

**Sitzungsberichte**  
der  
**mathematisch-physikalischen Classe**  
der  
**k. b. Akademie der Wissenschaften**  
zu München.

---

1901. Heft I.

---



**München.**  
Verlag der k. Akademie  
1901.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Neuber)

## Der Druck des Lichts auf kleine Kugeln und die Arrhenius'sche Theorie der Cometenschweife.

Von **Karl Schwarzschild.**

(Eingelaufen 6. Juli.)

Die eigentümlichen Formen der Cometenschweife lassen sich erklären durch Annahme einer abstossenden Kraft, die von der Sonne auf die äusserst fein verteilte Schweifmaterie ausgeübt wird. Während früher diese Kraft nur ganz vage als elektrischen Ursprungs bezeichnet wurde, hat vor kurzem Herr Sv. Arrhenius<sup>1)</sup> darauf hingewiesen, dass solche abstossende Wirkungen dem Druck entspringen können, welchen nach der Maxwell'schen Theorie die Sonnenstrahlung auf jeden absorbierenden oder reflektierenden Körper ausübt. Ueber die Existenz des Maxwell'schen Drucks der Lichtstrahlen kann kein Zweifel sein, obwohl er experimentell mit hinreichender quantitativer Sicherheit noch nicht nachgewiesen wurde. Er muss bestehen, wofern die Grundauffassung Maxwell's richtig ist, dass in den Lichtschwingungen eben elektrische Kräfte oscillieren, Kräfte, welche die geladenen Ionenpaare der ponderablen Massen angreifen. Zudem haben sich die Folgerungen, welche sich aus den Hauptsätzen der mechanischen Wärmetheorie in Verbindung mit dem Maxwell'schen Druck ergaben, an der Erfahrung glänzend bestätigt. Es liegt daher in dem Druck der Lichtstrahlen eine *causa realis*, eine bei der Bildung der Cometenschweife, wie auch bei anderen Himmels-

<sup>1)</sup> Physikalische Zeitschrift. II. Jahrgang. Heft 6—7.

erscheinungen, zweifellos in irgend einem geringeren oder stärkeren Grade mitwirkende Ursache vor. Die Frage ist nur, ob dieser Druck quantitativ hinreichende Beträge erlangen kann, und das ist ein Punkt, in dem die Darlegungen von Arrhenius nicht ganz befriedigend sind.

Fällt eine ebene Welle normal auf eine vollkommen schwarze Platte, so erleidet letztere einen Druck, der nach Maxwell gleich der in der Volumeneinheit enthaltenen Energie  $E$  des Wellenzuges ist. Auf eine vollkommen schwarze Kugel vom Radius  $a$ , welche das Licht über eine Fläche von der Grösse  $\pi a^2$  hin abfängt, wird daher ein Druck  $\pi a^2 E$  wirken. Die auf dieselbe Kugel wirkende Schwerkraft hat den Betrag  $\frac{4\pi}{3} g \cdot s \cdot a^3$ , wo  $g$  die Schwerebeschleunigung,  $s$  das spezifische Gewicht des Kugelmateriales ist. Je kleiner der Kugelradius  $a$ , um so stärker wird daher der Druck im Verhältnis zur Schwerkraft. Unter Annahme der Solarkonstante 2.5 und des spezifischen Gewichtes  $s$  gleich 0.8 (Kohlenwasserstoff der Cometen) findet man mit Herrn Arrhenius, dass bei einem Kugeldurchmesser von  $1.9 \mu$  der Druck gleich der Schwerkraft wird. Sinkt der Kugeldurchmesser bis auf  $0.1 \mu$  herab, so übertrifft die abstossende Kraft der Sonnenstrahlung die Schwerkraft um das 18.5fache, und erreicht damit den Höchstbetrag, welcher zur Erklärung der gestrecktesten Cometenschweife erforderlich ist.<sup>1)</sup>

In dieser Berechnung des Drucks liegt nun eine Ungenauigkeit. Der Druckwert  $\pi a^2 E$  gilt nur, solange die Kugel das auffallende Licht gänzlich abfängt und in dem Raume hinter ihr völliger Schatten ist, solange man also die Beugungserscheinungen vernachlässigt. Das ist bei grossen Kugeln gestattet. Bei Kugeln aber, deren Durchmesser von der Grössenordnung der Wellenlängen des Lichts ist, — und gerade solche kommen nach den eben angeführten Zahlen für die Erklärung der Cometenschweife in Betracht — können

<sup>1)</sup> Vgl. Bredichin, Annales de l'Observatoire de Moscou. 1886.

durch die Beugung des Lichts die Verhältnisse sehr wesentlich geändert werden. Um ganz kleine Kugeln, deren Radius auch gegen die Wellenlänge sehr klein ist, schlägt die Lichtwoge herum, ohne in ihrem Verlaufe merklich gestört zu werden, und man kann sich hier durch einfache Ueberlegungen analog denen, auf welche Lord Rayleigh<sup>1)</sup> seine Theorie der blauen Farbe des Himmels gründet, überzeugen, dass mit fortwährender Verringerung des Kugelradius der Druck des Lichts sogar wieder mehr und mehr unter die Schwerkraft herabsinken muss. Das Verhältnis des Lichtdrucks zur Schwerkraft wächst also nicht immerfort mit Verkleinerung des Kugelradius, sondern erreicht ein gewisses Maximum für Kugeln von der Grössenordnung der Wellenlänge. Es ist erst noch zu untersuchen, ob das maximale mögliche Verhältnis von Lichtdruck zu Schwerkraft wirklich den Wert 18.5 erreicht, den man, wie erwähnt, zur Erklärung der gestrecktesten Cometenschweife braucht.

Ohne auf die schwer diskutablen Fragen einzugehen, inwieweit eine Anschauung, welche die Cometenschweife aus lauter getrennten Tröpfchen im leeren Raum bestehen lässt, sich unseren sonstigen Kenntnissen von den Cometen anschliesst, will ich hier versuchen, nur über diesen einen quantitativen Punkt zu entscheiden. Irgendwo in der Welt muss es ja vorkommen, dass ein kleines Teilchen im leeren Raum dem Druck des Lichts ausgesetzt ist, und daher ist dem Resultate der Rechnung in jedem Falle die physikalische Anwendbarkeit gewiss, auch wenn sich aus andern Gründen etwa die Arrhenius'sche Theorie der Cometenschweife nicht halten lassen sollte.

Bekanntlich ist der Begriff des vollkommen schwarzen Körpers mathematisch nicht exakt zu fassen und es erscheint auch physikalisch höchst zweifelhaft, ob ein Partikelchen irgend eines gewöhnlichen schwarzen Körpers von  $0.1 \mu$  bis  $1 \mu$  Durchmesser noch im geringsten Eigenschaften aufweist, nach denen man es als „schwarz“ bezeichnen könnte. Zur exakteren Be-

---

<sup>1)</sup> Philosoph. Magazine. 1871.

rechnung der Grösse des Lichtdrucks habe ich daher die kleine Kugel, die wir in den Strahlenzug eingeschaltet denken, nicht als vollkommen schwarz, sondern als vollkommen reflektierend vorausgesetzt. Es ist anzunehmen, dass für vollkommen reflektierendes Material der Lichtdruck besonders gross wird und man daher auf Grund dieser Annahme eben das Gewünschte, nämlich eine obere Grenze für den Lichtdruck, erhält.

Abgesehen von der Beziehung zur Theorie der Cometen-schweife darf das Folgende vielleicht auch ein gewisses selbstständiges Interesse für sich in Anspruch nehmen. Bevor der Druck des Lichts auf eine Kugel berechnet werden konnte, musste eine exakte Theorie der Reflexion und Beugung des Lichts durch die Kugel gegeben werden. Es ist das ein Problem, dem schon Clebsch in Bd. 61 des Crelle'schen Journals eine umfangreiche Abhandlung gewidmet hat.<sup>1)</sup> Indessen hat Clebsch Grenzbedingungen benutzt, die wir heute nicht mehr als gültig anerkennen. Er nimmt an, dass im Aether neben den transversalen Wellen auch longitudinale auftreten können, verlangt, dass an der Oberfläche der vollkommen spiegelnden Kugel alle drei Componenten der elastischen Verschiebung verschwinden, und wird dann notgedrungen zu der Folgerung geführt, dass aus einfallenden Transversalwellen durch Reflexion an der Kugel Longitudinalwellen entstehen. Clebsch hat ausserdem in die Behandlung dieses speziellen Problems die Ableitung zahlreicher allgemeiner Sätze aus der Theorie der Kugel- und Cylinderfunktionen eingeschachtelt, die damals wohl noch weniger in den festen Wissensbestand übergegangen waren, und das belastet seine Darstellung, so wertvoll jene Ableitungen an und für sich sind. Daher wäre eine Neubehandlung des Problems schon von formalem Gesichtspunkt aus wünschenswert gewesen, wenn sie nicht durch die erwähnte Aenderung der Grenzbedingungen notwendig geworden wäre.

---

<sup>1)</sup> Hierauf bin ich erst nach Ausführung dieser Arbeit durch eine freundliche Mitteilung von Herrn Prof. A. Sommerfeld aufmerksam gemacht worden.

### § 1. Mathematische Formulierung des Beugungsproblems.

Das zunächst zu behandelnde Beugungsproblem ist dieses. Eine Kugel vom Radius  $a$  habe ihren Mittelpunkt im Nullpunkt des Coordinatensystems. Eine ebene Welle falle in der Richtung der  $x$ -Axe von ihrer positiven Seite her ein. Wir wollen zunächst annehmen, dass dieselbe linear polarisiert sei und zwar so, dass die elektrische Kraft in der  $x, y$  Ebene schwingt. Für die Componenten  $X, Y, Z, L, M, N$  der elektrischen und magnetischen Kraft gelten überall ausserhalb der Kugel die Maxwell'schen Gleichungen:

$$\frac{1}{V} \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \quad \frac{1}{V} \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} \quad (V = \text{Lichtgeschwindigkeit})$$

nebst den entsprechenden durch cyklische Vertauschung der Coordinaten entstehenden. Die Kugel selbst soll vollkommen reflektierend oder mit anderen Worten ein vollkommener Leiter sein. Dann ist ihre Oberfläche unter allen Umständen eine Niveaufläche der elektrischen Kraft, die in die Oberfläche fallenden Kraftcomponenten müssen verschwinden, es müssen die Beziehungen gelten:

Auf der Kugeloberfläche:

$$Xy - Yx = Xz - Zx = Yz - Zy = 0.$$

Im Unendlichen muss die Componente  $Y$  der elektrischen Kraft ein Glied der Form  $\cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\tau} \right)$  enthalten, welches die ebene polarisierte einfallende Welle darstellt. Deren Wellenlänge ist zugleich durch diesen Ansatz zu  $\lambda$ , ihre Periode zu  $\tau$  und ihre Amplitude und Intensität zu 1 festgelegt. Sonst dürfen in  $X, Y, Z$  im Unendlichen keine Glieder vorkommen, welche die physikalische Bedeutung einfallender Wellenzüge haben.

