

JAN 25 1901

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.



1900. Heft I.

München.

Verlag der K. Akademie.

1900.

In Commission bei G. Franzmann, Verleger in Berlin.

## Ueber die Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonanfnahmen.

Von **S. Finsterwalder.**

(*Ringelaufen 5. Mai.*)

(Mit Taf. I.)

Hat man von einem Objekt zwei Photographieen  $E'$  und  $E''$  mit innerer Orientierung, das heisst solche, zu welchen die relative Lage des zugehörigen perspektivischen Centrums bekannt ist, so reichen dieselben theoretisch ohne weiteres hin, um das dargestellte Objekt sowie die Lage der beiden Aufnahmepunkte gegenüber demselben bis auf den Massstab zu bestimmen.<sup>1)</sup> Die Kenntnis irgend einer Länge des Objekts genügt dann zur Festlegung des Massstabes. Bis jetzt ist ein in allen Fällen praktisch gangbarer Weg zur Lösung dieser Aufgabe nicht bekannt. Man bedarf dazu der von Herrn Guido Hauck so benannten gegnerischen Kernpunkte,<sup>2)</sup> d. i. der gegenseitigen Perspektiven des einen Standpunktes vom andern aus, deren Auffindung beträchtlichen rechnerischen oder konstruktiven Schwierigkeiten begegnet. Indessen, selbst wenn

---

1) Vergl. z. B. das Referat des Verfassers über die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 6. Bd., S. 15.

2) Ebenda S. 9, sowie die Abhandlungen des Herrn Hauck über die Theorie der trilinear-projektivischen Systeme, Crelle's Journal, Bd. 96 und 97.

wir einen Weg zur Lösung der genannten Aufgabe hätten, wäre damit für die photogrammetrische Terrainaufnahme vom Ballon aus wenig gedient, denn bei einer solchen handelt es sich nicht bloß um die Ermittlung der Terrainformen an sich, sondern speziell um ihre Beziehung zur Lotrichtung. Eine Kurvenaufnahme des Terrains z. B., bei welcher die Ebenen der Kurven nicht horizontal sind, würde, obwohl sie die Terrainformen vollständig darstellt, wenig nützen. Zwar würde bereits die Kenntnis des Fluchtpunktes der Lotlinien auf einer der beiden photographischen Perspektiven zur Herstellung der richtigen Horizontalkurven ausreichen, allein die oben gekennzeichneten Schwierigkeiten lassen es geraten erscheinen, sich bei der Lösung der Aufgabe nicht auf das theoretisch zulässige Minimum an Kenntnis des darzustellenden Objektes und der zugehörigen Lotrichtung zu beschränken. Nur so erzielt man nämlich nicht nur eine ausführbare Lösung, sondern auch Kontrollen, welche die Richtigkeit derselben sicher stellen.

Zunächst sei vorausgesetzt, man kenne Grundriss und Höhe von vier auf zwei photographischen Bildern  $E'$  und  $E''$  dargestellten Punkten des Terrains  $A, B, C, D$ , sowie von den beiden photogrammetrischen Standpunkten  $O_1$  und  $O_2$  (Ballonörter); man soll Grundriss und Höhe irgend eines weiteren auf beiden Bildern dargestellten Terrainpunktes  $P$  finden. Später soll auseinandergesetzt werden, auf welche Weise man in den verschiedenen Fällen die Ballonörter bestimmt, bzw. wie man auf die Kenntnis eines oder zweier Terrainpunkte verzichten kann.

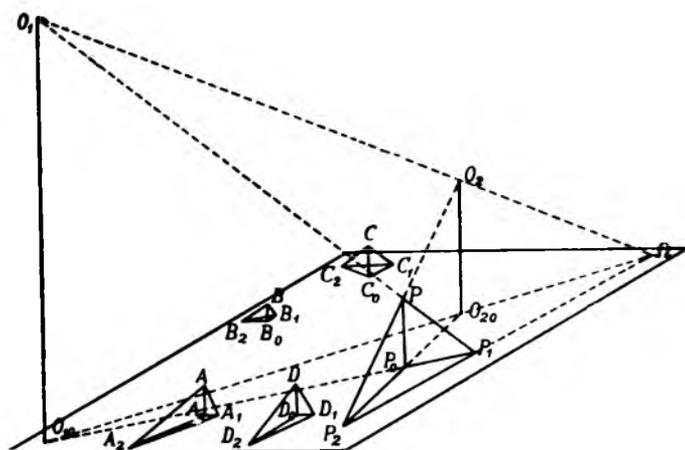
Zur Lösung der erstgenannten Aufgabe bedient man sich am besten der Vermittelung der beiden Perspektiven des Terrains von den jeweiligen Standpunkten auf die Grundrissebene  $E_0$ . Es seien  $O_1$  und  $O_2$  (vergl. Fig. 1) die Standpunkte (Ballonörter),  $O_{10}$  und  $O_{20}$  ihre Grundrisse,  $P$  ein Punkt des Terrains,  $P_1$  und  $P_2$  dessen Perspektiven von den beiden Standpunkten aus auf die Grundrissebene und  $P_0$  dessen Grundriss. Kennt man  $P_1$  und  $P_2$ , so erhält man  $P_0$  als Schnitt von  $O_{10}P_1$  und  $O_{20}P_2$ . Die Höhe  $P_0P$  des Punktes  $P$  über dem Grundriss ergibt sich zweifach aus folgenden Proportionen:

