Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1901. Heft I.

OF THE
UNIVERSITY

München.
Verlag der k. Akademie.
1901.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber die Divergenz gewisser Potenzreihen an der Convergenzgrenze.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 27. Dezember.)

In einer früheren Mittheilung „Ueber das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise" habe ich im Anschlusse an einen zuerst von Herrn Tauber bewiesenen Satz die Vermuthung ausgesprochen,[1]) dass die beiden Bedingungen:

$$\text{(A)} \qquad \lim_{\varrho = 1-0} \mathfrak{P}(\varrho X) = A, \qquad \lim_{\nu = \infty} a_\nu = 0$$

für die Convergenz von $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu$ an der Grenzstelle $x = X$ nicht hineinreichen dürften. Im folgenden will ich zeigen, dass es thatsächlich Reihen giebt, welche den Bedingungen (A) genügen — ja sogar der ersten dieser Bedingungen in dem erweiterten Umfange, dass $\lim_{x=X} \mathfrak{P}(x) = A$ beim Grenz-Uebergange auf einem beliebigen, dem Innern des Convergenzkreises angehörigen Strahle — und welche dennoch für

---

[1]) Sitz.-Ber. Bd. 30 (1900), p. 43. — Ich möchte bei dieser Gelegenheit bemerken, dass ein ähnlicher Satz, wie der a. a. O. p. 85 von mir formulirte, in einer anderen, mir inzwischen erst bekannt gewordenen Abhandlung des Herrn Tauber sich findet: „Ueber das Poisson'sche und das demselben conjugierte Integral" (Wiener Monatshefte, Jahrg. VI [1895], p. 118).

$x = X$ divergiren.[1]) Dabei wird es offenbar, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, gestattet sein, speciell $X = 1$ anzunehmen.

1. Ist die Reihe $\sum_1^\infty a_\nu$ convergent und ihre Summe $= s$, so bestehen die beiden Bedingungen:[2])

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + n \cdot a_n}{n} = 0$$

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} = s \quad (\text{wo: } s_k = \sum_1^k{}^{\nu}\, a_\nu).$$

Jede dieser Beziehungen (die zweite in dem Sinne, dass der betreffende Grenzwerth irgend eine bestimmte Zahl s vorstellt) ist also nothwendig für die Convergenz, dagegen erweist sich keine allein auch als ausreichend: der Bedingung (1) genügt z. B. jede divergente Reihe, für welche $\lim_{n=\infty} n \cdot a_n = 0$ ist;[3]) der Bedingung (2) unendlich viele innerhalb endlicher Grenzen oscillirende Reihen, als deren einfachster Typus $\sum_1^\infty{}^{\nu}\, (-1)^{\nu-1}$ gelten kann.

Wohl aber sind beide Bedingungen zusammen genommen für die Convergenz von Σa_ν allemal auch hinreichend. Da nämlich:

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n = n \cdot a_1 + (n-1) \cdot a_2 + \ldots + 1 \cdot a_n,$$

so ergiebt sich durch Addition der Beziehungen (1) und (2) unmittelbar:

$$\lim_{n=\infty} \frac{n+1}{n} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = s,$$

[1]) Natürlich „uneigentlich", da ja bei eigentlicher Divergenz von $\Sigma a_\nu X^\nu$ allemal $\lim_{\varrho=1-0} \mathfrak{P}(\varrho X) = \infty$ sein müsste (vgl. a. a. O. p. 41).

[2]) Vgl. a. a. O. p. 44.

[3]) Dies folgt unmittelbar aus dem bekannten Cauchy'schen Grenzwerth-Satze: „Es ist $\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{n} = \lim_{n=\infty} (A_n - A_{n-1})$, falls der rechtsstehende Grenzwerth existirt."

also schliesslich:

$$\lim_{n=\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \equiv \sum_1^\infty{}^{\nu}\, a_\nu = s.$$

Es erscheint zweckmässig, dieses Resultat in folgender Weise ausdrücklich zu formuliren:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die *Convergenz* von Σa_ν, also für die Existenz eines endlichen $\lim_{n=\infty} s_n = s$ lässt sich in die beiden Bedingungen (1) und (2) zerlegen, derart dass jede einzelne dieser Bedingungen als eine *nothwendige*, aber erst beide zusammen als *hinreichend* erscheinen.