Wir setzen nun:

$$\begin{aligned} X &= \text{pars real } (\xi e^{iqt}) & L &= \text{pars real } (\lambda e^{iqt}) \\ Y &= \text{pars real } (\eta e^{iqt}) & M &= \text{pars real } (\mu e^{iqt}) \\ Z &= \text{pars real } (\zeta e^{iqt}) & N &= \text{pars real } (\nu e^{iqt}) \end{aligned} \quad 1)$$

$$q = \frac{2\pi}{\tau},$$

wobei  $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$  von der Zeit unabhängige komplexe Grössen sein sollen, und erhalten an Stelle der Maxwell'schen Gleichungen die folgenden:

$$ik\lambda = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad ik\mu = \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad ik\nu = \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad 2)$$

$$ik\xi = \frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{\partial \nu}{\partial y} \quad ik\eta = \frac{\partial \nu}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial z} \quad ik\zeta = \frac{\partial \lambda}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial x} \quad 3)$$

$$k = \frac{2\pi}{\tau V} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad 4)$$

Durch Elimination der magnetischen Componenten  $\lambda, \mu, \nu$  ergibt sich daraus:

$$k^2 \xi + \Delta^2 \xi = 0 \quad k^2 \eta + \Delta^2 \eta = 0 \quad k^2 \zeta + \Delta^2 \zeta = 0. \quad 5)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0. \quad 6)$$

Die Randbedingungen auf der Kugeloberfläche gehen durch Einführung von  $\xi, \eta, \zeta$  über in:

$$\xi y - \eta x = \xi z - \zeta x = \eta z - \zeta y = 0. \quad 7)$$

Für das Unendliche folgt, dass  $\eta$  ein Glied:

$$\bar{\eta} = e^{ikz} \quad 8)$$

entsprechend der ebenen einfallenden Welle enthalten muss und dass sonst in  $\xi, \eta, \zeta$  keine Teile vorkommen dürfen, welche physikalisch die Bedeutung aus dem Unendlichen einfallender Wellen besitzen. Unsere Aufgabe ist jetzt, drei „Wellenpotentiale“ (Lösungen der Differentialgleichung  $k^2 u + \Delta^2 u = 0$ )  $\xi, \eta, \zeta$  zu finden, welche durch die Bedingung (6) verknüpft

sind, auf der Oberfläche der Kugel den Bedingungen (7) und im Unendlichen der Bedingung (8) genügen.

## § 2. Ansatz der Lösung in Form von Reihenentwicklungen nach Kugel- und Bessel'schen Functionen.

Man führe Polarkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  ein durch die Beziehungen:

$$x = r \cos \vartheta \quad y = r \sin \vartheta \cos \varphi \quad z = r \sin \vartheta \sin \varphi. \quad (9)$$

Es ist bekannt,<sup>1)</sup> dass die Differentialgleichung  $k^2 u + \Delta^2 u = 0$  sog. „Zerfällung“ nach den drei Coordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  gestattet, d. h., dass ein partikuläres Integral gegeben wird durch den Ansatz:

$$u = R \cdot \Theta \cdot \Phi. \quad (10)$$

Hierbei bedeutet  $\Phi$  eine Funktion von  $\varphi$  allein und zwar in unserem Falle  $\cos n \varphi$  oder  $\sin n \varphi$  ( $n$  ganzzahlig),  $\Theta$  ist eine Funktion von  $\vartheta$  allein und zwar die  $n$ . Zugeordnete der Kugelfunktion irgend einer Ordnung  $m$ , für die wir  $P_{m,n}(\cos \vartheta)$  schreiben werden. Schliesslich bedeutet  $R$  eine Funktion von  $r$  allein und zwar eine Lösung  $R_m$  der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 R_m}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d R_m}{dr} + R_m \left( k^2 - \frac{m(m+1)}{r^2} \right) = 0. \quad (11)$$

Nutzt man die Willkürlichkeit der beiden ganzen Zahlen  $m$  und  $n$  aus und superponiert alle aus verschiedener Wahl derselben hervorgehenden partikulären Integrale der Form (9), so erhält man das allgemeinere Integral:

$$u = \sum_m \sum_n G_{m,n} R_m(r) P_{m,n}(\cos \vartheta) \cos n \varphi \\ + \sum_m \sum_n H_{m,n} R_m(r) P_{m,n}(\cos \vartheta) \sin n \varphi \quad (12)$$

worin die  $G$  und  $H$  willkürliche Constanten sind, und es lässt sich zeigen, dass in Rücksicht auf die weitere Willkürlich-

<sup>1)</sup> Vgl. Pockels, Ueber die Gleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$ . Teubner 1891, pag. 109–111.

keit der Integrationskonstanten in den Lösungen  $R_m$  der Differentialgleichung (11) dieser neue Ansatz sogar die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung  $k^2 u + \Delta^2 u = 0$  giebt, welche nebst ihren ersten Derivierten ausserhalb einer Kugel um den Nullpunkt eindeutig und stetig ist.<sup>1)</sup> Es folgt demnach, dass jedes der drei Wellenpotentiale  $\xi, \eta, \zeta$ , die wir zu bestimmen haben, sich durch eine Doppelsumme der Form (12) darstellen lassen muss, und es erübrigt nur, die darin auftretenden willkürlichen Constanten so zu bestimmen, dass den Bedingungen (6) (7) (8) genügt wird.

Diese Aufgabe vereinfacht sich von vornherein beträchtlich durch folgende Bemerkung: Der einzige Umstand, welcher bewirkt, dass die Lichtbewegung in unserem Problem nicht völlig symmetrisch um die  $x$ -Axe herum, unabhängig von  $\varphi$ , wird, ist der, dass die Polarisationssebene der einfallenden Lichtwelle in gewisser Weise vor andern durch die  $x$ -Axe gehenden Ebenen ausgezeichnet ist. Es ist danach zu vermuten, dass die Abhängigkeit der Lösung von  $\varphi$  immerhin keine komplizierte sein wird, dass also Glieder mit Sinus oder Cosinus höherer Vielfacher von  $\varphi$  nicht vorkommen werden. In der That, versucht man zunächst für  $\xi, \eta, \zeta$  Ausdrücke der Form (12) anzusetzen, so bemerkt man alsbald, dass die grosse Mehrzahl der Constanten  $G$  und  $H$  verschwinden müssen, und wird zu dem folgenden vereinfachten Ansatz geführt:

$$\xi = a \cos \varphi \quad \eta = e^{ikz} + \beta + \gamma \cos 2\varphi \quad \zeta = \gamma \sin 2\varphi \quad (13)$$

wobei  $a, \beta$  und  $\gamma$  drei von  $\varphi$  unabhängige, also nur  $r$  und  $\vartheta$  enthaltende Grössen sind, die in Form folgender Summen dargestellt werden können:

$$\begin{aligned} a &= \sum_m (2m+1) A_m R_m(r) P_{m,1}(\cos \vartheta) \\ \beta &= \sum_m (2m+1) B_m R_m(r) P_{m,0}(\cos \vartheta) \\ \gamma &= \sum_m (2m+1) C_m R_m(r) P_{m,2}(\cos \vartheta) \end{aligned} \quad (14)$$

<sup>1)</sup> Vgl. Pockels (l. c.), pag. 63 und 111.

Die Grössen  $A_m, B_m, C_m$  bedeuten hier noch zu bestimmende Constante, denen aus Bequemlichkeitsrücksichten der Faktor  $(2m + 1)$  beigelegt wurde.

Der Ansatz (13), (14) liefert für  $\xi, \eta, \zeta$  an und für sich Wellenpotentiale. Es erübrigt also, die drei Bedingungen (6) (7) (8) zu erfüllen. Die Einführung der Ausdrücke (13) in die Randbedingungen (7) giebt in Rücksicht darauf, dass eine der Bedingungen (7) eine Folge der beiden anderen ist und weggelassen werden kann:

Für  $r = a$ :

$$e^{ikz} + \beta - \gamma = 0 \quad a \sin \vartheta - 2 \gamma \cos \vartheta = 0. \quad 15)$$

Die Bedingungen im Unendlichen verlangen — da das Glied (8) im Ausdruck (13) für  $\eta$  schon abgesondert ist — einfach, dass  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  im Unendlichen keine einfallenden Wellen entsprechenden Teile enthalten. Was die Bedingung (6) angeht, welche für den ganzen Raum gilt, so wollen wir zunächst nur fordern, dass sie für Punkte auf der Oberfläche der Kugel  $a$  befriedigt werde. Wir werden später zeigen, dass sie dann auch für den ganzen Raum erfüllt ist. Um noch die Grössen  $\alpha, \beta, \gamma$  und Polarkoordinaten in die auf die Oberfläche der Kugel beschränkte Bedingung (6) einzuführen, stelle man sich  $\xi, \eta, \zeta$  für einen Augenblick bildlich als Geschwindigkeitskomponenten einer Flüssigkeit dar. Die Gleichung (6) bedeutet dann bekanntlich, dass in jedes Volumenelement ebensoviel Flüssigkeit ein- als ausströmt. Man betrachte ein Volumenelement von der Form eines Kegelstumpfs, dessen Basis ein kleines Stück  $dw$  der Oberfläche der Kugel  $a$ , dessen Decke ein Stück  $dw'$  der Oberfläche der Kugel  $a + da$  sei und dessen Mantel durch lauter Abschnitte von Kugelradien gebildet werde. Da die Bedingungen (7) im Bilde besagen, dass längs der Oberfläche der Kugel  $a$  keine tangentielle Strömung stattfindet, so kann durch die Mantelfläche keine Flüssigkeitsmasse aus- oder einströmen (oder strenger: diese Flüssigkeitsmasse wird von höherer Ordnung klein). Es müssen

sich also nach (6) die Strömungen durch Basis und Decke ausgleichen. Die radiale Strömungskomponente ist nun:

$$\begin{aligned} R &= \xi \cos \vartheta + \eta \sin \vartheta \cos \varphi + \zeta \sin \vartheta \sin \varphi \\ &= \cos \varphi \{ \alpha \cos \vartheta + [e^{ikz} + \beta + \gamma] \sin \vartheta \}. \end{aligned} \quad 16)$$

Durch die Basis strömt daher die Masse  $dw \cdot R$  ein.