$$\begin{aligned} P_0 P : O_{10} O_1 &= h : H_1 = P_1 P_0 : P_1 O_{10} \\ P_0 P : O_{20} O_2 &= h : H_2 = P_2 P_0 : P_2 O_{20}, \end{aligned} \quad (1)$$

wobei  $H_1$  und  $H_2$  die Ballonhöhen sind.

Ausserdem muss die Verbindungslinie  $P_1 P_2$  durch den Punkt  $\Omega$  gehen, in welchem  $O_1 O_2$  die Grundrissebene schneidet. Nur in diesem Fall schneiden sich nämlich die beiden Strahlen  $P_1 O_1$  und  $P_2 O_2$  in einem Punkt des Raums. Diese Probe ist äquivalent mit der Höhenprobe, welche sich bei der doppelten Ausrechnung von  $h$  aus den beiden Proportionen ergibt.

Fig. 1.



Somit ist die Konstruktion von Grundriss und Höhe des Terrainpunktes auf die Bestimmung von  $P_1$  und  $P_2$  zurückgeführt. Diese aber kann einfach auf folgende Weise geschehen (vergl. Fig. 1): Es seien  $A_1, B_1, C_1, D_1$  die 4 Punkte, welche durch Centralprojektion von  $O_1$  aus auf die Grundrissebene aus den 4 bekannten Terrainpunkten  $A, B, C, D$  entstehen und sich aus deren Grundrissen  $A_0, B_0, C_0, D_0$  und den zugehörigen Höhen ohne weiteres konstruieren lassen (vergl. Fig. 1). Es ist nun das Punktfeld  $A_1, B_1, C_1, D_1, P_1$  der Ebene  $E_0$  perspektiv zum photographischen Bild  $A', B', C', D', P'$  der

Ebene  $E'$  von  $O_1$  aus, daher kann  $P_1$  aus  $P'$  linear ermittelt werden. Dies geschieht am sichersten rechnerisch, wobei man von der Bemerkung ausgeht, dass die (rechtwinkligen, schiefwinkligen oder projektiven) Koordinaten von  $P_1$  in der Grundrissebene  $E_0$  mit den Koordinaten von  $P'$  in der Bildebene  $E'$  durch linear gebrochene Relationen<sup>1)</sup> zusammenhängen, deren Koeffizienten sich dann besonders einfach bestimmen lassen, wenn in den beiden projektiven Ebenen jene Parallel-Koordinaten  $x_1, y_1$  bzw.  $x', y'$  eingeführt werden, welche zu den Verbindungslinien  $A_1 C_1$  und  $B_1 D_1$  resp.  $A' B'$  und  $C' D'$  als Axen gehören (vergl. Fig. 2). Die Relationen können dann so geschrieben werden:<sup>2)</sup>

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1} &= a + \beta \frac{y'}{x'} + \gamma \frac{1}{x'} \\ \frac{\kappa}{y_1} &= a \frac{x'}{y'} + \beta + \gamma \frac{1}{y'}\end{aligned}\tag{2}$$

Zur Bestimmung von  $a, \beta, \gamma, \kappa$  hat man nun folgende vier Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1} &= a + \gamma \frac{1}{a'} \\ -\frac{1}{c_1} &= a - \gamma \frac{1}{c'} \\ \frac{\kappa}{b_1} &= \beta + \gamma \frac{1}{b'} \\ -\frac{\kappa}{d_1} &= \beta - \gamma \frac{1}{d'}\end{aligned}\tag{3}$$

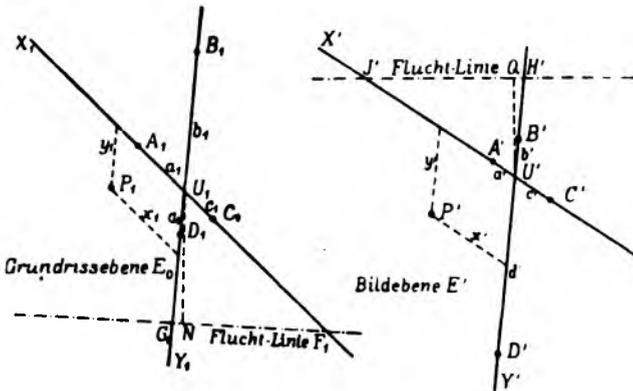
<sup>1)</sup> Siehe etwa: Clebsch-Lindemann's Vorlesungen über Geometrie, Bd. 1, S. 250 u. ff.