Hierzu sei noch bemerkt, dass die Beziehung (1) allemal die für die Convergenz nothwendige Bedingung:

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0$$

in sich enthält. Ersetzt man nämlich in (1) n durch $(n-1)$, so folgt, dass für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ bei passender Wahl einer unteren Schranke für n die Ungleichung besteht:

$$|1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + (n-1) \cdot a_{n-1}| < (n-1) \cdot \varepsilon.$$

Da sodann auch:

$$|1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + (n-1) \cdot a_{n-1} + n \cdot a_n| < n \cdot \varepsilon,$$

so folgt durch Subtraction:

$$|n \cdot a_n| < (2n-1) \cdot \varepsilon, \text{ also a fortiori } |a_n| < 2\varepsilon,$$

d. h. schliesslich:

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0.$$

Etwas analoges findet bezüglich der Bedingung (2) nicht statt. Vielmehr sind gerade die zunächst sich darbietenden Beispiele von divergenten Reihen, welche der Bedingung (2) genügen (wie: $\sum_1^\infty{}^{\nu}(-1)^{\nu-1}$), durchweg von der Art, dass $\lim_{n=\infty} |a_n|$ nicht verschwindet. Es entsteht nun naturgemäss die

Frage: Giebt es wirklich divergente, der Bedingung (2) genügende Reihen, deren Glieder den Grenzwerth Null besitzen? Sobald die Existenz derartiger Reihen erwiesen ist, wird dann, wie leicht zu sehen, auch die am Anfange berührte Frage in bejahendem Sinne entschieden sein.

2. Es bedeute m_λ ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots$) eine unbegrenzte Folge wachsender natürlicher Zahlen von der Beschaffenheit, dass:

$$\lim_{\lambda=\infty} (m_{\lambda+1} - m_\lambda) = \infty, \qquad \lim_{\lambda=\infty} \frac{m_{\lambda+1}}{m_\lambda} = 1 \tag{3}$$

(z. B. $m_\lambda = \lambda^p$, wo $p > 1$); ferner sei Σd_ν eine divergente Reihe mit positiven, für $\nu = \infty$ verschwindenden Gliedern von der Art, dass:

$$\lim_{\lambda=\infty} (d_{m_\lambda+1} + d_{m_\lambda+2} + \ldots + d_{m_{\lambda+1}}) = 2A > 0.\text{[1]} \tag{4}$$

Nun wurde gesetzt:

$$\begin{aligned}
\sum_1^\infty{}^{\nu}\, a_\nu = d_1 + \ldots + d_{m_1} - d_1 - \ldots - d_{m_1} \\
+ d_{m_1+1} + \ldots + d_{m_2} - d_{m_1+1} - \ldots - d_{m_2} \\
+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
+ d_{m_{\lambda-1}+1} + \ldots + d_{m_\lambda} - d_{m_{\lambda-1}+1} - \ldots - d_{m_\lambda} \\
+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.,
\end{aligned} \tag{5}$$

so dass also:

---

[1]) Die allgemeinen Beziehungen, welche zwischen den d_ν und m_λ bestehen müssen, damit ein solcher „singulärer Reihenrest" $\sum_{m_\lambda+1}^{m_{\lambda+1}}{}^{\nu}\, d_\nu$ einen gewissen endlichen Grenzwerth besitzt, habe ich in einer früheren Arbeit („Ueber die Werthveränderungen bedingt convergenter Reihen und Producte", Math. Ann. Bd. 22, 1883) ausführlich untersucht (vgl. a. a. O. p. 470; 485 ff.). Handelt es sich, wie im vorliegenden Falle, im wesentlichen nur um die Herstellung specieller Beispiele, so lassen sich die d_ν, m_ν in überaus einfacher Weise auswählen, wie im Texte weiter unten noch gezeigt wird.

$$(6)\quad a_{2m_\lambda+\mu}\begin{cases} = -\,d_{m_\lambda+\mu} \text{ für: } & 1 \leqq \mu \leqq m_{\lambda+1}-m_\lambda \\ = -\,d_{m_\lambda+\mu} \text{ für: } & (m_{\lambda+1}-m_\lambda)+1 \leqq \mu \leqq 2(m_{\lambda+1}-m_\lambda) \end{cases}$$

($\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ und $m_0 = 0$). Ist sodann wiederum $s_n = \sum_1^n {}^\nu a_\nu$, so hat man offenbar:

$$\begin{aligned} s_{2m_\lambda} &= 0 \\ s_{m_\lambda+m_{\lambda+1}} &= d_{m_\lambda+1} + d_{m_\lambda+2} + \ldots + d_{m_{\lambda+1}}, \end{aligned}$$

also:

$$\lim_{\lambda=\infty} s_{2m_\lambda} = 0, \qquad \lim_{\lambda=\infty} s_{m_\lambda+m_{\lambda+1}} = 2A.$$

Da aber die Zahlen s_{2m_λ}, $s_{m_\lambda+m_{\lambda+1}}$ die Minima und Maxima der Folge s_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) liefern, so findet man schliesslich:

$$(7)\qquad \underline{\lim}_{n=\infty}\, s_n = 0, \qquad \overline{\lim}_{n=\infty}\, s_n = 2A,$$

d. h. die Reihe Σa_ν ist u n e i g e n t l i c h d i v e r g e n t, sie oscillirt in den Grenzen 0 und $2A$.

