4z^2 z_1^2 - 4a(z+z_1)zz_1 - 4a^2 zz_1 + a^2 i(z^2 - z_1^2) = 0$$

oder:

$$(x^2+y^2)^2 - 2ax(x^2+y^2) - a^2(x^2+y^2) - a^2 xy = 0.$$

Man findet:

$$M = z^2\cdot[8z^2 + 4az(1+3i) + 3(1+i)a^2].$$

Die Wurzelpunkte von $M=0$ sind

$$a_1 = \frac{-1 + i(\sqrt{14}-3)}{4}\,a$$

und
$$a_2 = \frac{-1 - i(\sqrt{14}+3)}{4}\,a.$$

Beide Punkte a_1 und a_2 liegen ausserhalb des Ovals.

Ist wiederum $\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = \log J$, so findet man leicht:

$$J = \frac{3a(1+i)+2z(1+3i)+\sqrt{3(1+i)}\cdot\sqrt{8z^2+4az(1+3i)+3a^2(1+i)}}{z}. \quad (32)$$

Die Abbildung des Innern des Ovals wird also geleistet durch die Gleichung:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{Z-B} + D' \quad (33)$$

oder:

$$J = D \cdot (Z-B)^{-1}. \quad (33a)$$

Das Aeussere des Ovals, welches die beiden Punkte a_1 und a_2 enthält, wird auf die Halbebene übertragen durch die Transformation:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)(Z-A')(Z-A_1')}} + D'. \quad (34)$$

V. Eine spezielle Gattung bicircularer Kurven vierter Ordnung sind die Cassini'schen Kurven.[1]) Die Gleichung derselben ist:

$$z^2 z_1^2 - a^2(z^2 + z_1^2) + a^4 - m^4 = 0;$$

oder

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 - m^4 = 0.$$

Für $m > a$ erhält man Figur 8, für $m < a$ Figur 9, für $m = a$ die Lemniscate von Bernoulli Figur 10.

Die Rechnung ergibt:

$$M = a^2 z^4 - z^2(2a^4 - m^4) + a^2(a^4 - m^4).$$

Die Wurzeln der Gleichung $M = 0$ sind

$$a_1 = +a; \quad a_2 = -a; \quad a_3 = +\sqrt{\frac{a^4-m^4}{a^2}}; \quad a_4 = -\sqrt{\frac{a^4-m^4}{a^2}}.$$

[1]) Die in V und VI behandelten Kurven sind in anderer Weise bereits behandelt. Cfr. Lindemann in „Sitzungsberichte der math.-phys. Kl. der k. b. A. d. W." Bd. 25, pag. 233 und 234 und des Verfassers Inaug.-Diss. München 1897, pag. 63 und 66. Hier bilden sie den speziellsten Fall eines allgemeineren Ansatzes.

a) In Figur 8 ($m > a$) liegen die Punkte a_1 und a_2 innerhalb des Ovals auf der X-Achse, a_3 und a_4 ausserhalb desselben auf der Y-Achse. Das Innere des Ovals wird deshalb auf die Halbebene übertragen durch:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)(Z-A')(Z-A_1')}} + D',^{1)} \quad (35)$$

wenn $Z = A$ und $Z = A'$ die Bildpunkte von $z = a_1$ und $z = a_2$ sind.

Die Abbildung des Aeussern des Ovals erfolgt durch dieselbe Gleichung, wenn $Z = A$ und $Z = A'$ den Punkten $z = a_3$ und $z = a_4$ entsprechen.[2])

b) In Figur 9 ($m < a$) liegen die Punkte a_1 und a_3 innerhalb des linken, a_2 und a_4 innerhalb des rechten Ovals. Die Abbildung des Innern oder des Aeussern eines Ovals wird also vermittelt durch die Transformation:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)(Z-A')(Z-A_1')}} + D'. \quad (36)$$

---

[1]) Lindemann l. c. Gleichung (32).