<sup>2)</sup> Ebenso einfach werden übrigens die Relationen, wenn man an Stelle der schiefwinkligen Koordinaten der Punkte ihre normalen Abstände von den oben genannten schiefwinkligen Koordinatenaxen nimmt. Diese normalen Abstände haben vor den schiefwinkligen den Vorteil voraus, dass sie in den Bildern ohne weitere Konstruktion direkt mit dem Zirkel abgegriffen werden können.

Die Buchstaben  $a_1, b_1, c_1, d_1$  bzw.  $a', b', c', d'$  bezeichnen dabei die absoluten Werte der Koordinaten der Punkte  $A_1, B_1, C_1, D_1$  bzw.  $A', B', C', D'$  im genannten System (vergl. Fig. 2). Aus den Gleichungen (3) lassen sich die Konstanten der Formeln (2) folgendermassen successive berechnen:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{c_1}}{\frac{1}{a'} + \frac{1}{c'}} \\ a &= \frac{1}{a_1} - \frac{\gamma}{a'} = \frac{\gamma}{c'} - \frac{1}{c_1} \\ x &= \gamma_1 \frac{\frac{1}{b'} + \frac{1}{d'}}{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{d_1}} \\ \beta &= \frac{x}{b_1} - \frac{\gamma}{b'} = \frac{\gamma}{d'} - \frac{x}{d_1} \end{aligned} \tag{4}$$

Fig. 2.



Entnimmt man dem Bilde  $E'$  die Koordinaten  $x', y'$  von  $P'$ , so kann man nun mittels der Formeln (2) die Koordinaten  $x_1, y_1$  des Punktes  $P_1$  der Grundrissebene finden. Die Formeln

(2) sind bereits in jene Gestalt gebracht, welche für den Gebrauch des Rechenschiebers am vorteilhaftesten erscheint. In analoger Weise findet man die Koordinaten  $x_2, y_2$  von  $P_2$ , wobei man vorher die Koeffizienten jener neuen Formeln zu berechnen hat, durch welche der Zusammenhang zwischen den  $x_2, y_2$  des Punktes  $P_2$  der Ebene  $E_0$  und  $x'_2, y'_2$  des Punktes  $P'_2$  der zweiten Photographie  $E''$  dargestellt ist. Die Koordinaten  $x_2, y_2$  sind auf ein von dem früheren etwas verschiedenes Koordinatensystem bezogen, da  $A_2, B_2, C_2, D_2$  im allgemeinen nicht mit  $A_1, B_1, C_1, D_1$  zusammenfallen werden. Hat man so die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  nach ihren Koordinaten aufgetragen, so ergibt sich  $P_0$ , wie erwähnt, als Schnitt von  $P_1 O_{10}$  und  $P_2 O_{20}$  und die Höhe  $h$  auf doppelte Weise aus den Proportionen (1).

Will man die Rechnung vermeiden, so kann man sich zur Bestimmung der Punkte  $P_1$  und  $P_2$  auch der durch 4 Punktepaare gegebenen projektiven Beziehung des Möbius'schen Netzes bedienen, wie ich bei einer andern Gelegenheit auseinandergesetzt habe. (Vergl. das S. 149 citierte Referat S. 6.) Um längeren Konstruktionen in den Ebenen der Photographien  $E'$  und  $E''$  aus dem Wege zu gehen, wird man ein in die Bilder mechanisch einkopiertes Quadratnetz in die Grundrissebene  $E_0$  übertragen, wo es dann als Möbius'sches Netz erscheint.<sup>1)</sup> Es ist dies auf rein graphischem Wege allerdings nur sehr schwierig mit der nötigen Genauigkeit zu erreichen. Sollen die Vorteile, welche das Möbius'sche Netz bei der Bestimmung einer grossen Zahl von Punkten bietet, nicht durch Ungenauigkeit der zeichnerischen Ausführung beeinträchtigt werden, so ist es das Empfehlenswerteste, die Randpunkte des Quadratnetzes der Bildebene auf dem rechnerischen Wege mittels der Formeln (2) in die Ebene  $E_0$  zu übertragen und durch Ziehen der Verbindungslinien das Netz zu vervollständigen. Die weitere Ausführung der Netzmaschen, bezw. die Eintragung der Punkte  $P_1$  und  $P_2$  geschieht dann auf dem

<sup>1)</sup> In der beifolgenden Tafel I ist ein solches Möbius'sches Netz eingetragen.