Andererseits ergiebt sich nun:

$$\begin{aligned} s_{2m_{\lambda-1}+1} &= d_{m_{\lambda-1}+1} \\ s_{2m_{\lambda-1}+2} &= d_{m_{\lambda-1}+1} + d_{m_{\lambda-1}+2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{m_{\lambda-1}+m_\lambda} &= d_{m_{\lambda-1}+1} + d_{m_{\lambda-1}+2} + \ldots + d_{m_\lambda} \\ s_{m_{\lambda-1}+m_\lambda+1} &= \phantom{d_{m_{\lambda-1}+1} +{}} d_{m_{\lambda-1}+2} + \ldots + d_{m_\lambda} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{2m_\lambda-1} &= \phantom{d_{m_{\lambda-1}+1} + d_{m_{\lambda-1}+2} + \ldots +{}} d_{m_\lambda} \\ s_{2m_\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned} & s_{2m_{\lambda-1}+1} + s_{2m_{\lambda-1}+2} + \ldots + s_{2m_\lambda} \\ &= (m_\lambda - m_{\lambda-1})\,(d_{m_{\lambda-1}+1} + d_{m_{\lambda-1}+2} + \ldots + d_{m_\lambda}). \end{aligned}$$

Daraus folgt weiter:

$$(8)\qquad \sum_{1}^{2m_\lambda}{}^{\nu}\, s_\nu = m_1(d_1+\dots+d_{m_1}) + (m_2-m_1)(d_{m_1+1}+\dots+d_{m_2}) + \dots$$
$$\dots + (m_\lambda - m_{\lambda-1})(d_{m_{\lambda-1}+1}+\dots+d_{m_\lambda})$$

und sodann mit Benützung des Cauchy-Stolz'schen Grenzwerthsatzes:

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{1}{2m_\lambda} \cdot \sum_{1}^{2m_\lambda}{}^{\nu}\, s_\nu = \lim_{\lambda=\infty} \frac{(m_\lambda - m_{\lambda-1})(d_{m_{\lambda-1}+1}+\dots+d_{m_\lambda})}{2(m_\lambda - m_{\lambda-1})}$$
$$(9)\qquad = A.$$

Bedeutet jetzt n eine ganz beliebige natürliche Zahl, so kann man allemal setzen:

$$2\, m_\lambda \leqq n < 2\, m_{\lambda+1}.$$

Alsdann hat man:

$$\sum_{1}^{2m_\lambda}{}^{\nu}\, s_\nu \leqq \sum_{1}^{n}{}^{\nu}\, s_\nu \leqq \sum_{1}^{2m_{\lambda+1}}{}^{\nu}\, s_\nu$$

und, wegen:

$$\frac{1}{2\, m_{\lambda+1}} < \frac{1}{n} \leqq \frac{1}{2m_\lambda},$$

auch:

$$\frac{1}{2\, m_{\lambda+1}} \cdot \sum_{1}^{2m_\lambda}{}^{\nu}\, s_\nu < \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{n}{}^{\nu}\, s_\nu \leqq \frac{1}{2m_\lambda} \cdot \sum_{1}^{2m_{\lambda+1}}{}^{\nu}\, s_\nu,$$

anders geschrieben:

$$\frac{m_\lambda}{m_{\lambda+1}} \cdot \left(\frac{1}{2m_\lambda} \cdot \sum_{1}^{2m_\lambda}{}^{\nu}\, s_\nu\right) < \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{n}{}^{\nu}\, s_\nu \leqq \frac{m_{\lambda+1}}{m_\lambda} \cdot \left(\frac{1}{2\, m_{\lambda+1}} \cdot \sum_{1}^{2m_{\lambda+1}}{}^{\nu}\, s_\nu\right),$$

und somit schliesslich mit Benützung von Gl. (3) und (9):

$$(10)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{n}{}^{\nu}\, s_\nu = A.$$

Die Reihe $\sum a_\nu$ besitzt also in der That die am Schlusse von Nr. 1 bezeichneten Eigenschaften.[1])

[1]) Auf einem weit weniger elementaren, ja sogar in seinen Grundlagen äusserst complicirten Wege, kann man — worauf mich Herr

Um Reihen dieser Art in der denkbar einfachsten Art wirklich herzustellen, wird man etwa alle diejenigen d_ν, welche in dem Reihen-Schema (5) jedesmal eine Zeile bilden, einander gleich setzen und zwar:

$$(11)\qquad d_\nu = \frac{2A}{m_{\lambda+1} - m_\lambda} \quad \text{für: } m_\lambda + 1 \leqq \nu \leqq m_{\lambda+1},$$

also:

$$(12)\qquad a_{2m_\lambda+\mu} \begin{cases} = \dfrac{2A}{m_{\lambda+1}-m_\lambda} \text{ für: } & 1 \leqq \mu \leqq m_{\lambda+1} - m_\lambda \\ = -\dfrac{2A}{m_{\lambda+1}-m_\lambda} \text{ für: } & (m_{\lambda+1}-m_\lambda)+1 \leqq \mu \leqq 2(m_{\lambda+1}-m_\lambda). \end{cases}$$

An die Stelle der Gleichung (4) tritt dann die folgende, für jedes $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ gültige:

$$(13)\qquad d_{m_\lambda+1} + d_{m_\lambda+2} + \ldots + d_{m_{\lambda+1}} = 2A.$$

Die so definirte Reihe Σa_ν genügt wiederum der Beziehung (10), während sie andererseits in den Grenzen 0 und A oscillirt und auf Grund der ersten Bedingung (3) $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0$ wird. Dabei wird man schliesslich noch die m_λ am einfachsten etwa in der Weise fixiren, dass man setzt $m_{\lambda+1} - m_\lambda = (\lambda+1)^p$ oder auch $m_\lambda = \lambda^{p+1}$, wo p eine natürliche Zahl bedeutet.