Durch die Decke  $dw' = dw \left( \frac{a + da}{a} \right)^2$  strömt die Masse  $dw' \cdot \left( R + da \cdot \frac{\partial R}{\partial r} \right)$  aus. Demnach verlangt (6), dass:

$$R dw = \left( R + da \cdot \frac{\partial R}{\partial r} \right) dw'$$

oder nach einfacher Reduktion:

$$0 = \frac{2}{a} \cdot R + \frac{\partial R}{\partial r}$$

ist. Führt man hierin (16) ein, so erhält man als neue Oberflächenbedingung, welche als Ersatz der Bedingung (6) eintritt:

Für  $r = a$ :

$$0 = \cos \vartheta \left( r \frac{\partial \alpha}{\partial r} + 2\alpha \right) + \sin \vartheta \left[ r \frac{\partial}{\partial r} (\beta + \gamma + e^{ikz}) + 2(\beta + \gamma + e^{ikz}) \right]. \quad 17)$$

Nunmehr ist unsere Aufgabe darauf reduziert, die Grössen  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$  und die noch unbestimmten Integrationskonstanten der Lösungen  $R_m$  der Differentialgleichungen (11) so zu bestimmen, dass die Summen (14) den drei Randbedingungen (15) und (17) genügen und im Unendlichen keine Teile enthalten, welche einfallenden Wellen entsprechen.

Zur Vorbereitung der Lösung stelle ich einige Sätze aus der Theorie der Kugel- und Cylinderfunktionen zusammen, welche zum Teil bekannt sind, zum Teil ohne grosse Mühe aus bekannten Sätzen folgen.

## § 3. Aus der Theorie der Kugelfunctionen.

Die gewöhnliche Kugelfunction  $m$ . Ordnung wurde durch  $P_m$  oder  $P_{m,0}$  bezeichnet. Die  $n$ . Zugeordnete der Kugelfunction  $m$ . Ordnung lässt sich dann definieren durch den Ausdruck:

$$\begin{aligned} P_{m,n}(\cos \vartheta) &= P_{m,n}(x) = (1-x^2)^{n/2} \frac{d^n P_m}{d x^n} \\ &= \frac{1}{2^m \cdot m!} (1-x^2)^{n/2} \frac{d^{n+m}}{d x^{n+m}} (x^2-1)^m. \end{aligned} \quad (18)$$

Zwischen den verschiedenen Zugeordneten verschiedener Ordnung bestehen die folgenden drei Rekurrenzen (vgl. F. Neumann, Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen, Leipzig 1878, pag. 74):

$$(2m+1)\cos\vartheta P_{m,n} = (m+1-n)P_{m+1,n} + (m+n)P_{m-1,n} \quad (19)$$

$$(2m+1)\sin\vartheta P_{m,n-1} = P_{m+1,n} - P_{m-1,n} \quad (20)$$

$$(2m+1)\sin\vartheta P_{m,n+1} = (m+1-n)(n-m)P_{m+1,n} + (m+1+n)(n+m)P_{m-1,n}. \quad (21)$$

Man findet mit Hülfe der eben angegebenen Beziehungen leicht die nachstehende später zu verwendende Relation:

$$(2m+1)\sin\vartheta \frac{dP_{m,1}}{d\vartheta} = m^2 P_{m+1,1} - (m+1)^2 P_{m-1,1}. \quad (22)$$

Ferner lassen sich die folgenden Sätze mit Hülfe von (18)–(22) aus den bekannten Integraleigenschaften der Kugelfunctionen ableiten:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \cos\vartheta P_{m,1} P_{m',1} &= 0 \\ &\text{ausser wenn } m' = m+1 \text{ oder } m' = m-1. \\ \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \cos\vartheta P_{m,1} P_{m+1,1} &= 2 \cdot \frac{m(m+1)(m+2)}{(2m+1)(2m+3)} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \cos\vartheta P_{m,0} P_{m',0} &= 0 \\ &\text{ausser wenn } m' = m+1 \text{ oder } m' = m-1. \\ \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \cos\vartheta P_{m,0} P_{m+1,0} &= 2 \cdot \frac{(m+1)}{(2m+1)(2m+3)} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

## § 4. Aus der Theorie der Cylinderfunctionen.

Führt man in der Differentialgleichung (11) für  $r$  die Variable  $\varrho = rk$  ein, so schreibt sie sich:

$$\frac{d^2 R_m}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{d R_m}{d\varrho} + R_m \left[ 1 - \frac{m(m+1)}{\varrho^2} \right] = 0. \quad (25)$$

Versucht man diese Differentialgleichung durch einen Ausdruck der Form  $e^{-ie} \cdot S$  zu befriedigen, wobei  $S$  eine nach negativen Potenzen von  $\varrho$  fortschreitende Reihe sein soll, so gelingt dies durch die folgende mit einer endlichen Anzahl von Gliedern abbrechende Reihe:

$$K_m = \frac{e^{-ie}}{\varrho} \left[ 1 + \frac{m(m+1)}{2} \frac{1}{i\varrho} + \frac{m(m+1)}{2} \frac{[m(m+1)-1 \cdot 2]}{4} \frac{1}{(i\varrho)^2} + \frac{m(m+1)}{2} \frac{[m(m+1)-1 \cdot 2]}{4} \frac{[m(m+1)-2 \cdot 3]}{6} \frac{1}{(i\varrho)^3} + \dots \right] \quad (26)$$

Eine zweite Lösung der Differentialgleichung, die wir  $K'_m$  nennen wollen, erhält man natürlich, indem man in diesem Ausdruck  $+i$  mit  $-i$  vertauscht. Die allgemeine Lösung würde sich dann linear aus  $K_m$  und  $K'_m$  zusammensetzen.

Andrerseits kann man Lösungen von (25) in Form aufsteigender Potenzreihen darzustellen suchen und findet dadurch die folgenden beiden Funktionen:

$$\begin{aligned} \chi_m(\varrho) &= \frac{(i\varrho)^m}{1 \cdot 3 \dots (2m+1)} \left\{ 1 + \frac{(i\varrho)^2}{2(2m+3)} + \frac{(i\varrho)^4}{2 \cdot 4(2m+3)(2m+5)} + \dots \right\} \\ \varphi_m(\varrho) &= \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{(i\varrho)^{m+1}} \left\{ 1 - \frac{(i\varrho)^2}{2(2m-1)} + \frac{(i\varrho)^4}{2 \cdot 4(2m-1)(2m-3)} - \dots \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

wobei die Coeffizienten des ersten Gliedes in Rücksicht auf die spätere Anwendung gewählt sind.

Auch durch  $\chi_m$  und  $\varphi_m$  muss sich jede andere Lösung von (25) linear darstellen lassen. Führt man dies speziell für  $K_m$  aus, so erhält man:

$$i^{2m+1} K_m(\varrho) = \chi_m(\varrho) + (-1)^{m+1} \varphi_m(\varrho)$$

oder:

$$i^{m+1} K_m(\varrho) = \frac{\varrho^m}{1 \cdot 3 \dots 2m+1} \left\{ 1 - \frac{\varrho^2}{2(2m+3)} + \frac{\varrho^4}{2 \cdot 4(2m+3)(2m+5)} - \dots \right\} \\ + i \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{\varrho^{m+1}} \left\{ 1 + \frac{\varrho^2}{2(2m-1)} + \frac{\varrho^4}{2 \cdot 4(2m-1)(2m-3)} - \dots \right\} \quad 28)$$

ein Ausdruck, der sich auch durch direkte Entwicklung von  $K_m$  nach Potenzen von  $\varrho$  gewinnen liesse. Umgekehrt kann man aber auch z. B.  $\chi_m$  linear durch  $K_m$  und  $K'_m$  ausdrücken und zwar findet man:

$$2 i \chi_m(\varrho) = K'_m(\varrho) - (-1)^m K_m(\varrho). \quad 29)$$

Ferner besteht zwischen irgend zwei Lösungen  $R_m$  und  $R'_m$  von (25) die Beziehung:

$$R_m \frac{d R'_m}{d \varrho} - R'_m \frac{d R_m}{d \varrho} = \frac{C}{\varrho^2},$$

wobei  $C$  eine Constante ist. Speziell für  $K_m$  und  $\chi_m$  nimmt die Constante den Wert 1 an, sodass also gilt:

$$K_m \frac{d \chi_m}{d \varrho} - \chi_m \frac{d K_m}{d \varrho} = \frac{1}{\varrho^2}. \quad 30)$$

Die verschiedenen  $K_m$  stehen durch folgende Rekurrenzen mit einander in Verbindung:

$$(2m+1) K_m = i \varrho (K_{m+1} - K_{m-1}) \quad 31)$$

$$\varrho \frac{d K_m}{d \varrho} = m K_m - i \varrho K_{m+1} = -(m+1) K_m - i \varrho K_{m-1} \\ = -i \varrho \left[ \frac{(m+1) K_{m+1} + m K_{m-1}}{2m+1} \right]. \quad 32)$$

Schliesslich gilt nach Heine, Hdb. d. Kugelfunctionen, 2. Aufl., I, pag. 82 die Entwicklung:

$$e^{i \varrho \cos \vartheta} = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \chi_m(\varrho) P_{m,0}(\cos \vartheta). \quad 33)$$