Wege der Proportionalteilung, indem man die projektive Beziehung der Ebenen  $E'$  bzw.  $E''$  und  $E_0$  innerhalb einer Masche näherungsweise durch eine affine Beziehung ersetzt.

Aus den Formeln (2) kann man übrigens sehr einfach die Lage der Fluchtlinien in den Ebenen  $E'$  bzw.  $E''$  und  $E_0$  berechnen (vergl. Fig. 2). Sind  $p_1$  und  $q_1$  die Abschnitte der Fluchtlinie auf den Koordinatenachsen in  $E_0$ ,  $p'$  und  $q'$  die analogen Grössen in  $E'$ , so ergeben sich aus (2) die einfachen Beziehungen

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{\alpha}; & q_1 &= \frac{x}{\beta} \\ p' &= -\frac{\gamma}{\alpha}; & q' &= -\frac{\gamma}{p} \end{aligned} \quad (5)$$

Kann man nun über das dem Möbius'schen Netz zu Grunde gelegte Quadratnetz in  $E'$  noch verfügen, so legt man dasselbe am besten parallel zur Fluchtlinie und erreicht dadurch, dass eine Schar von Linien des Möbius'schen Netzes ebenfalls parallel zur Fluchtlinie wird. Man erspart dann die Umrechnung eines Teiles der Randpunkte.

Neben der oben auseinandergesetzten Methode, die beiden Punktfelder  $P_1$  und  $P_2$  in der Ebene  $E_0$  auf projektivem Wege aus den photographischen Bildern zu entwickeln, ist noch eine mehr elementare denkbar, die auf den Regeln der darstellenden Geometrie beruht und bei welcher man den Grundriss und Aufriss der projizierenden Strahlbüschel von  $O_1$  und  $O_2$  aus zu Hilfe nimmt. In der Praxis versagt die direkte Anwendung dieser Methode wegen ihrer Ungenauigkeit und Unbequemlichkeit. Die Genauigkeit der Methode hängt nämlich in erster Linie davon ab, wie scharf die Ermittlung der äusseren Orientierung der beiden Strahlbündel  $O_1$  und  $O_2$  gelingt und jeder Fehler in den Ballonörtern oder in der Stellung der Bilder geht in vollem Betrag auf die zu konstruierenden Terrainpunkte über. Hingegen ist die projektive Methode von der Genauigkeit der Ballonörter fast unabhängig, solange nämlich die Ballonhöhen sehr gross gegen die Terraihöhenunterschiede sind. Wären letztere Null, so brauchte man die

Ballonörter überhaupt nicht, die beiden Punktfelder  $P_1$  und  $P_2$  in  $E_0$  würden sich decken und direkt die Horizontalprojektion liefern. Aber noch ein weiterer sehr wesentlicher Vorteil spricht zu gunsten der projektiven Methode. Während man bei der Methode der darstellenden Geometrie auf die Richtigkeit der metrischen Verhältnisse angewiesen ist und daher immer auf das Originalnegativ oder auf ein davon abgenommenes Glasdiapositiv zurückgehen muss, kann man bei der projektiven Methode ohne weiteres mit fixierten Papierbildern oder Vergrößerungen arbeiten, da ja die Veränderungen, die diese gegenüber dem Originalnegativ zeigen, sehr genau durch eine affine oder projektive Transformation ersetzt werden können, und daher die Werte der Doppelverhältnisse, auf die es bei der projektiven Methode allein ankommt, nicht beeinträchtigen. Durch die Benützung von Vergrößerungen lässt sich aber die Genauigkeit und Bequemlichkeit erheblich steigern. Wenn es sich wie in der Regel bei den Terrainaufnahmen um die Eintragung des Konstruierten in die vorhandenen Karten handelt, so hat man bei der Methode der darstellenden Geometrie noch mit dem Papiereingang der Karte, der in der Regel nach verschiedenen Richtungen verschieden ist, zu kämpfen, was bei der projektiven Methode wegfällt, sobald man die Ausgangsmasse derselben Karte entnommen hat.

Es sollen nun die Methoden erwähnt werden, die zur Ermittlung der Ballonörter Verwendung finden können.

a) Sind zwei Ebenen wie  $E'$  und  $E_0$  projektiv aufeinander bezogen (vergl. Fig. 3), so ist ein geometrischer Ort des Centrums  $O$ , in bezug auf welches sie perspektiv gelegt werden können, gegenüber einer der beiden Ebenen, z. B.  $E_0$ , ein Kreis, dessen Ebene normal auf  $E_0$  steht und dessen Mittelpunkt in der Fluchtlinie dieser Ebene liegt. Seine Elemente lassen sich aus den Formeln (2) und (4) leicht berechnen. Für den Radius  $r$  gilt:

$$r = \frac{U' Q}{H' J'} \cdot F_1 G_1$$

für den Kreismittelpunkt  $M$  gilt:

$$G_1 M = \frac{H' Q}{H' J'} \cdot F_1 G_1.$$

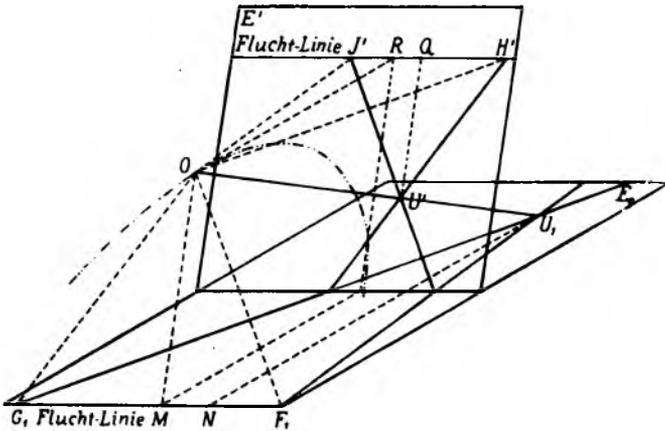
Diese Relationen folgen aus der Aehnlichkeit der Dreiecke

$$U_1 G_1 F_1 \sim O H' J' \text{ und}$$

$$O G_1 F_1 \sim U' H' J'.$$

Kennt man die Bildweite des photographischen Bildes  $E'$ , d. h. den Normalabstand des Centrum  $O$  von der Ebene  $E'$ , so ist die Lage von  $O$  auf dem Kreise bestimmt. Ein Versuch auf diesem Wege die Lage des Ballonortes zu bestimmen, scheidert zumeist an der Ungenauigkeit des Verfahrens. Es

Fig. 3.



setzt dasselbe nicht nur voraus, dass die metrischen Verhältnisse in Bild und Karte durch keine Papierkontraktion oder Vergrößerung geändert wurden, sondern wenn diese Verhältnisse auch zutreffen, ist doch der geometrische Ort (Kreis) von  $O$  so wenig bestimmt, dass ein befriedigendes Resultat nicht leicht erzielt wird. Es wird dies plausibel, wenn man bedenkt, dass die perspektive Abbildung von  $E'$  auf  $E_0$  wegen des meist kleinen Bildfeldes annähernd zur affinen wird und bei einer solchen der gesuchte geometrische Ort in die ganze unendlich ferne Ebene ausartet.

b) Bessere Resultate erzielt man, wenn man die ganze innere Orientierung jeder der Photographieen und drei Punkte des Terrains als gegeben ansieht. Aus der inneren Orientierung ergibt sich das Dreikant der Projektionsstrahlen nach den bekannten Terrainpunkten, das man dann so in den Raum zu stellen hat, dass seine drei Kanten durch die vorgegebenen Terrainpunkte gehen. Diese Aufgabe ist zwar nicht mit Zirkel und Lineal lösbar, lässt aber rasche und praktisch ausreichende Näherungskonstruktionen zu.<sup>1)</sup>

c) Besonders einfach wird die Konstruktion des Ballonortes, wenn der Fluchtpunkt der Vertikalen aus der Photographie entnommen werden kann. Um letzteres zu ermöglichen, lässt man eine Reihe von langen Lotleinen vom Aequator des Ballons herabhängen, welche dann bei der Aufnahme mitphotographiert werden. Der Schnittpunkt der Bilder derselben gibt den gesuchten Fluchtpunkt. In diesem Fall genügt ausser der Kenntnis der inneren Orientierung die von nur zwei Terrainpunkten.<sup>2)</sup>

Gelingt in den Fällen b) und c) die Orientierung mit der nötigen Schärfe, so kann man versuchen, für die weitere Konstruktion ohne Kenntnis eines vierten bzw. dritten und vierten Terrainpunktes auszukommen, indem man auf dem Wege der darstellenden Geometrie aus einem oder zwei Paaren von Bildern identischer Terrainpunkte Grundriss und Höhe derselben rekonstruiert und dann nach der projektiven Methode weiter verfährt. Freilich ist das erzielte Resultat in hohem Masse von der Richtigkeit der Positionen der Terrainpunkte und der Lotrichtung abhängig.<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> Vergl. das S. 149 citierte Referat S. 26.

<sup>2)</sup> Ebenda S. 29. Ueber die praktische Anwendung dieser Ballonortsbestimmung siehe des Verfassers Aufsatz in den Illustrierten Aeronautischen Mitteilungen 1899, S. 31, auch im Jahresbericht des Münchener Vereins für Luftschiffahrt für das Jahr 1898, S. 33.

<sup>3)</sup> Wiederholte Erfahrungen haben gezeigt, dass die vom Aequator des Ballons herabhängenden Lote, deren Bilder bei c) zur Verwendung kommen, doch nicht selten ziemlich weit von der Lotrichtung abweichen, namentlich dann, wenn sich der Ballon in der Nähe des Gebirges bewegt.