3. Setzt man jetzt:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu,$$

L. Fejér aufmerksam gemacht hat — die Existenz derartiger Reihen mit Hülfe eines Satzes nachweisen, den letzterer in den Comptes rendus (10. Dezember 1900) mitgetheilt hat. Darnach genügt die Summe einer Fourier'schen Reihe, welche eine stetige (oder nur mit gewöhnlichen Sprüngen behaftete) Function darstellt, durchweg der Bedingung (10). Da es nun nach Du Bois-Reymond stetige Functionen mit divergenter Fourier'scher Reihen-Entwicklung giebt, so liefert jede solche Reihe, wenn man der Veränderlichen den Werth einer Divergenz-Stelle beilegt, ein Beispiel der verlangten Art. (Vgl. im übrigen die Bemerkung am Schlusse von Nr. 3.)

wo Σa_ν eine Reihe von der eben construirten Art vorstellt, so hat man, wegen $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_1^n{}^\nu s_\nu = A$, nach einem bekannten, von Herrn Frobenius bewiesenen Satze[1]) zunächst:

$$\lim_{\varrho=1-0} \mathfrak{P}(\varrho) = A,$$

wenn ϱ eine positive reelle Veränderliche bedeutet. Der betreffende Satz lässt sich aber, wie weiter unten (s. Nr. 6) noch gezeigt werden soll, analog wie der Abel'sche Satz über den Grenzwerth einer für $x = 1$ noch convergenten $\mathfrak{P}(x)$,[2]) dahin erweitern, dass aus $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_1^n{}^\nu s_\nu = A$ allemal geschlossen werden kann:

$$\lim_{x=1} \mathfrak{P}(x) = A,$$

wenn x auf einem beliebigen Strahle (bezw. einer beliebigen den Einheitskreis nicht tangirenden Curve) aus dem Innern des Einheitskreises der Stelle 1 zustrebt. Damit wäre dann aber die zu Anfang ausgesprochene Behauptung vollständig bewiesen, d. h. es gilt der Satz:

Die Bedingungen:

$$\lim_{x=1} \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = A, \qquad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0$$

sind für die Convergenz von Σa_ν zwar nothwendig, aber keineswegs ausreichend.

Man bemerke noch, dass bei geeigneter Auswahl der a_ν die Reihe $\Sigma |a_\nu - a_{\nu+1}|$ convergent ausfällt, somit $\Sigma a_\nu x^\nu$ noch auf dem ganzen Einheitskreise mit Ausnahme der einzigen Stelle $x = 1$ convergirt und zwar, nach Ausschluss eines beliebig kleinen, die Stelle 1 umgebenden Bogens, gleichmässig. Definirt man nämlich die a_ν durch die Gleichungen (12), so wird im allgemeinen:

$$a_\nu - a_{\nu+1} = 0,$$

---

[1]) Journal f. Math. Bd. 89 (1880), p. 262.

[2]) Vgl. Sitz.-Ber. Bd. 27 (1897), p. 347.

nur:

$$(14)\quad \begin{cases} a_{2m_\lambda} - a_{2m_\lambda+1} = -\left(\dfrac{1}{m_\lambda - m_{\lambda-1}} + \dfrac{1}{m_{\lambda+1} - m_\lambda}\right) \\ a_{m_\lambda+m_{\lambda+1}} - a_{m_\lambda+m_{\lambda+1}+1} = \dfrac{2}{m_{\lambda+1} - m_\lambda} \end{cases}$$

(wenn man noch der Einfachheit halber $2A = 1$ annimmt). Darnach wird aber $\Sigma \mid a_\nu - a_{\nu+1} \mid$ allemal convergent, wenn die m_λ so gewählt werden, dass $\Sigma (m_{\lambda+1} - m_\lambda)^{-1}$ convergirt, also z. B. $m_{\lambda+1} - m_\lambda = (\lambda + 1)^p$ oder auch $m_\lambda = \lambda^{p+1}$, wo $p \geqq 2$.

Die zur Potenzreihe $\Sigma a_\nu x^\nu$ gehörige Randfunction $f(x)$ ist dann bis in beliebige Nähe der Stelle $x = 1$ vollkommen stetig und für $x = 1$ selbst noch „nach Innen“ stetig. Fraglich bleibt nur noch das Verhalten von $f(x)$ für die der Stelle $x = 1$ benachbarten Randpunkte, also das Verhalten von $f(e^{\vartheta i})$ in der Nähe von $\vartheta = 0$. Jedenfalls erscheint die Stetigkeit auch hier keinesfalls a priori ausgeschlossen. Gelänge es, dieselbe an irgend einem zweckmässig gewählten Beispiele der vorliegenden Art wirklich festzustellen, so wäre damit eine Frage in verneinendem Sinne entschieden, die ich in der zu Anfang citirten Arbeit noch als eine offene bezeichnet habe:[1]) nämlich, ob die vollkommene Stetigkeit der Randfunction stets auch die durchgängige Convergenz von $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ nach sich ziehen müsse. Durch die blosse Existenz von stetigen Functionen $\psi(\vartheta)$ mit divergenter Fourier'scher Reihenentwickelung wird, wie a. a. O. des näheren ausgeführt ist, die Möglichkeit jener Annahme noch keineswegs beseitigt.