[2]) Herr Professor Lindemann machte mich darauf aufmerksam, dass die Abbildung der Lemniskate für $m > a$ bereits von Schwarz in der Abhandlung von W. Wien: „Ueber die Gestalt der Meereswellen" angegeben ist. Die Abhandlung befindet sich in den Sitzungsberichten der K. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrg. 1895, pag. 225. Die dort pag. 229 angegebenen Abbildungen sind in unserer Bezeichnungsweise für $a = 1$:

a) für das Innere: $\frac{1}{m} \cdot \frac{i - Z}{i + Z} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + m^4 - 1}}$;

b) für das Aeussere: $m^2 \cdot \left(\frac{i - Z}{i + Z}\right)^2 = z^2 - 1$.

Hiebei ist das Innere der Lemniskate auf die positive, das Aeussere auf die negative Halbebene abgebildet. Diese Formeln stimmen wesentlich mit obiger Gleichung 35, wenn man setzt:

c) In Figur 10 ($m = a$) liegt in jeder Schleife einer der Punkte a_1 und a_2. Der Winkel der Tangenten im Doppelpunkt ist $\frac{1}{2} \cdot \pi$.

Das Innere einer Schleife wird also abgebildet durch:[1])

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C) \cdot \sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}} + D' \qquad (37)$$

oder:

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - z^2}}{z} = D \cdot \sqrt{\frac{2c^2 + b(Z-C) + 2c \cdot \sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}}{Z-C}}, \qquad (37\text{a})$$

wenn $c^2 = (C - A)(C - A_1)$ und $b = 2\,C - A - A_1$ ist.

Die Abbildung des Aeussern einer Schleife ergibt:

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - z^2}}{z} = D \cdot \left[\frac{2c^2 + b(Z-C) + 2c \cdot \sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}}{Z-C}\right]^2. \qquad (38)$$

Das Aeussere beider Ovale, welches zwei rechtwinklige Ecken enthält, wird abgebildet durch:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C)(Z-C')} + D' \qquad (39)$$

oder:

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - z^2}}{z} = D \cdot \sqrt{\frac{Z-C}{Z-C'}}. \qquad (39\text{a})$$

VI. Eine weitere spezielle Gattung bicircularer Kurven vierter Ordnung sind die Pascal'schen Schneckenlinien (limaçon). Ihre Gleichung ist:

---

a) in Gleichung (35)

$$a = 1;\; D = \frac{-2i}{m^2-1};\; D' = 0;\; A = i \cdot \frac{m+1}{m-1};\; A' = i \cdot \frac{m-1}{m+1};$$

b) in Gleichung (35)

$$a = 1;\; D = \frac{-2i}{m^2+1};\; D' = 0;\; A = \frac{2m + i(1-m^2)}{1+m^2};$$

$$A' = \frac{-2m + i(1-m^2)}{1+m^2}.$$

[1]) Lindemann l. c. Gleichung (33).

$$4 z^2 z_1^2 - 4 a z z_1 (z + z_1) + 2 (a^2 - 2 m^2) z z_1 + a^2 (z^2 + z_1^2) = 0$$

oder: $$(x^2 + y^2 - a x)^2 - m^2 (x^2 + y^2) = 0.$$

Jenachdem $a > m$ oder $a < m$ erhält man die Figuren 11 oder 12; $a = m$ gibt die Kardioide, Figur 13.

Man findet:

$$M = z^2 \cdot [2 a z + (m^2 - a^2)].$$

$M = 0$ hat ausser dem Doppelpunkt nur die Wurzel $a_1 = \frac{a^2 - m^2}{2 a}$; es tritt der Fall der Gleichung (8) ein.

a) Der Punkt $z = a_1$ liegt in Figur 11 ($a > m$) innerhalb der kleineren Schleife. Der Winkel der Tangenten im Doppelpunkt ist bestimmt durch $\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{m}{a}$, wenn φ der Winkel der Tangente gegen die positive X-Achse ist; er sei $\gamma \cdot \pi$.