Die oben auseinandergesetzten Methoden wurden an der Hand eines ziemlich umfangreichen Materials an Ballonbildern des Münchener Vereins für Luftschiffahrt geprüft. Speziell für Höhenaufnahmen wurden zwei Bilder verwendet, welche bei einer Vereinsfahrt am 18. November 1899 aufgenommen wurden und die Ortschaft Waal bei Kaufbeuern aus einer relativen Höhe von ca. 900 m darstellen. Die eine von ihnen wurde von Herrn Baron v. Bassus mit einem dem Verein gehörigen Apparat mit konstanter Bildweite auf eine Platte vom Format  $12 \times 16$  cm aufgenommen. Die Bildweite des Objektivs, ein Orthostigmat von Steinheil, beträgt 152 mm. Die zweite Aufnahme, von Herrn Privatdozent Dr. Heinke herrührend, wurde mit einer sogenannten Bruns-Kamera im Format  $9 \times 12$  cm gemacht. Das zugehörige Objektiv ist ein Goerz'scher Doppel-Anastigmat mit 149 mm Bildweite. Die Ballonörter wurden nach der Methode b) aus 3 Terrainpunkten bestimmt. Es war zwar der Ballon bei der Abfahrt mit Lotleinen ausgerüstet, allein infolge eines Versehens hatten sich dieselben verwirrt, so dass nicht die genügende Zahl (mindestens zwei) von Lotleinen auf einer Photographie zur Abbildung kam. Die innere Orientierung der erst genannten Aufnahme wurde auf folgendem Wege bewerkstelligt. Im Inneren des Apparates befindet sich ein rechteckiger Rahmen, dessen Umrisse auf dem Negativ zur Abbildung gelangen. Infolge der Einrichtung zum Wechseln der Glasplatten ist ein absolut genaues Anliegen derselben an den Rahmen nicht zu erreichen, man kann aber, wenn die inneren Orientierungselemente (Hauptpunkt und Bildweite) für die Ebene des Rahmens vorher bestimmt waren, aus dem Vergleich der Dimensionen des Rahmenbildes und jener des wirklichen Rahmens die zur Lage der Glasplatte im Moment der Aufnahme gehörigen Orientierungselemente bestimmen. Es verhält sich nämlich unter der Voraus-

---

Allerdings sind dann die relativen Luftbewegungen gegenüber dem Ballon so stark, dass sie bereits fühlbar werden. Es ist ein Missstand der angegebenen Methode, dass man kein sicheres Kriterium für das normale Herabhängen der Lotleinen besitzt.

setzung, dass die Unterschiede der beiden in Betracht kommenden Ebenen (der Rahmenebene und der Ebene der Platte) sehr klein sind, die zur Platte gehörige Bildweite zu der zum Rahmen gehörigen wie der Umfang des Rahmenbildes zum wirklichen Rahmenumfang. Der Hauptpunkt erleidet in Richtung der Rahmenseiten Verschiebungen, die sich mittels Formeln folgender Art berechnen lassen:

$$\alpha = \frac{d^2}{ab} (b_2 - b_1), \quad \beta = \frac{d^2}{ab} (a_2 - a_1),$$

wobei  $d$  die genannte Bildweite,  $a$  und  $b$  die Seiten des Rahmens bedeuten,  $b_2$  und  $b_1$  resp.  $a_1$  und  $a_2$  die Verkürzungen der beiden Rahmenseiten  $b$  resp.  $a$ , und  $\alpha$  bzw.  $\beta$  die Verrückung des Hauptpunktes in Richtung der Seite  $a$  bzw.  $b$  und zwar nach der stärker verkürzten Seite hin bedeuten. Für die Dimensionen des benützten Apparats ist der Faktor  $\frac{d^2}{ab} = 1,6$ , es können also die Veränderungen des Hauptpunktes infolge der nichtparallelen Stellung der Platte zum Rahmen mit einer allerdings etwas geringeren Genauigkeit ermittelt werden, als die Messungsgenauigkeit auf dem Negativ beträgt. Die zugehörige Ballonhöhe wurde nach der genannten Methode dreimal bestimmt, wobei die Zahlen 957 m, 933 m und 945 m, im Mittel  $945 \pm 7$  m resultierten. Für die Höhe des zweiten Ballonortes ergab sich in ähnlicher Weise 898 m. Die horizontale Entfernung der beiden Ballonorte betrug 1676 m (vergl. die Tafel I). Als Projektionsebene wurde eine in der mittleren Höhe von 637 m des darzustellenden Terrains gelegene Horizontalebene gewählt. Für die weiteren Ausarbeitungen stellte ich im mathematischen Institut Vergrößerungen der erwähnten Ballonbilder her und zwar wurde die erste Aufnahme dreifach, die zweite doppelt vergrößert. Um zunächst die Genauigkeit der nach der projektiven Methode unter weniger günstigen Verhältnissen zu gewinnenden Horizontalpositionen zu prüfen, wählte ich auf dem zweiten Bild  $I''$  vier in der beigegebenen Tafel I durch Dreiecke markierte Punkte, die ich auf dem