4. Um den Frobenius'schen Satz in der angedeuteten Weise zu verallgemeinern schicke ich zunächst den folgenden Hülfssatz voraus:[2])

---

[1]) a. a. O. p. 98.

[2]) Dieser Hülfssatz ist auch geeignet, die etwas weniger einfache, einen analogen Zweck verfolgende Betrachtung zu ersetzen, welche ich beim Beweise des verallgemeinerten Abel'schen Satzes (a. a. O. p. 348) benützt habe.

Wegen $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot |s_n| = |A|$ hat jede Zahlenfolge $\frac{|s_\nu|}{\nu}$ für $\nu = (m+1), (m+2), \ldots$ *in inf.* eine endliche obere Grenze, welche mit σ_m bezeichnet werden möge. Darnach ergibt sich weiter:

$$|\mathfrak{P}(x)| < |1-x| \left\{ \sigma_0 \cdot \sum_1^n \nu + \sigma_n \cdot \sum_{n+1}^\infty \nu \cdot |x|^\nu \right\}$$

$$< |1-x| \cdot \left\{ \tfrac{1}{2} \sigma_0 \cdot n(n+1) + \sigma_n \cdot \frac{1}{(1-|x|)^2} \right\}$$

und somit:

$$|(1-x) \cdot \mathfrak{P}(x)| < \tfrac{1}{2} \sigma_0 \cdot n(n+1) \cdot |1-x|^2 + \sigma_n \cdot \left(\frac{|1-x|}{1-|x|} \right)^2$$

$$< \tfrac{1}{2} \sigma_0 \cdot n(n+1) \cdot |1-x|^2 + \gamma^2 \cdot \sigma_n \text{ (nach Ungl. (15))}.$$

Es werde nun zunächst angenommen, dass $A = 0$. Alsdann kann σ_n durch passende Wahl von n beliebig klein, etwa:

$$\gamma^2 \cdot \sigma_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

gemacht werden, wenn ε eine positive Zahl von vorgeschriebener Kleinheit bedeutet. Wird jetzt noch x derartig eingeschränkt, dass:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \sigma_0 \cdot n(n+1) \cdot |1-x|^2 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \left(\text{also: } |1-x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma_0 \cdot n(n+1)}} \right),$$

so hat man:

$$|(1-x) \cdot \mathfrak{P}(x)| < \varepsilon,$$

also schliesslich:

$$(18) \quad \lim_{x=1} (1-x) \cdot \mathfrak{P}(x) = 0 \quad \text{d. h.} \quad \lim_{x=1} (1-x) \cdot \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = 0.$$

Bedeutet jetzt A eine beliebige von Null verschiedene Zahl, so kann die Beziehung

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = A \quad \text{d. h.} \quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n{}^\nu a_\nu = A$$

zunächst folgendermaassen geschrieben werden:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n{}^\nu (a_\nu - A) = 0.$$

Alsdann ergiebt sich aber auf Grund des eben gewonnenen Resultates (Gl. (18)):

$$\lim_{x=1}(1-x)\cdot\sum_1^\infty{}^\nu (a_\nu - A)\cdot x^\nu = 0,$$

anders geschrieben:

$$\lim_{x=1}(1-x)\cdot\left\{\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu - A\frac{x}{1-x}\right\} = 0$$

also schliesslich, wie behauptet:

$$\lim_{x=1}(1-x)\cdot\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = A.$$

6. Da nach dem Cauchy'schen Grenzwerth-Satze die Beziehung $\lim\limits_{n=\infty}\frac{s_n}{n} = A$ sicher erfüllt ist, wenn $\lim\limits_{n=\infty} a_n = A$, so folgt noch, dass auch diese letztere Bedingung für die Existenz der Relation (16[b]) hinreichend ist.

Ersetzt man ferner in dem zuvor gewonnenen Satze a_ν durch s_ν, so ergiebt sich:

Ist:

$$(19^{a})\qquad \lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_1^n{}^\nu s_\nu = A,$$

so hat man:

$$(19^{b})\quad \lim_{x=1}(1-x)\cdot\sum_1^\infty{}^\nu s_\nu x^\nu = A,\quad \text{also:}\quad \lim_{x=1}\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = A,$$

d. h. man erhält die oben angekündigte Verallgemeinerung des Frobenius'schen Satzes.