### § 5. Explicite Darstellung der Componenten der electrischen Kraft.

Wir beginnen damit, die Entwicklungen (14) für  $\alpha, \beta, \gamma$  zuvörderst so zu spezialisieren, dass dieselben im Unendlichen keine Teile enthalten, welche einfallenden Wellenzügen entsprechen. Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, dass  $R_m$  sich linear aus  $K_m$  und  $K'_m$  zusammensetzt, sodass man etwa schreiben kann:

$$R_m = c_1 K_m + c_2 K'_m = c_1 e^{-ie} S + c_2 e^{+ie} S'. \quad (c_1, c_2 \text{ Konstante.})$$

$S$  und  $S'$  sind beide nach absteigenden Potenzen von  $\varrho$  fortschreitende Reihenentwicklungen, welche sich in sehr grosser Entfernung vom Nullpunkt, für grosses  $\varrho$  auf ihr erstes Glied  $\frac{1}{\varrho}$  reduzieren. Demnach wird z. B. ein Glied der Entwicklung (14) von  $\alpha$  in grosser Entfernung vom Nullpunkt lauten:

$$(2m+1) A_m \left( c_1 \frac{e^{-ie}}{\varrho} + c_2 \frac{e^{+ie}}{\varrho} \right) P_{m,1}(\cos \vartheta).$$

Um den daraus entspringenden Beitrag zur  $x$ -Componente der elektrischen Kraft zu finden, hat man nach (1) mit  $e^{it}$  zu multiplizieren und vom Resultat den reellen Teil zu nehmen. Setzt man:

$$(2m+1) A_m c_1 = d_1 e^{i\delta_1}, \quad (2m+1) A_m c_2 = d_2 e^{i\delta_2}, \quad d_1, d_2, \delta_1, \delta_2 \text{ reell,}$$

so wird dieser reelle Teil gleich:

$$\left[ \frac{d_1}{\varrho} \cos(\delta_1 + q t - \varrho) + \frac{d_2}{\varrho} \cos(\delta_2 + q t + \varrho) \right] P_{m,1}(\cos \vartheta)$$

oder:

$$\left[ \frac{d_1}{kr} \cos\left(\delta_1 + \frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi r}{\lambda}\right) + \frac{d_2}{kr} \cos\left(\delta_2 + \frac{2\pi t}{\tau} + \frac{2\pi r}{\lambda}\right) \right] P_{m,1}(\cos \vartheta).$$

Man sieht sofort, dass das erste Glied eine zu grösserem  $r$  fortschreitende, das zweite hingegen eine aus dem Unendlichen einlaufende Welle darstellt. Laut der Bedingung für das Un-

endliche muss also das zweite Glied verschwinden, es muss  $d_2$  und  $c_2$  gleich null sein und  $R_m$  sich auf die einfache Form:  $R_m = c_1 K_m$  reduzieren. Die Constante  $c_1$  wollen wir noch so bestimmen, dass  $R_m$  auf der Kugeloberfläche  $r = a$  gleich 1 wird. Ist zur Abkürzung:

$$k r = \varrho \quad k a = \varrho_0 \quad (34)$$

so soll also sein:

$$R_m(r) = \frac{K_m(\varrho)}{K_m(\varrho_0)}. \quad (35)$$

Hiermit ist jede Willkürlichkeit in den  $R_m$  beseitigt und die Bedingungen im Unendlichen sind erfüllt.

Nachträgliche Bemerkung zu § 2. Der Ausdruck

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \sigma$$

ist ein Wellenpotential, welches im Unendlichen keine einfallenden Wellenzüge enthält — sobald  $\xi, \eta, \zeta$  Wellenpotentiale sind und unseren Bedingungen für das Unendliche genügen. In Rücksicht auf die eben durchgeführte Betrachtung der Funktionen  $R_m$  wird also  $\sigma$  nach (12) und (35) in folgender Weise entwickelbar sein:

$$\sigma = \sum_m \sum_n \frac{K_m(\varrho)}{K_m(\varrho_0)} P_{m,n}(\cos \vartheta) [G_{m,n} \cos n \varphi + H_{m,n} \sin n \varphi].$$

Für  $x = a$  geht diese Entwicklung über in:

$$\sigma = \sum_m \sum_n P_{m,n}(\cos \vartheta) [G_{m,n} \cos n \varphi + H_{m,n} \sin n \varphi].$$

Fordert man jetzt, dass  $\sigma$  für  $r = a$  verschwinde, so folgt, dass alle Coefficienten  $G$  und  $H$  null sein müssen, und damit, dass  $\sigma$  überall identisch verschwindet. Hiermit ist der oben benutzte Satz erwiesen, dass es genügt, die Bedingung  $\sigma = 0$  auf der Oberfläche der Kugel zu erfüllen, um das Verschwinden von  $\sigma$  im ganzen Raum herbeizuführen.

Wir suchen weiter durch geeignete Wahl der Constanten  $A_m, B_m, C_m$  in (14) die Randbedingungen (15) und (17) zu

erfüllen. Setzt man die Entwicklungen (14) in diese Randbedingungen ein, berücksichtigt (35) und ersetzt  $e^{kz} = e^{\varrho e \cos \vartheta}$  durch die Reihe (33), so erhält man die drei Gleichungen:

$$\sum_m (2m+1) [P_{m,0}(B_m + \chi_m(\varrho_0)) - P_{m,2} C_m] = 0 \quad (36)$$

$$\sum_m (2m+1) [A_m P_{m,1} \sin \vartheta - 2 C_m P_{m,2} \cos \vartheta] = 0 \quad (37)$$

$$\sum_m (2m+1) [A_m S_m P_{m,1} \cos \vartheta + \sin \vartheta \{B_m S_m P_{m,0} + C_m S_m P_{m,2} + T_m P_{m,0}\}] = 0. \quad (38)$$

In der letzten dieser Gleichungen habe ich noch folgende Abkürzungen eingeführt:

$$S_m = \left[ r \frac{dR_m}{dr} + 2 R_m \right]_{r=a} = 2 + \left[ \frac{\varrho \frac{dK_m}{d\varrho}}{K_m} \right]_{\varrho=\varrho_0} \quad (39)$$

$$T_m = \left[ \varrho \frac{d\chi_m}{d\varrho} + 2 \chi_m(\varrho) \right]_{\varrho=\varrho_0}. \quad (40)$$

Man multipliziere (36) mit  $\sin \vartheta$ . Dann kann man nach (20) und (21) sowohl  $\sin \vartheta P_{m,0}$ , als  $\sin \vartheta P_{m,2}$  mit Hilfe der ersten Zugeordneten  $P_{m,1}$  ausdrücken, sodass die ganze Summe dann nur noch erste Zugeordnete enthält, und zwar findet man:

$$\sum_m (B_m + \chi_m(\varrho_0)) (P_{m+1,1} - P_{m-1,1}) - C_m [-(m-1)m P_{m+1,1} + (m+1)(m+2) P_{m-1,1}] = 0.$$

Ordnet man hier in der Weise, dass man Glieder, welche Grössen  $P_{m,1}$  mit gleichem Index  $m$  enthalten, zusammenfasst, so folgt:

$$\sum_m P_{m,1} [(m+2)(m+3) C_{m+1} + B_{m+1} + \chi_{m+1} - (m-1)(m-2) C_{m-1} - B_{m-1} - \chi_{m-1}] = 0. \quad (36')$$

Aehnlich kann man in der Summe (37) mit Hilfe der Rekurrenzen (19) und (20) sowohl  $\sin \vartheta P_{m,1}$  als  $\cos \vartheta P_{m,2}$  allein durch zweite Zugeordnete  $P_{m,2}$  ausdrücken und nach diesen ordnen. Man erhält dann:

$$\sum_m P_{m,2} [A_{m-1} - 2(m-2)C_{m-1} - A_{m+1} - 2(m+3)C_{m+1}] = 0. \quad (37')$$

Schliesslich lassen sich in (38) die drei Produkte  $\cos \vartheta P_{m,1}$ ,  $\sin \vartheta P_{m,0}$  und  $\sin \vartheta P_{m,2}$  alle nach (19)–(21) durch erste Zugeordnete  $P_{m,1}$  ausdrücken. Wiederum nach letzteren ordnend erhält man:

$$\sum_m P_{m,1} \left[ \begin{aligned} &S_{m-1} \{ (m-1)A_{m-1} + B_{m-1} - (m-1)(m-2)C_{m-1} \} + T_{m-1} \\ &+ S_{m+1} \{ (m+2)A_{m+1} - B_{m+1} + (m+2)(m+3)C_{m+1} \} - T_{m+1} \end{aligned} \right] = 0. \quad (38')$$

Es ist zu beachten, dass, wie aus (18) sofort ersichtlich, die drei Grössen  $P_{0,1}$ ,  $P_{0,2}$  und  $P_{1,2}$  gleich null sind. Daher beginnen die Summen (36') und (38') mit  $m = 1$ , die Summe (37') mit  $m = 2$ .