Katasterblatt S. W. VII. 26. im Massstabe 1:5000 identifizieren konnte. Ihre Höhen entnahm ich den Horizontalkurven des Positionsblattes Nr. 739 Waal. Es wurden nun 120 Punkte der Photographie in die Grundrissebene mittels der Formeln (2) übertragen. Wurden dieselben mit dem Grundriss des Ballonortes verbunden, so mussten die Verbindungslinien durch entsprechende Punkte der Katastralaufnahme hindurchgehen. Das traf auch im allgemeinen zu, doch stellte sich heraus, dass das im Jahre 1811 aufgenommene Blatt trotz der Korrekturen aus den Jahren 1841, 1849 und 1877 so viele Unterschiede an den Gebäuden, den Strassenzügen, den Wasserläufen und den Flurgrenzen, soweit letztere zu erkennen waren, aufwies, dass eine zweifellose Identifizierung, so wie sie für eine Höhenaufnahme unbedingt nötig wäre, nicht wohl möglich war. Für die bestimmten Punkte wurden zum leichteren Vergleich mit der Katastralaufnahme die Korrekturen wegen der Erhebung der betreffenden Terrainpunkte über das Ausgangsniveau unter Zugrundelegung der dem Positionsblatt entnommenen Höhen gerechnet. Nach den so ermittelten Positionen wurde ein Teil des hydrographischen Netzes rekonstruiert, welches zum Vergleich mit der Katastralaufnahme in der beiliegenden Tafel im verkleinerten Massstabe 1:25000 reproduziert wird. Die Verschiedenheiten gegenüber der Katastralaufnahme erklären sich zum grössten Teil durch die Veränderungen, welches das hydrographische Netz sei es durch den natürlichen Verlauf, sei es durch künstlichen Eingriff erfahren hat (Verlegung und teilweise Abschnürung der Serpentina des Singold-Baches einerseits, dann Trockenlegung des Walker Weihers andererseits). Die nicht ganz befriedigende Uebereinstimmung mit der Katastralaufnahme wird zum Teil auch auf der nicht vollkommen sicheren Identifizierung der Ausgangspunkte beruhen. Um für die Höhenaufnahme hievon möglichst unabhängig zu sein, orientierte ich das Koordinatensystem, das zum Umrechnen der andern Aufnahme *E'* diente, nicht nach Punkten der Katastralaufnahme, sondern nach auf beiden Photographieen sicher zu identifizierenden Punkten der

obengenannten Rekonstruktion. Dadurch fallen die etwa vorhandenen systematischen Fehler derselben für die Höhenbestimmung fast vollständig hinaus. Nun wurden für etwa 30 Punkte, welche auf beiden Aufnahmen identifiziert werden konnten,<sup>1)</sup> die Höhen gerechnet und dabei das in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellte Resultat erhalten. Da sich für jeden Punkt zwei Höhen rechnen lassen, so kann man aus der Uebereinstimmung der beiden einen mittleren Fehler einer Höhenbestimmung zu 0,92 m, denjenigen einer Höhe zu 0,65 m berechnen. Dabei stellt sich heraus, dass die vom zweiten Standpunkt aus genommenen Höhen durchschnittlich um 0,49 m grösser sind als die vom ersten Standpunkt aus aufgenommenen. Wird dieser systematische Fehler abgerechnet, so bleibt ein mittlerer zufälliger Fehler von 0,85 bzw. 0,60 m. Das Mass desselben beweist, dass die Rekonstruktion der Positionen bis auf etwa 0,2 mm bis 0,4 mm im Massstab 1 : 5000 gelungen ist. Es unterliegt keinem Zweifel, dass sich bei noch grösserer Sorgfalt eine erhebliche Steigerung der Genauigkeit erzielen liesse. Immerhin ist die bereits gewonnene Genauigkeit schon höher als die eines systematischen Nivellements mit dem Aneroid.