Da wiederum die Bedingung (19[a]) sicher erfüllt ist, wenn $\lim\limits_{n=\infty} s_n = A$, so resultirt noch als specieller Fall der verallgemeinerte Abel'sche Satz.

7. Der Satz von Nr. 5 gestattet unmittelbar noch die folgende Verallgemeinerung:[1])

---

[1]) Zugleich Verallgemeinerung des a. a. O. p. 49, Fussnote, angeführten Satzes. (NB. Daselbst steht in Folge eines Druckfehlers

$$\lim_{\varrho=1}(1-\varrho)^{1-p}\cdot\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu\varrho^\nu \text{ statt: } \lim_{\varrho=1}(1-\varrho)^{p}\cdot\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu\varrho^\nu).$$

Ist:

$$(20^a) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n^p} \sum_1^n{}^{\nu}\, a_\nu = \lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n^p} = A \quad (p > 0),^1)$$

so ist $\sum a_\nu x^\nu$ convergent für $|x| < 1$ und man hat:

$$(20^b) \qquad \lim_{x=1} (1-x)^p \cdot \sum_1^\infty{}^{\nu}\, a_\nu\, x^\nu = \Gamma(p+1) \cdot A.$$

Beweis: Aus (20^a) folgt, dass auch: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{s_{n-1}}{n^p} = A$ und somit:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^p} = \lim_{n=\infty} \frac{s_n - s_{n-1}}{n^p} = 0.$$

Da sodann für $\varrho < 1$: $\lim\limits_{n=\infty} n^p \cdot \varrho^n = 0$, so ergiebt sich durch Multiplication mit der vorhergehenden Gleichung:

$$\lim_{n=\infty} a_n\, \varrho^n = 0,$$

sodass $\sum a_\nu x^\nu$ sicher für $|x| < \varrho$, also schliesslich für $|x| < 1$ convergirt.

Man hat dann wiederum, wie in Nr. 5 (s. Ungl. (17)):

$$|\mathfrak{P}(x)| < |1-x| \cdot \left\{ \sum_1^n{}^{\nu}\, |s_\nu| + \sum_{n+1}^\infty{}^{\nu}\, |s_\nu| \cdot |x|^\nu \right\}.$$

Aus der Voraussetzung:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n^p} = A$$

folgt mit Berücksichtigung der bekannten Beziehung:

---

[1]) Die zum Beweise dienlichen Schlüsse bleiben auch noch gültig für: $0 \geqq p > -1$. Die Reihe $\Sigma a_\nu x^\nu$ ist alsdann für die Stelle $x = 1$ nicht mehr divergent, sondern convergent und zwar mit der Summe $\lim\limits_{n=\infty} s_n = 0$, wenn $p < 0$. Die Gleichung (20^b) macht also in diesem Falle eine bestimmte Aussage über die Art des Nullwerdens von $\lim\limits_{x=1} \sum_1^\infty{}^{\nu}\, a_\nu x^\nu$. Für den Fall $p = 0$ resultirt wiederum der Abel'sche Satz: $\lim\limits_{x=1} \sum_1^\infty{}^{\nu}\, a_\nu x^\nu = \lim\limits_{n=\infty} s_n$.

$$\lim_{n=\infty} \frac{(p+n)_n}{n^p} = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \tag{21}$$

$$\left(\text{wo: } (p+n)_n = \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}{1\cdot 2\ldots n} = \frac{\Gamma(p+n+1)}{\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(n+1)}\right)$$

dass:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{(p+n)_n} = \Gamma(p+1)\cdot A. \tag{22}$$

Jede Zahlenfolge $\dfrac{|s_\nu|}{(p+\nu)_\nu}$ für $\nu = (m+1), (m+2), \ldots$ *in inf.* hat also eine endliche obere Grenze, welche mit σ_m bezeichnet werden möge. Darnach ergiebt sich aus der obigen Ungleichung die folgende:

$$|\mathfrak{P}(x)| < |1-x| \cdot \left\{\sigma_0 \cdot \sum_1^n{}^{\nu} (p+\nu)_\nu + \sigma_n \cdot \sum_{n+1}^\infty{}^{\nu} (p+\nu)_\nu \cdot |x|^\nu \right\}$$

$$< |1-x| \cdot \left\{\sigma_0 \cdot (p+n+1)_n + \sigma_n \cdot \frac{1}{(1-|x|)^{p+1}}\right\}$$

wegen:

$$\sum_0^n (p+\nu)_\nu = (p+n+1)_n{}^{1)} \tag{23}$$

$$\sum_0^\infty (p+\nu)_\nu \cdot |x|^\nu = (1-|x|)^{-(p+1)}, \tag{24}$$

und, wenn man die letzte Ungleichung noch mit $|1-x|^p$ multiplicirt:

$$|(1-x)^p\cdot\mathfrak{P}(x)| < |1-x|^{p+1}\cdot\sigma_0\cdot(p+n+1)_n + \sigma_n\left(\frac{|1-x|}{1-|x|}\right)^{p+1} \tag{25}$$

$$< |1-x|^{p+1}\cdot\sigma_0\cdot(p+n+1)_n + \gamma^{p+1}\cdot\sigma_n \text{ (nach Ungl. (15))}.$$