Wir haben hier nun drei Entwicklungen nach zugeordneten Kugelfunktionen, die zur Summe die Null haben sollen. Dies ist aber nach einem bekannten Satze nicht anders möglich, als indem jeder einzelne Entwicklungskoeffizient verschwindet, und damit ergeben sich die folgenden Gleichungen zur Bestimmung der  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$ :

$$\begin{aligned} &(m+2)(m+3)C_{m+1} + B_{m+1} + \chi_{m+1} \\ &= (m-1)(m-2)C_{m-1} + B_{m-1} + \chi_{m-1} \quad m \geq 1 \end{aligned} \quad (41)$$

$$A_{m+1} + 2(m+3)C_{m+1} = A_{m-1} - 2(m-2)C_{m-1} \quad m \geq 2 \quad (42)$$

$$\begin{aligned} &S_{m+1} [(m+2)A_{m+1} - B_{m+1} + (m+2)(m+3)C_{m+1}] - T_{m+1} \\ &+ S_{m-1} [(m-1)A_{m-1} + B_{m-1} - (m-1)(m-2)C_{m-1}] \\ &+ T_{m-1} = 0 \quad m \geq 1. \end{aligned} \quad (43)$$

Zur Auflösung dieses unendlichen Gleichungssystems erweist es sich als nützlich, die folgenden Grössen als Unbekannte einzuführen:

$$\begin{aligned} A_m + 2(m+2)C_m &= p_m \\ B_m + (m+1)(m+2)C_m &= q_m \\ 2(2m+1)C_m &= r_m \end{aligned} \quad (44)$$

Es ist hier voraus zu bemerken, dass man, da  $P_{0,1}$ ,  $P_{0,2}$  und  $P_{1,2}$  verschwindet, in den Entwicklungen (14) von vorn-

herein auch  $A_0$ ,  $C_0$  und  $C_1$  gleich null setzen darf, woraus dann folgt:

$$p_0 = r_0 = r_1 = 0 \quad (45)$$

Durch Einführung dieser neuen Unbekannten verwandeln sich die Gleichungen (41) bis (43) in die nachstehenden:

$$q_{m+1} + \chi_{m+1} = q_{m-1} + \chi_{m-1} - r_{m-1} \quad m \geq 1 \quad (46)$$

$$p_{m+1} = p_{m-1} - r_{m-1} \quad m \geq 2 \quad (47)$$

$$S_{m+1}[(m+2)p_{m+1} - q_{m+1}] + S_{m-1}[(m-1)p_{m-1} + q_{m-1} - mr_{m-1}] + T_{m-1} - T_{m+1} = 0 \quad m \geq 1. \quad (48)$$

Subtrahiert man hier zunächst (47) von (46), so folgt:

$$q_{m+1} + \chi_{m+1} - p_{m+1} = q_{m-1} + \chi_{m-1} - p_{m-1} \quad m \geq 2$$

und daraus ergibt sich, dass für

$$\begin{aligned} \text{gerades } m: & \quad q_m + \chi_m = p_m + g_2 \quad m \geq 2 \\ \text{ungerades } m: & \quad q_m + \chi_m = p_m + g_1 \quad m \geq 1 \end{aligned} \quad (49)$$

sein muss, wobei  $g_1$  und  $g_2$  zwei vom Index  $m$  unabhängige Constante sind.

Schreiben wir (47) noch in der Form:

$$r_m = p_m - p_{m+2} \quad m \geq 1, \quad (50)$$

so sehen wir, dass die Bestimmung der  $q_m$  und  $r_m$  auf die der  $p_m$  zurückgeführt ist. Ersetzt man jetzt in dem Gleichungssystem (48) die  $q_m$  und  $r_m$  durch die Ausdrücke (49) und (50), so erhält man nicht etwa Rekurrenzen zwischen den  $p_m$ , vielmehr fällt merkwürdiger Weise aus jeder Gleichung  $p_{m-1}$  heraus und es ergibt sich zur unmittelbaren Bestimmung von  $p_{m+1}$ :

$$p_{m+1}[(m+1)S_{m+1} + mS_{m-1}] + S_{m+1}(\chi_{m+1} - g) - S_{m-1}(\chi_{m-1} - g) + T_{m-1} - T_{m+1} = 0 \quad m \geq 2, \quad (51)$$

wobei  $g$  gleich  $g_1$  oder gleich  $g_2$  zu setzen ist, je nachdem  $m$  gerade oder ungerade ist.

Die erste für  $m = 1$  entstehende Gleichung des Systems (48) konnte hier noch nicht ausgenutzt werden und man darf in dem vorstehenden Systeme erst mit  $m = 2$  beginnen, weil  $q_0$  nicht nach Art der Formel (49) auf  $p_0$  zurückgeführt werden kann.

Uebersieht man das bisher erlangte Resultat, so lassen sich nach (51) alle  $p$  von  $p_3$  an berechnen. Nach (45) verschwindet  $p_0$ . Ferner folgt aus  $r_1 = 0$  und der ersten (für  $m = 1$  entstehenden) Gleichung des Systems (50):

$$p_1 = p_3. \quad (52)$$

Von allen Grössen  $p$  bleibt daher allein noch  $p_3$  unbekannt. Sowie man auch  $p_3$  hätte, erhielte man aus (45) und (50) alle  $r$  und aus (49) alle  $q$  — abgesehen von  $q_0$ . So bleiben einerseits im Grunde nur die beiden Unbekannten  $q_0$  und  $p_3$ , andererseits enthält das System (46) bis (48) aber auch noch zwei unbenutzte Gleichungen. Bei der Subtraktion der Gleichungen (47) von (46) konnte die erste (für  $m = 1$  entstehende) Gleichung (46) nicht mitbenutzt werden, weil die entsprechende Gleichung (47) fehlt, und ähnlich lag es mit der ersten Gleichung (48). Die beiden restierenden Gleichungen lauten daher:

Aus (46) für  $m = 1$ :

$$q_2 + \chi_2 = q_0 + \chi_0 - r_0.$$

Aus (48) für  $m = 1$ :

$$S_2 [3 p_3 - q_2] + S_0 q_0 + T_0 - T_2 = 0.$$

In Rücksicht auf (45) und (49) erhält man aus diesen beiden Gleichungen:

$$q_0 + \chi_0 = p_3 + g_2 \quad (53)$$

$$p_3 [2 S_2 + S_0] + S_2 (\chi_2 - g_2) - S_0 (\chi_0 - g_2) + T_0 - T_2 = 0. \quad (54)$$

Damit sind denn alle Gleichungen befriedigt und alle Unbekannten gefunden — bis auf eine eigentümliche durchgehende Unbestimmtheit, die in der Willkürlichkeit der beiden Constanten  $g_1$  und  $g_2$  liegt. Es ist schwer zu ersehen, woher die Fixierung dieser beiden Constanten noch kommen soll, nachdem sich bei ganz beliebiger Wahl derselben alle Randbedingungen im Endlichen und Unendlichen haben erfüllen lassen, und doch ist physikalisch evident, dass unser Problem nur eine Lösung besitzen kann.

Der Schlüssel zur Ueberwindung der Schwierigkeit und zur Bestimmung von  $g$ , und  $g_s$  liegt in Folgendem: Man nehme einmal an, dass keine einfallende Welle vorhanden sei. Dann verschwinden in unseren Gleichungen alle Grössen  $\chi_m$  und  $T_m$ , welche aus der Entwicklung des die einfallende Welle darstellenden Ausdrucks  $e^{ikx}$  entsprangen. Es bleiben daher in den Gleichungen (51) die Glieder übrig:

$$p_{m+1} [(m+1) S_{m+1} + m S_{m-1}] - g (S_{m+1} - S_{m-1}) = 0. \quad (55)$$

Es soll hieraus  $p_{m+1}$  berechnet werden für den Fall, dass der Kugelradius  $a$  gegen die Wellenlänge sehr klein ist. Für sehr kleines  $\varrho$  wird  $K_m$  nach (28) näherungsweise dargestellt durch:

$$i^m K_m(\varrho) = \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{\varrho^{m+1}} \quad (56)$$

und daraus folgt nach (34), (35) und (39):

$$R_m(r) = \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^{m+1} = \left(\frac{a}{r}\right)^{m+1} S_m = 1 - m. \quad (57)$$

Dies giebt in (55) eingesetzt:

$$p_{m+1} = \frac{g}{m(2m-1)}. \quad (58)$$

Nunmehr kann man nach (50)  $r_m$ , nach den Gleichungen:

$$q_m = p_m + g$$

die aus (49) durch Weglassung der  $\chi$ -Glieder entstehen, die  $q_m$  und, nachdem  $p_m$ ,  $q_m$  und  $r_m$  bekannt sind, aus (44) die  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$  berechnen. Es genügt, das Resultat für  $B_m$  anzuführen:

$$B_m = g \left[ 1 - \frac{3}{(2m-3)(2m+1)^2} \right].$$

Damit erhält man nach (14) folgende Entwicklung von  $\beta$ :

$$\beta = \sum_m g \left[ 2m+1 - \frac{3}{(2m-3)(2m+1)^2} \right] R_m(r) P_{m,0}(\cos \vartheta).$$

Für  $r = a$  und  $\vartheta = 0$  wird  $R_m = 1$  und  $P_{m,0} = 1$  und damit wird  $\beta$ :

$$\beta = \sum_m g \left[ 2m + 1 - \frac{3}{(2m-3)(2m+1)} \right]$$

also unendlich. Mit anderen Worten: Aus den Grössen  $g$  entspringen Ausdrücke für die Componenten der elektrischen Kraft, welche mit Unstetigkeiten behaftet sind. Die Bedingung, welche zur Fixierung der Grössen  $g$  führt, ist daher die, dass die Componenten der elektrischen Kraft stetig bleiben sollen, und zwar verlangt sie, dass  $g_1$  und  $g_2$  null sind.

Lässt man jetzt alle Glieder  $g$  aus den Gleichungen (49) bis (54) weg, so kann man sie so zusammenfassen:

$$p_{m+1} [(m+1) S_{m+1} + m S_{m-1}] + (S_{m+1} \chi_{m+1} - T_{m+1}) - (S_{m-1} \chi_{m-1} - T_{m-1}) = 0 \quad m \geq 1 \quad 59)$$

$$q_m = p_m - \chi_m \quad m \geq 1 \quad r_m = p_m - p_{m+2} \quad m \geq 2 \quad 60)$$

$$p_0 = 0 \quad p_1 = p_2 \quad q_0 = p_2 - \chi_0 \quad r_0 = r_1 = 0. \quad 61)$$

Die Gleichungen (59) gestatten noch eine beträchtliche Vereinfachung.