Das Innere der kleineren Schleife wird auf die Halbebene abgebildet durch die Gleichung:

$$\int \frac{d z}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{d Z}{(Z - C) \cdot \sqrt{(Z - A)(Z - A_1)}} + D' \qquad (40)$$

oder:

$$\frac{\sqrt{2az + d^2} + d}{\sqrt{2az + d^2} - d} = D \cdot \left\{ \frac{2c^2 + b(Z - C) + 2c \cdot \sqrt{(Z - A)(Z - A_1)}}{Z - C} \right\}^{\gamma}, \qquad (40\text{a})$$

wenn $c^2 = (C - A)(C - A_1)$, $b = 2 C - A - A_1$, $d^2 = m^2 - a^2$ ist. Durch dieselbe Gleichung wird das Innere des grösseren Ovales auf die Halbebene übertragen, wenn man γ vertauscht mit $(2 - \gamma)$.

Das Aeussere des kleineren oder grösseren Ovales wird abgebildet durch die Gleichung:[1])

$$\int \frac{d z}{\sqrt{M}} = D' \cdot \int \frac{d Z}{(Z - C) \cdot \sqrt{(Z - D)(Z - D_1)}} + D'' \qquad (41)$$

[1]) Die Integrationskonstanten sind mit D' und D'' bezeichnet, um eine Verwechslung derselben mit dem Punkt $Z = D$ zu vermeiden.

oder:

$$\frac{\sqrt{2az+d^2}+d}{\sqrt{2az+d^2}-d}=D'\cdot\left\{\frac{2c^2+b(Z-C)+2c\cdot\sqrt{(Z-D)(Z-D_1)}}{Z-C}\right\}^{\delta},\tag{41a}$$

jenachdem $\delta = 2 - \gamma$ oder $\delta = \gamma$ gesetzt wird und wenn

$c^2 = (C - D)(C - D_1)$ und $b = 2C - D - D_1$ ist.

Das von beiden Ovalen eingeschlossene Flächenstück, welches zwei Winkel $(1 - \gamma)\cdot\pi$ enthält, wird abgebildet durch die Transformation:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{M}} = D\cdot\int\frac{dZ}{(Z-C)(Z-C')} + D'\tag{42}$$

oder:

$$\frac{\sqrt{2az+d^2}+d}{\sqrt{2az+d^2}-d} = D\cdot\left(\frac{Z-C}{Z-C'}\right)^{1-\gamma}.\tag{42a}$$

b) In Figur 12 liegt der Punkt a_1 ausserhalb des Ovals. Das Innere des Ovals wird auf die Halbebene übertragen durch die Abbildung:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{M}} = D\cdot\int\frac{dZ}{(Z-B)(Z-B_1)} + D'\tag{43}$$

oder:

$$\frac{\sqrt{2az+d^2}+d}{\sqrt{2az+d^2}-d} = D\cdot\frac{Z-B_1}{Z-B};\tag{43a}$$

das Aeussere des Ovals durch die Abbildung:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{M}} = D'\cdot\int\frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)(Z-D)(Z-D_1)}} + D''.\tag{44}$$

c) In Figur 13 (Kardioide) fallen die drei endlichen Wurzeln von $M = 0$ in den Punkt $z = 0$.

Das Innere der Figur hat im Punkt $z = 0$ einen Winkel von 2π. Es tritt hier der Fall der Gleichung (10) ein.

Die Abbildung des Innern erfolgt durch die Gleichung:[1])

1) Goettler l. c. pag. 68 und Gleich. (126a).

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-B)^2} + D' \tag{45}$$

oder:

$$z^{-\frac{1}{2}} = D \cdot (Z-B)^{-1} + D'. \tag{45a}$$

Das Aeussere der Figur 13 wird auf die Halbebene übertragen durch die Gleichung:[1])

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D' \cdot \int \frac{dZ}{(Z-B) \cdot \sqrt{(Z-D)(Z-D_1)}} + D' \tag{46}$$

oder:

$$z^{-\frac{1}{2}} = D' \cdot \log \left(\frac{2c^2 + b(Z-B) + 2c \cdot \sqrt{(Z-D)(Z-D_1)}}{Z-B} \right) + D'', \tag{46a}$$

wenn $c^2 = (B-D)(B-D_1)$ und $b = 2B - D - D_1$ ist.