---

[1]) Man hat zunächst: $p_0 + (p+1)_1 = 1 + (p+1) = (p+2)_1.$

Angenommen man habe: $\sum\limits_0^{n-1} (p+\nu)_\nu = (p+n)_{n-1}$,

so folgt unmittelbar: $\sum\limits_0^n{}^{\nu} (p+\nu)_\nu = (p+n)_{n-1} + (p+n)_n = (p+n+1)_n.$

Es werde nun zunächst wiederum $A = 0$ angenommen. Man kann dann n derart fixiren, dass:

$$\gamma^{p+1} \cdot \sigma_n < \frac{\varepsilon}{2},$$

darauf x nahe genug an 1 annehmen, dass auch:

$$|1 - x|^{p+1} \cdot \sigma_0 \cdot (p + n + 1)_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alsdann wird:

$$|(1 - x)^p \cdot \mathfrak{P}(x)| < \varepsilon,$$

und daher schliesslich:

$$\lim_{n=\infty} (1 - x)^p \cdot \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = 0. \tag{26}$$

Bedeutet jetzt A eine von Null verschiedene Zahl, so kann die Voraussetzung (20[a]) zunächst durch die Beziehung (22) ersetzt werden. Man hat nun aber nach Gl. (23), wenn man darin p durch $p - 1$ ersetzt:

$$\sum_0^n {}^\nu (p + \nu - 1)_\nu = (p + n)_n$$

für jedes positive ganzzahlige n, also auch:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{(p + n)_n} \cdot \sum_0^n {}^\nu (p + \nu - 1)_\nu = 1. \tag{27}$$

Fügt man diesen letzteren Grenzwerth der rechten Seite von Gl. (22) als Factor hinzu, so lässt sich dieselbe folgendermaassen schreiben:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{(p + n)_n} \cdot \left\{ s_n - \Gamma(p+1) \cdot A \cdot \sum_0^n {}^\nu (p + \nu - 1)_\nu \right\} = 0,$$

oder auch, wenn man s_n durch $\sum_0^n {}^\nu a_\nu$ ersetzt (wo: $a_0 = 0$), mit Berücksichtigung von Gl. (21):

$$(28) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n^p} \cdot \sum_0^n{}^{\nu} \left\{ a_\nu - \Gamma(p+1) \cdot A \cdot (p+\nu-1)_\nu \right\} = 0.$$

Die Anwendung des in Gl. (23) enthaltenen Resultates giebt alsdann:

$$\lim_{x=1} (1-x)^p \cdot \sum_0^\infty{}^{\nu} \left\{ a_\nu - \Gamma(p+1) \cdot A \cdot (p+\nu-1)_\nu \right\} \cdot x^\nu = 0,$$

anders geschrieben:

$$\lim_{x=1} (1-x)^p \cdot \left\{ \sum_1^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu - \Gamma(p+1) \cdot A (1-x)^{-p} \right\} = 0,$$

also schliesslich, wie behauptet:

$$(29) \qquad \lim_{x=1} (1-x)^p \cdot \sum_1^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu = \Gamma(p+1) \cdot A.^{1)}$$

8. Nach dem Cauchy-Stolz'schen Grenzwerth-Satze hat man:[2])

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n^p} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^p - (n-1)^p}$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^{p-1}} \left[\text{wegen: } n^p - (n-1)^p = n^p \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^p \right) \cong p \cdot n^{p-1} \right]$$

falls der rechts stehende Grenzwerth existirt. Ist nun:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^{p-1}} = A',$$

so wird also:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n^p} = \frac{1}{p} \cdot A',$$

---

[1]) Der Satz findet sich auch in einer jüngst erschienenen Arbeit des Herrn E. Lasker („Ueber Reihen auf der Convergenzgrenze." Lond. Philos. Transactions, Vol. 196 [1901], p. 438) als Folgerung aus einem allgemeinerem Grenzwerth-Satze. Der Beweis enthält indessen einen auf verkehrter Anwendung einer Ungleichung beruhenden Trugschluss (a. a. O. p. 437).

[2]) Hier ist die Bedingung $p > 0$ durchaus wesentlich.

und die Gleichung (29) liefert somit, wenn man noch berücksichtigt, dass:

$$\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$$

den folgenden, für reelle positive x und A' von Herrn Appell bewiesenen[1]) Satz:

Ist:

$$(30^a) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^{p-1}} = A' \ (p > 0),$$

so hat man:

$$(30^b) \qquad \lim_{x=1} (1-x)^p \cdot \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = \Gamma(p) \cdot A'.$$

9. Dem Satze in Nr. 7 lässt sich der folgende an die Seite stellen:

Ist:

$$(31^a) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{s_n}{\lg n} = A,$$

so hat man:

$$(31^b) \qquad \lim_{x=1} \left(\lg \frac{1}{1-x}\right)^{-1} \cdot \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = A.$$