Nach der Definition (39) war:

$$S_m = \left[ 2 + \frac{e \frac{d K_m}{d \varrho}}{K_m} \right]_{\varrho=\varrho_0} \quad T_m = \left[ 2 \chi_m(\varrho) + e \frac{d \chi_m}{d \varrho} \right]_{\varrho=\varrho_0}.$$

Daher ist:

$$S_m \chi_m - T_m = \left[ \frac{e}{K_m} \left( \chi_m \frac{d K_m}{d \varrho} - K_m \frac{d \chi_m}{d \varrho} \right) \right]_{\varrho=\varrho_0}$$

oder nach (30):

$$S_m \chi_m - T_m = - \left[ \frac{1}{\varrho K_m} \right]_{\varrho=\varrho_0}. \quad 62)$$

Ferner wird:

$$(m+1) S_{m+1} + m S_{m-1} = 2(2m+1)$$

$$+ \left[ (m+1) \frac{e \frac{d K_{m+1}}{d \varrho}}{K_{m+1}} + m e \frac{d K_{m-1}}{d \varrho} \right]_{\varrho=\varrho_0}.$$

Nach (31) und (32) bestehen die Rekurrenzen:

$$\begin{aligned} \varrho \frac{dK_{m+1}}{d\varrho} &= -(m+2)K_{m+1} - i\varrho K_m \\ \varrho \frac{dK_{m-1}}{d\varrho} &= (m-1)K_{m-1} - i\varrho K_m \\ (2m+1)\varrho \frac{dK_m}{d\varrho} &= -i\varrho [(m+1)K_{m+1} + mK_{m-1}] \\ (2m+1)K_m &= i\varrho [K_{m+1} - K_{m-1}]. \end{aligned} \quad (63)$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit  $\frac{m+1}{K_{m+1}}$ , die zweite mit  $\frac{m}{K_{m-1}}$ , die dritte und vierte je mit  $-\frac{K_m}{K_{m-1}K_{m+1}}$  und addiert, so erhält man:

$$\begin{aligned} &\frac{(m+1)}{K_{m+1}}\varrho \frac{dK_{m+1}}{d\varrho} + \frac{m}{K_{m-1}}\varrho \frac{dK_{m-1}}{d\varrho} \\ &- (2m+1)\frac{K_m}{K_{m-1}K_{m+1}}\left(K_m + \varrho \frac{dK_m}{d\varrho}\right) = -2(2m+1) \\ &\text{und damit:} \\ &(m+1)S_{m+1} + mS_{m-1} = (2m+1)\frac{K_m}{K_{m-1}K_{m+1}}\left(K_m + \varrho \frac{dK_m}{d\varrho}\right). \end{aligned} \quad (64)$$

Führt man jetzt (62) und (64) im Ausdruck von  $p_{m+1}$  ein, so folgt:

$$p_{m+1} = \frac{K_{m-1}K_{m+1}}{(2m+1)K_m} \frac{1}{K_m + \varrho \frac{dK_m}{d\varrho}} \left( \frac{1}{\varrho K_{m+1}} - \frac{1}{\varrho K_{m-1}} \right) \text{ für } \varrho = \varrho_0,$$

oder in Rücksicht auf (63):

$$p_{m+1} = - \left[ \frac{i}{\varrho^2 \left( K_m + \varrho \frac{dK_m}{d\varrho} \right)} \right]_{\varrho=\varrho_0}. \quad (65)$$

Es bleibt nur noch übrig, mit Hilfe der  $p_m$  nach (60) und (61) die  $q_m$  und  $r_m$  und dann nach (44) die  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$  abzuleiten, um nach einer leichten Zwischenrechnung die voll-

ständige Lösung des Beugungsproblems zu erhalten, welche, wenn man alles zusammenstellt, durch folgende Formeln gegeben wird:

Der Kugelradius sei  $a$ . Man setze:

$$\varrho = k r \quad \varrho_0 = k a \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Man berechne die endlichen Ausdrücke (26):

$$K_m = \frac{e^{-i\varrho}}{\varrho} \left[ 1 + \frac{m(m+1)}{2} \frac{1}{i\varrho} + \frac{m(m+1)}{2} \cdot \frac{m(m+1)-1 \cdot 2}{4} \frac{1}{(i\varrho)^2} + \dots \right] \quad (66)$$

$$\text{und} \quad \chi_m = - \frac{K_m(-\varrho_0) + (-1)^m K_m(\varrho_0)}{2i} \quad (67)$$

und bilde damit:

$$p_{m+1} = - \left[ \frac{i}{\varrho^2} \frac{d(\varrho K_m)}{d\varrho} \right]_{\varrho=\varrho_0} \quad (68)$$

sowie:

$$R_m(r) = \frac{K_m(\varrho)}{K_m(\varrho_0)}. \quad (69)$$

Dann gelten die Entwicklungen:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) A_m R_m(r) P_{m,1}(\cos \vartheta) \\ \beta &= \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) B_m R_m(r) P_{m,0}(\cos \vartheta) \\ \gamma &= \sum_{m=2}^{\infty} (2m+1) C_m R_m(r) P_{m,2}(\cos \vartheta) \end{aligned} \quad (70)$$

mit den folgenden Entwicklungskoeffizienten:

$$\begin{aligned} (2m+1)A_m &= (m-1)p_m + (m+2)p_{m+2} \\ 2(2m+1)B_m &= (m+1)(m+2)p_{m+2} - m(m-1)p_{m-2} - (2m+1)\chi_m \\ 2(2m+1)C_m &= p_m - p_{m+2} \end{aligned} \quad (71)$$

und die Componenten der elektrischen Kraft für die durch die vollkommen reflektierte Kugel gestörte Lichtbewegung werden erhalten aus:

$$\begin{aligned}
X &= \text{pars real } (e^{iqt} a \cos \varphi) \\
Y &= \text{pars real } (e^{iqt+i k z} + e^{iqt} [\beta + \gamma \cos 2 \varphi]) \\
Z &= \text{pars real } (e^{iqt} \gamma \sin 2 \varphi).
\end{aligned} \tag{72}$$

### § 6. Bemerkungen über die Verwendung dieser Darstellung.

Die Reihen, durch die wir hier die Verteilung der elektrischen Kraft und damit der Lichtintensität dargestellt haben, sind zwar unter allen Umständen konvergent, indessen wird, wie leicht zu sehen, die Convergenz um so langsamer, je grösser die Kugel ist, welche das Licht reflektiert. Dies Verhalten liegt insofern günstig, als man für grosse Kugeln die Lichtverteilung in rohen Zügen aus der geometrischen Optik, mit grösserer Schärfe aus der Kirchhoff'schen Beugungstheorie ableiten kann. In den Fällen, wo diese beiden Hilfsmittel versagen, nämlich für Kugeln, deren Durchmesser nicht über wenige Wellenlängen hinausgeht, wird aber gerade die numerische Rechnung nach obigen Formeln durchführbar und man könnte sich an ihrer Hand überzeugen, wie sich mit dem Kleinerwerden der Kugel z. B. der Schatten hinter ihr allmählich auflöst. Ich will mich hier begnügen nur die Grenzwerte anzuführen, in die  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  übergehen, wenn der Kugelradius äusserst klein auch gegen die Wellenlänge wird:

$$\begin{aligned}
\xi &= -k^3 a^3 \sin \vartheta \cos \varphi \left[ \frac{1}{2} K_1(kr) + \cos \vartheta K_2(kr) \right. \\
&\quad \left. - \frac{k^2 a^2}{6} K_3(kr) (\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3}) \right] \\
\eta &= e^{i k z} + k^3 a^3 \left[ \frac{2}{3} K_0(kr) + \frac{1}{2} K_1 \cos \vartheta + K_2 (\frac{1}{3} - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) \right. \\
&\quad \left. + K_3 \frac{k^2 a^2}{6} \cos \vartheta (\sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi - \frac{1}{3}) \right] \\
\zeta &= -k^3 a^3 \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \left[ K_2(kr) - \frac{k^2 a^2}{6} K_3(kr) \cos \vartheta \right]
\end{aligned} \tag{73}$$

wobei:

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{e^{-ikr}}{kr} & K_1 &= \frac{e^{-ikr}}{kr} \left(1 + \frac{1}{ikr}\right) \\ K_2 &= \frac{e^{-ikr}}{kr} \left(1 + \frac{3}{ikr} + \frac{3}{(ikr)^2}\right) \\ K_3 &= \frac{e^{-ikr}}{kr} \left(1 + \frac{6}{ikr} + \frac{15}{(ikr)^2} + \frac{15}{(ikr)^3}\right). \end{aligned} \quad (74)$$

In grosser Distanz  $r$  von der Kugel gehen diese Formeln über in:

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{k^3 a^3}{2} \sin \vartheta \cos \varphi (1 + 2 \cos \vartheta) \frac{e^{-ikr}}{r} \\ \eta &= e^{ikz} + k^3 a^3 \frac{e^{-ikr}}{r} \left[1 + \frac{\cos \vartheta}{2} - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi\right] \\ \zeta &= -k^3 a^3 \frac{e^{-ikr}}{r} \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (75)$$

Lord Rayleigh hat gefunden (l. c.), dass bei sehr kleinen Kugeln aus durchsichtigen Medien die Intensität des zerstreuten Lichts umgekehrt proportional der vierten Potenz der Wellenlänge wird und dass in Richtungen, die einen rechten Winkel mit der Richtung der einfallenden Welle machen, vollständige Polarisation des zerstreuten Lichts eintritt. Ersteres Verhalten gilt nach den Gleichungen (75) (da  $k$  umgekehrt proportional zur Wellenlänge ist) offenbar auch für das von einer kleinen vollkommen reflektierenden Kugel zerstreute Licht, hingegen erfolgt in keiner Richtung vollständige Polarisation. Man erhält für  $\vartheta = 90^\circ$ :

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{k^3 a^3}{2} \frac{e^{-ikr}}{r} \cos \varphi & \eta - e^{ikz} &= k^3 a^3 \frac{e^{-ikr}}{r} \sin^2 \varphi \\ \zeta &= -k^3 a^3 \frac{e^{-ikr}}{r} \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

und daraus für die Intensität der  $x$ -Komponente:

$$\text{Mod } \xi^2 = \frac{1}{4} \frac{k^6 a^6}{r^2} \cos^2 \varphi$$

und für die Intensität der senkrecht zur  $x$ -Axe stehenden Komponente des zerstreuten Lichts:

$$\text{Mod}[(\eta - e^{ikx})^2 + \zeta^2] = \frac{k^4 a^6}{r^3} \sin^2 \varphi.$$

Ist das einfallende Licht nicht, wie bisher vorausgesetzt wurde, polarisiert, sondern natürliches Licht, so muss man in diesen Ausdrücken alle möglichen Werte von  $\varphi$  einsetzen und das Mittel nehmen und findet dann:

für die Schwingungskomponente parallel zur  $x$ -Axe:  $\frac{1}{4} \frac{k^4 a^6}{r^3}$

„ „ „ senkrecht „ „  $\frac{k^4 a^6}{r^3}$

d. h. „das von sehr kleinen vollkommen reflektierenden Kugeln in Richtungen senkrecht zur Normale der einfallenden Welle zerstreute Licht ist zu drei Vierteln polarisiert.“

Schliesslich sei noch ein Umstand hervorgehoben. Da die Intensität des zerstreuten Lichts von der Wellenlänge abhängt, so wird, wenn das einfallende Licht weiss ist, das zerstreute eine andere Farbe zeigen. Nur bei sehr grossen Kugeln kommt die Abhängigkeit von der Wellenlänge nicht in Betracht und das reflektierte Licht bleibt farblos. Bei sehr kleinen Kugeln entsteht, wie Lord Rayleigh gezeigt hat, das tiefe Blau des Himmels. Bei Kugeln von der Grössenordnung der Wellenlänge bilden sich noch andere Farbennüancen aus, die sogar ein wenig von der Richtung des reflektierten Lichts abhängen und die sich alle aus den obigen Formeln ableiten liessen.