Analog den bisherigen Erörterungen sind alle Fälle zu erledigen, in denen die Gleichung der Grenzkurve der z Ebene durch die Transformation $t = \varphi(z)$, wo $\varphi(z)$ eine rationale Funktion von z sein möge, in eine circulare Kurve dritter Ordnung oder eine bicirculare Kurve vierter Ordnung der t Ebene übergeht.[2])

Die Gleichung einer derartigen Kurve ist:

$$k \cdot \varphi^2(z) \cdot \varphi_1^2(z_1) + \alpha \cdot \varphi^2(z) \cdot \varphi_1(z_1) + \alpha_1 \cdot \varphi(z) \cdot \varphi_1^2(z_1) + \beta \cdot \varphi(z) \cdot \varphi_1(z_1)$$
$$+ \gamma \cdot \varphi^2(z) + \gamma_1 \cdot \varphi_1^2(z_1) + \delta \cdot \varphi(z) + \delta_1 \cdot \varphi_1(z_1) + \varepsilon = 0. \tag{47}$$

Die Funktion $\Phi(z, Z)$, welche für reelle Z längs der Grenzkurve reell bleibt, ist

---

[1]) Goettler l. c. pag. 68 und Gleich. (127).

[2]) Es ist dies analog dem Umstande, dass sich die von Herrn Lindemann für die Kurven

$$\alpha z^n z_1^n + \beta z^n + \beta_1 z_1^n + \delta = 0$$

gegebene Methode auf die Kurven

$$\alpha \varphi^n \varphi_1^n + \beta \varphi^n + \beta_1 \varphi_1^n + \delta = 0$$

ausdehnen lässt; vgl. des Verfassers citierte Arbeiten sowie die Dissertation von L. Marc: „Conforme Abbildung eines von irregulären Hyperbeln n. Ordnung begrenzten Flächenstückes auf den Einheitskreis". München 1899.

$$\Phi(z, Z) = \frac{d}{dZ}\left\{\log(\varphi'(z) \cdot z')\right\} - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dZ}(\log M), \tag{48}$$

wenn $\varphi'(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz}$, $z' = \frac{dz}{dZ}$ und

$$M = \varphi^4(z)\cdot(\alpha^2 - 4k\gamma) + \varphi^3(z)\cdot(2\alpha\beta - 4k\delta - 4\alpha_1\gamma) + \varphi^2(z)\cdot(\beta^2 + 2\alpha\delta_1 - 4\alpha_1\delta - 4k\varepsilon - 4\gamma\gamma_1) + \varphi(z)\cdot(2\beta\delta_1 - 4\alpha_1\varepsilon - 4\gamma_1\delta) + (\delta_1^2 - 4\gamma_1\varepsilon) \text{ ist.} \tag{49}$$

Die Abbildung des Flächenstückes wird vermittelt sein durch die Gleichung:

$$\Phi(z, Z) = R(Z),$$

wenn $R(Z)$ eine passend gewählte rationale Funktion von Z ist, welche für reelle Z reell bleibt. Die Integration ergibt:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{T}} = D \cdot \int e^{\int R(Z) \cdot dZ} \cdot dZ + D', \tag{50}$$

wenn $\varphi(z) = t$ und $T(t) = M(z)$ gesetzt wird. Die linke Seite dieser Gleichung ist ein elliptisches, die rechte dagegen im allgemeinen ein hyperelliptisches Integral.

Bemerkung: In Figur 3 ist die Abscisse des Punktes a_2 zu verdreifachen; in Figur 4 ist Abscisse und Ordinate des Punktes a_1 zu verdoppeln.