Beweis. Aus Ungl. (17) folgt, wenn man die obere Grenze von $\frac{|s_\nu|}{\lg \nu}$ für $\nu = (m+1), (m+2) \ldots$ *in inf.* mit σ_m bezeichnet:

$$|\mathfrak{P}(x)| < |1-x| \left\{ \sum_1^n {}^\nu |s_\nu| + \sigma_n \cdot \sum_{n+1}^\infty {}^\nu \lg \nu \cdot |x|^\nu \right\}.$$

---

[1]) Comptes rendus, T. 87 (1878), p. 690. Auch: Picard, Traité d'Analyse, T. I (1891), p. 210, jedoch mit der Beschränkung $p > 1$. — Für complexe x findet sich der Satz als Folgerung aus einem allgemeineren Satze bei Herrn Hadamard: Journ. de Math. (4), T. 8 (1892), p. 176 (NB. Auf der rechten Seite derjenigen Relation, welche der Gl. (30^b) entspricht, steht dort fälschlich A statt: $\Gamma(\omega) \cdot A$, was wohl lediglich auf einem Schreibfehler beruhen dürfte.)

Da sodann:

$$|1-x| \cdot \sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} \lg \nu \cdot |x|^{\nu} < \gamma \cdot (1-|x|) \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \lg \nu \cdot |x|^{\nu}$$
$$= \gamma \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} (\lg(\nu+1) - \lg \nu) \cdot |x|^{\nu}$$
$$< \gamma \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{1}{\nu} \cdot |x|^{\nu} = \gamma \cdot \lg \frac{1}{1-|x|}$$
$$< \gamma \left(\lg \frac{1}{|1-x|} + \lg \gamma \right)$$

so folgt:

$$|\mathfrak{P}(x)| < |1-x| \cdot \sum_{1}^{n}{}^{\nu} |s_{\nu}| + \sigma_n \cdot \gamma \left(\lg \frac{1}{|1-x|} + \lg \gamma \right),$$

also, wenn man noch mit $\left| \lg \frac{1}{1-x} \right|^{-1}$ multiplicirt und beachtet,

dass $\left| \lg \frac{1}{1-x} \right| > \lg \frac{1}{|1-x|}$:

$$\left| \left(\lg \frac{1}{1-x} \right)^{-1} \cdot \mathfrak{P}(x) \right| < |1-x| \cdot \left| \lg \frac{1}{1-x} \right|^{-1} \cdot \sum_{1}^{n}{}^{\nu} |s_{\nu}|$$
$$+ \sigma_n \cdot \gamma \left(1 + \lg \gamma \cdot \left| \lg \frac{1}{1-x} \right|^{-1} \right).$$

Daraus folgt dann zunächst wieder im Falle $A = 0$ (also: $\lim\limits_{n=\infty} \sigma_n = 0$), dass:

$$\lim_{x=1} \left(\lg \frac{1}{1-x} \right)^{-1} \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} a_{\nu} x^{\nu} = 0. \tag{32}$$

Ist nun andererseits A von 0 verschieden, so lässt sich mit Berücksichtigung der bekannten Relation:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\lg n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \frac{1}{\nu} = 1$$

die Voraussetzung (31^{a}) auf die Form bringen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\lg n} \left(s_n - A \cdot \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \frac{1}{\nu} \right) = 0,$$

anders geschrieben:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\lg n} \cdot \sum_1^n {}^{\nu} \left(a_\nu - A \cdot \frac{1}{\nu}\right) = 0.$$

Die Anwendung des in Gl. (32) enthaltenen Resultates giebt dann zunächst:

$$\lim_{x=1} \left(\lg \frac{1}{1-x}\right)^{-1} \cdot \sum_1^\infty {}^{\nu} \left(a_\nu - A \cdot \frac{1}{\nu}\right) \cdot x^\nu = 1$$

also, wegen: $\sum_1^\infty {}^{\nu} \frac{1}{\nu} \cdot x^\nu = \lg \frac{1}{1-x}$, schliesslich, wie behauptet:

$$\lim_{x=1} \left(\lg \frac{1}{1-x}\right)^{-1} \cdot \sum_1^\infty {}^{\nu}\, a_\nu\, x^\nu = A.$$

10. Da wiederum nach dem Cauchy-Stolz'schen Grenzwerth-Satze:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{\lg n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\lg n - \lg(n-1)}$$
$$= \lim_{n=\infty} n\, a_n,$$

falls dieser letztere Grenzwerth existirt, so erweist sich auch die Bedingung

(33) $$\lim_{n=\infty} n \cdot a_n = A$$

als hinreichend für die Existenz der Beziehung (31^b).[1])

Einen allgemeineren Satz, welcher die in Nr. 5—10 angegebenen Sätze als specielle Fälle enthält, werde ich in einem demnächst in den Acta mathematica erscheinenden Aufsatze mittheilen.

---

[1]) Für reelle positive x und A wiederum bei Appell, Comptes rendus, a. a. O.

Berichtigung zu A. Korn, Allgemeine Lösung des Problems der magnetischen Induktion S. 435, ist Zeile 6 von oben vor „Gesammtpotential einzuschalten: „inducierte".