Nach diesen Andeutungen über die anderweitige Verwendbarkeit der Lösung des Beugungsproblems gehen wir an unsere eigentliche Aufgabe, die Berechnung des Maxwell'schen Drucks, welchen das Licht auf die Kugel ausübt. Hierzu ist zunächst erforderlich die

### § 7. Ableitung der magnetischen Kraftkomponenten aus den elektrischen.

Man wähle irgend einen Punkt 0 der Kugeloberfläche zum Nullpunkt eines neuen rechtwinklichen Koordinatensystemes  $x_1, y_1, z_1$ , dessen  $x$ -Axe in den durch 0 gehenden Radiusvektor falle, dessen  $y$ -Axe den durch 0 gehenden Meridian  $\varphi = \text{const.}$  und dessen  $z$ -Axe den durch 0 gehenden Parallelkreis  $\vartheta = \text{const.}$  tangiere. Es werde  $y_1$  zu wachsendem  $\vartheta$ ,  $z_1$  zu wachsendem  $\varphi$  positiv gezählt. Die Kraftkomponenten (oder genauer die komplexen Grössen, aus denen sich nach (1) die Kraftkomponenten ableiten) in Richtung der neuen Axen mögen heissen  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ . Für  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  erhält man durch Koordinatendrehung die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi \cos \vartheta_0 + \eta \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + \zeta \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 \\ \eta_1 &= -\xi \sin \vartheta_0 + (\eta \cos \varphi_0 + \zeta \sin \varphi_0) \cos \vartheta_0 \\ \zeta_1 &= -\eta \sin \varphi_0 + \zeta \cos \varphi_0.\end{aligned}\quad 76)$$

Die magnetischen Kraftkomponenten in Richtung der neuen Axen sind aus den Gleichungen, welche den (2) entsprechen, abzuleiten:

$$ik\lambda_1 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial z_1} \quad ik\mu_1 = \frac{\partial \xi_1}{\partial z_1} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} \quad ik\nu_1 = \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial y_1}. \quad 77)$$

Wir wollen diese Gleichungen verwenden, um speziell die magnetische Kraft im Punkte 0 zu bestimmen. Im Punkte 0 sind  $\eta_1$  und  $\zeta_1$  gleich null, weil auf der Oberfläche der Kugel keine tangentialen elektrischen Kräfte existieren, und es gilt, da die  $y_1$ - und  $z_1$ -Axe die Oberfläche tangieren, auch:

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial y_1} = \frac{\partial \eta_1}{\partial z_1} = \frac{\partial \zeta_1}{\partial y_1} = \frac{\partial \zeta_1}{\partial z_1} = 0.$$

Ferner ist geometrisch evident, dass im Punkte 0:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \quad \frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

ist. Damit geht (77) über in:

$$\lambda_1 = 0 \quad i k \mu_1 = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial r} \quad i k \nu_1 = \frac{\partial \eta_1}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta}.$$

Wir erfahren also zunächst, dass der magnetischen Kraft die radiale Componente fehlt, dass sie in der Kugeloberfläche liegt.

Drückt man nach (13)  $\xi, \eta, \zeta$  durch  $\alpha, \beta, \gamma$  aus, so folgt ferner:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \cos \varphi \{ \alpha \cos \vartheta + \sin \vartheta [e^{ikz} + \beta + \gamma] \} \\ \eta_1 &= \cos \varphi \{ -\alpha \sin \vartheta + \cos \vartheta [e^{ikz} + \beta + \gamma] \} \\ \zeta_1 &= -\sin \varphi \{ e^{ikz} + \beta - \gamma \}. \end{aligned}$$

Auf der Kugeloberfläche wird in Folge der Relationen (15):

$$\eta_1 = \zeta_1 = 0 \quad \xi_1 = \alpha \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta} = 2 \gamma \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} \quad 78)$$

und damit:

$$\begin{aligned} i k \mu_1 &= + \sin \varphi \left[ -\frac{\alpha}{r \sin \vartheta \cos \vartheta} + \frac{\partial}{\partial r} (e^{ikz} + \beta - \gamma) \right] \\ i k \nu_1 &= \cos \varphi \left[ -\frac{\partial \alpha}{\partial r} \sin \vartheta + \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} (e^{ikz} + \beta + \gamma) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{\alpha}{\cos \vartheta} \right) \right] \end{aligned}$$

Nun gilt weiter an der Oberfläche der Kugel die Gleichung (17):

$$0 = \cos \vartheta \left( r \frac{\partial \alpha}{\partial r} + 2 \alpha \right) + \sin \vartheta \left[ r \frac{\partial}{\partial r} (e^{ikz} + \beta + \gamma) + 2 (e^{ikz} + \beta + \gamma) \right]$$

welche sich in Rücksicht auf (15) auch so schreiben lässt:

$$0 = r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \cos \vartheta + \sin \vartheta r \frac{\partial}{\partial r} (e^{ikz} + \beta + \gamma) + \frac{2 \alpha}{\cos \vartheta}$$

und damit lassen sich die Ausdrücke von  $\mu_1$  und  $\nu_1$  in die folgenden verwandeln:

$$\begin{aligned} i k \mu_1 &= \sin \varphi \left[ -\frac{\partial \alpha}{\partial r} \cotg \vartheta - \frac{3 \alpha}{r \sin \vartheta \cos \vartheta} - 2 \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right] \\ i k \nu_1 &= \cos \varphi \left[ -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \alpha}{\partial r} - \frac{2 \alpha}{r \sin \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{\alpha}{\cos \vartheta} \right) \right] \end{aligned}$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} -i \varrho_0 \mu_1 \frac{\sin \vartheta}{\sin \varphi} &= r \frac{\partial a}{\partial r} \cos \vartheta + \frac{3a}{\cos \vartheta} + 2 \sin \vartheta r \frac{\partial \gamma}{\partial r} \\ &= \cos \vartheta \left( r \frac{\partial a}{\partial r} + 2a \right) + 2 \sin \vartheta \left( r \frac{\partial \gamma}{\partial r} + 2\gamma \right) + \frac{a}{\cos \vartheta} \\ -i \varrho_0 \nu_1 \frac{\sin \vartheta}{\cos \varphi} &= r \frac{\partial a}{\partial r} + 2a + \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{a}{\cos \vartheta} \right), \end{aligned} \right\} \quad 79)$$

wobei die frühere Abkürzung  $ka = \varrho_0$  benutzt ist. Da wir es übrigens fortan nur mit Punkten auf der Kugel selbst zu thun haben, werden wir nicht mehr eigens auf diesen Umstand hinweisen müssen und dürfen uns erlauben, den Index 0 wegzulassen, sowie beliebig  $r$  und  $a$  zu vertauschen.

Hier führen wir nun unsere Entwicklungen (70) für  $\alpha, \beta, \gamma$  ein, die wir aber zunächst ein wenig umformen. Es ist auf der Kugeloberfläche:

$$\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) A_m P_{m,1}(\cos \vartheta), \quad \gamma = \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) C_m P_{m,2}(\cos \vartheta)$$

und nach der Bezeichnungsweise (39):

$$\begin{aligned} 2a + r \frac{\partial a}{\partial r} &= \sum (2m+1) A_m S_m P_{m,1}(\cos \vartheta) \\ 2\gamma + r \frac{\partial \gamma}{\partial r} &= \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) C_m S_m P_{m,2}(\cos \vartheta) \end{aligned} \quad 80)$$

Setzt man für  $A_m$  und  $C_m$  die Ausdrücke (71) durch die  $p_m$  ein, so wird:

$$\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} [(m-1)p_m + (m+2)p_{m+2}] P_{m,1}(\cos \vartheta)$$

oder durch eine leichte Umstellung der Summe:

$$\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} p_{m+1} [m P_{m+1,1}(\cos \vartheta) + (m+1) P_{m-1,1}(\cos \vartheta)].$$

Da aber nach (19):

$$(2m+1) \cos \vartheta P_{m,1} = m P_{m+1,1} + (m+1) P_{m-1,1}$$

ist, so erhält man das einfache Resultat:

$$\frac{\alpha}{\cos \vartheta} = \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) p_{m+1} P_{m,1}(\cos \vartheta). \quad 81)$$

Hieraus folgt noch mit Hilfe von (22):

$$\begin{aligned} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{a}{\cos \vartheta} \right) &= \sum_{m=1}^{\infty} p_{m+1} [m^2 P_{m+1,1} - (m+1)^2 P_{m-1,1}] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} P_{m,1} [(m-1)^2 p_m - (m+2)^2 p_{m+2}]. \end{aligned} \quad 82)$$

Ferner notieren wir die nach (80) folgende Formel:

$$r \frac{\partial a}{\partial r} + 2a = \sum P_{m,1} (\cos \vartheta) S_m [(m-1)p_m + (m+2)p_{m+2}]. \quad 83)$$

Wir bilden weiter die in dem Ausdruck (79) für  $\mu_1$  auftretende Grösse:

$$\begin{aligned} &\cos \vartheta \left( r \frac{\partial a}{\partial r} + 2a \right) + 2 \sin \vartheta \left( r \frac{\partial \gamma}{\partial r} + 2\gamma \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) S_m [A_m \cos \vartheta P_{m,1} (\cos \vartheta) + 2 C_m \sin \vartheta P_{m,2} (\cos \vartheta)]. \end{aligned}$$