Für die praktische Verwertung ist der Zeitaufwand, welcher für die einzelnen Operationen nötig ist, von grosser Wichtigkeit und es mögen daher einige Angaben darüber gestattet sein. Die Konstruktion eines Ballonortes nach der Methode b) erfordert, sobald man die Dimensionen der Karte direkt entnehmen kann, ca. 30 Minuten Zeit, die Ausrechnung der Konstanten für die Formeln (2) etwa ebensoviel. Die Anwendung der Formeln (2) ist auf je 5 Minuten Zeitaufwand zu veranschlagen. Ebensoviel Zeit bedarf die Herstellung der Horizontalposition und die doppelte Höhenrechnung, sodass sich die für einen kotierten Punkt noch aufzuwendende Zeit auf 15 bis 20 Minuten beläuft. Arbeitet man mit dem Möbius'schen Netz,

<sup>1)</sup> Die Zahl der identifizierbaren Punkte hätte sich auf einige Hundert vermehren lassen.

Tabelle der doppelgemessenen Höhen der Terrainpunkte.

Nr.	mm $P_1 P_0$	mm $P_1 O_{10}$	m $h_1$	mm $P_2 P_0$	mm $P_2 O_{20}$	m $h_2$	m $\Delta$ $= h_2 - h_1$	$\Delta^2$
2	1,7	208	7,7	2,2	224	8,1	0,4	0,16
5	1,7	312	5,2	1,9	314	5,4	0,2	0,04
6	1,2	318	3,6	1,5	251	5,4	1,8	3,24
7	-1,2	216	-5,3	-2,4	350	-6,1	-0,8	0,64
11	-0,4	245	-1,5	-0,3	195	-1,7	-0,2	0,04
12	0,8	210	3,6	0,6	168	3,2	-0,4	0,16
31	0,1	195	0,5	0,3	223	1,2	0,7	0,49
32	-0,2	197	-1,0	0,0	215	0,0	1,0	1,00
63	0,2	282	0,7	0,2	167	1,1	0,4	0,16
64	0,0	256	0,0	0,0	188	0,0	0,0	0,00
62	0,2	265	0,7	0,0	150	0,0	-0,7	0,49
65	0,8	275	2,7	1,2	240	4,5	1,8	3,24
66	1,1	276	3,8	1,2	249	4,3	0,5	0,25
70	-0,5	254	-1,9	0,0	271	0,0	1,9	3,61
71	-0,4	234	-1,6	-0,5	271	-1,7	-0,1	0,01
71 <sup>a</sup>	-0,2	283	-0,7	-0,5	274	-1,6	-0,9	0,81
71 <sup>b</sup>	-1,2	280	-4,1	-1,8	272	-6,0	-1,9	3,61
72	-0,6	222	-2,6	-0,3	280	-1,0	1,6	2,56
73 <sup>a</sup>	-0,9	226	-3,8	-1,0	298	-3,0	0,8	0,64
83	1,1	214	4,9	1,0	232	3,9	-1,0	1,00
106	-0,8	174	-4,3	-1,3	312	-3,7	0,6	0,36
108	-0,8	222	-3,4	-1,7	309	-4,9	-1,5	2,25
109	-0,9	199	-4,3	-1,9	332	-5,1	-0,8	0,64
111	-0,5	192	-2,5	-0,4	312	-1,2	1,3	1,69
113	0,8	314	2,4	1,1	212	4,6	2,2	4,84
100	1,0	328	2,9	1,1	288	3,4	0,5	0,25
107	0,8	287	2,6	1,5	293	4,6	2,0	4,00
114 <sup>1)</sup>	13,3	242	52,0	16,0	264	54,5	2,5	6,25
116	-0,4	158	-2,4	0,1	219	0,4	2,8	7,84
119	0,2	266	0,6	0,2	358	0,5	-0,1	0,01
							14,6	50,28
							= $\Sigma \Delta$	= $\Sigma \Delta^2$

Hiernach ist der mittlere Fehler einer Bestimmung:

$$m = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{2n}} = \pm \sqrt{\frac{50,28}{60}} = \pm 0,92 \text{ Meter}$$

und der mittlere Fehler einer Höhe  $M = 0,707 \text{ m} = 0,65 \text{ Meter}$ .

<sup>1)</sup> Der Punkt 114 liegt nicht auf dem Terrain selbst, sondern ist die Spitze des Kirchturms von Waal.

so ist für die Herstellung eines solchen im Massstab 1 : 5000 wohl eine mehrstündige Arbeitszeit anzusetzen. Der für den einzelnen Punkt benötigte Zeitaufwand reduziert sich dann allerdings auf die Hälfte, also auf ca. 10 Minuten. Eine noch weitergehende Abkürzung des Verfahrens liesse sich durch eine rein mechanische Umzeichnung des Ballonbildes  $E'$  in die Ebene  $E_0$  mittels eines Perspektographen ermöglichen. Dadurch, dass man nicht das Ballonbild  $E'$  selbst, sondern eine Vergrößerung desselben zur Umzeichnung benützt, lassen sich die zufälligen Fehler des Verfahrens jedenfalls auf ein zulässiges Mass reducieren. Ob ein Gleiches mit den systematischen Fehlern auch gelingt, bedarf noch genauer Untersuchung.

---