Drückt man sowohl  $\cos \vartheta P_{m,1}$ , als  $\sin \vartheta P_{m,2}$  nach (19) und (21) durch  $P_{m,1}$  aus, so geht diese Summe über in:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} S_m [A_m \{m P_{m+1,1} + (m+1) P_{m-1,1}\} \\ &+ 2 C_m \{(m+1)(m+2) P_{m-1,1} - m(m-1) P_{m+1,1}\}] \end{aligned}$$

und wenn man  $A_m$  und  $C_m$  durch die  $p_m$  ausdrückt, in:

$$\sum_{m=1}^{\infty} S_m [m p_{m+2} P_{m+1,1} + (m+1) p_m P_{m-1,1}]$$

oder nach den  $P_{m,1}$  geordnet:

$$\begin{aligned} &\cos \vartheta \left( r \frac{\partial a}{\partial r} + 2a \right) + 2 \sin \vartheta \left( r \frac{\partial \gamma}{\partial r} + 2\gamma \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} P_{m,1} p_{m+1} [(m+2) S_{m+1} + (m-1) S_{m-1}]. \end{aligned} \quad 84)$$

Die Einführung der Entwicklungen (81) bis (84) in (79) liefert jetzt:

$$\begin{aligned} &-i \varrho \mu_1 \sin \vartheta \\ &= \sin \varphi \sum_{m=1}^{\infty} P_{m,1} p_{m+1} [2m+1 + (m+2) S_{m+1} + (m-1) S_{m-1}] \end{aligned}$$

$$-i \varrho \nu_1 \sin \vartheta = \cos \varphi \sum_{m=1}^{\infty} P_{m,1} [(m-1)^2 p_m - (m+2)^2 p_{m+2} + S_m \{(m-1)p_m + (m+2)p_{m+2}\}].$$

Hiermit sind die Grössen  $\mu_1 \sin \vartheta$  und  $\nu_1 \sin \vartheta$  nach Kugelfunktionen entwickelt. Für das folgende werden wir aber nötig haben,  $\mu_1$  und  $\nu_1$  selbst in Form solcher Entwicklungen zu besitzen, und das wird erreicht durch folgenden Ansatz. Sei:

$$(C_{m+1} - C_{m-1}) = p_{m+1} [2m+1 + (m+2)S_{m+1} + (m-1)S_{m-1}] \quad 85)$$

$$(D_{m+1} - D_{m-1}) = (m-1)p_m(m-1+S_m) + (m+2)p_{m+2}(S_m-m-2). \quad 86)$$

Dann wird:

$$\begin{aligned} i \varrho \mu_1 \sin \vartheta &= \sin \varphi \sum P_{m,1} (C_{m-1} - C_{m+1}) \\ &= \sin \varphi \sum_{m=1}^{\infty} C_m (P_{m+1,1} - P_{m-1,1}). \end{aligned}$$

Es gilt aber nach (20):

$$(2m+1) \sin \vartheta P_{m,0} = P_{m+1,1} - P_{m-1,1}$$

und damit:

$$i \varrho \mu_1 = \sin \varphi \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) C_m P_{m,0}. \quad 87)$$

Genau ebenso folgt:

$$i \varrho \nu_1 = \cos \varphi \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) D_m P_{m,0}. \quad 88)$$

Das sind die gewünschten Entwicklungen von  $\mu_1$  und  $\nu_1$  nach Kugelfunktionen.

Es erübrigt nur noch, die  $C_m$  und  $D_m$  aus den Rekurrenzen (85) und (86) zu bestimmen.

Zunächst lassen sich die rechten Seiten derselben vereinfachen. Die Gleichung (59) schreibt sich in Rücksicht auf (62):

$$p_{m+1} [(m+1)S_{m+1} + mS_{m-1}] - \frac{1}{\varrho K_{m+1}} + \frac{1}{\varrho K_{m-1}} = 0 \quad 89)$$

und damit folgt:

$$C_{m+1} - C_{m-1} = \frac{1}{\varrho K_{m+1}} - \frac{1}{\varrho K_{m-1}} + p_{m+1} [2m+1 + S_{m+1} - S_{m-1}].$$

Ferner wird nach der Definition (39) von  $S_m$ :

$$2m + 1 + S_{m+1} - S_{m-1} = 2m + 1 + \frac{\varrho \frac{dK_{m+1}}{d\varrho}}{K_{m+1}} - \frac{\varrho \frac{dK_{m-1}}{d\varrho}}{K_{m-1}}$$

und dieser Ausdruck lässt sich mit Hülfe von (32) reduzieren auf:

$$(2m + 1) \cdot \frac{K_m^2}{K_{m+1} \cdot K_{m-1}}.$$

Demnach:

$$C_{m-1} - C_{m+1} = \frac{1}{\varrho K_{m-1}} - \frac{1}{\varrho K_{m+1}} - (2m + 1) p_{m+1} \frac{K_m^2}{K_{m+1} K_{m-1}}.$$

Bildet man diese Gleichung für  $m + 1$ ,  $m + 3$ ,  $m + 5$  u. s. w. und addiert alle entstehenden Relationen, so ergibt sich zur Bestimmung von  $C_m$ :

$$C_m = \frac{1}{\varrho K_m} - \sum_{\nu=0}^{\infty} (2m + 4\nu + 3) \frac{K_{m+2\nu+1}^2}{K_{m+2\nu} \cdot K_{m+2\nu+2}} p_{m+2\nu+2}. \quad 90)$$

Die Convergenz der hier auftretenden Summe lässt sich ohne Schwierigkeit erweisen.

Um die Grössen  $D_m$  zu finden, ersetze man in (85)  $m$  durch  $m + 1$  und addiere die entstehende Relation zu (86). Es ergibt sich:

$$(D_{m+1} + C_{m+2}) - (D_{m-1} + C_m) = (m - 1) p_m (m - 1 + S_m) + p_{m+2} [2(m + 1) S_m + (m + 3) S_{m+2} - (m + 1)^2].$$

Subtrahiert man hiervon die Gleichung (89), nachdem man in ihr  $m$  durch  $m + 1$  ersetzt und mit 2 multipliziert hat, so bleibt:

$$\begin{aligned} & (D_{m+1} + C_{m+2}) - (D_{m-1} + C_m) \\ &= (m - 1) p_m (m - 1 + S_m) - (m + 1) p_{m+2} (m + 1 + S_{m+2}) \\ & \quad + \frac{2}{\varrho K_{m+1}} - \frac{2}{\varrho K_{m-1}} \end{aligned}$$

und man sieht, dass dieser Gleichung genügt wird, wenn für jeden Wert von  $m$  gilt:

$$D_{m-1} + C_m = \frac{2}{\varrho K_{m-1}} - (m - 1) p_m (m - 1 + S_m).$$

Führt man wiederum für  $S_m$  seinen Wert (39) ein und drückt den Differentialquotienten von  $K_m$  nach (32) durch die  $K_m$  selbst aus, so erhält man leicht:

$$D_{m-1} + C_m = \frac{2}{\varrho K_{m-1}} + (m-1) i \varrho p_m \frac{K_{m-1}}{K_m}. \quad 91)$$

Nachdem die  $C_m$  aus (90) gefunden sind, giebt diese Gleichung unmittelbar die  $D_m$  und damit kann man die Entwicklungen (87) und (88) für die Componenten der magnetischen Kraft wirklich bilden.

Es ist für die weitere Anwendung noch erforderlich, von den bisher verwandten komplexen Grössen zu den reellen Schwingungskomponenten überzugehen. Zu dem Zweck setze man:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= F e^{if} \cos \varphi & \mu_1 &= G e^{ig} \sin \varphi & \nu_1 &= H e^{ih} \cos \varphi \\ p_{m+1} &= F_m e^{if_m} & C_m &= i \varrho G_m e^{ig_m} & D_m &= i \varrho H_m e^{ih_m}, \end{aligned}$$

wo sämtliche Buchstaben auf den rechten Seiten reelle Grössen sein sollen.

Dann erhält man einerseits:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \text{pars real} (F e^{if} e^{iqt} \cos \varphi) = F \cos(f+qt) \cos \varphi \\ \text{ebenso: } M_1 &= G \cos(g+qt) \sin \varphi, N_1 = H \cos(h+qt) \cos \varphi \end{aligned} \right\} 92)$$

und hierbei bedeutet  $X_1$  die radiale Componente der elektrischen Kraft,  $M_1$  und  $N_1$  die tangentialen Componenten der magnetischen Kraft. Andererseits folgt aus (78), (81), (87) und (88), indem man überall Reelles und Imaginäres trennt:

$$\left. \begin{aligned} F \cos f &= \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) P_{m,1} F_m \cos f_m, F \sin f = \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) P_{m,1} F_m \sin f_m \\ G \cos g &= \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) P_{m,1} G_m \cos g_m, G \sin g = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) P_{m,1} G_m \sin g_m \\ H \cos h &= \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) P_{m,0} H_m \cos h_m, H \sin h = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) P_{m,0} H_m \sin h_m \end{aligned} \right\} 93)$$

Damit ist der Uebergang zu reellen Schwingungskomponenten vollzogen und die Berechnung der an der Oberfläche der Kugel wirkenden elektrischen und magnetischen Kräfte ermöglicht.

### § 8. Der Maxwell'sche Druck.

Nach Maxwell herrscht im Aether ein Druck senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien und ein Zug in Richtung der elektrischen Kraft, beide numerisch gleich der in der Volumeneinheit enthaltenen elektrischen Energie, also gleich

$$\sigma (X^2 + Y^2 + Z^2),$$

wo  $\sigma$  ein Proportionalitätsfaktor ist, der von der Wahl der Einheit der elektrischen Kraft abhängt. Ein ebensolcher Druck und Zug herrscht senkrecht und parallel zur magnetischen Kraft und ist wiederum numerisch gleich der in der Volumeneinheit enthaltenen magnetischen Energie  $\sigma (L^2 + M^2 + N^2)$ . Um die vollen Drucke im Aether zu erhalten, hat man das elektrische und das magnetische Drucksystem zu superponieren.

Nun steht die elektrische Kraft überall senkrecht auf unserer Kugel. Demnach wirkt auf jedes Oberflächenelement derselben zunächst ein senkrechter Zug, dessen Grösse gleich  $\sigma X_1^2$  ist, weil hier die elektrische Kraft nur aus ihrer Normalkomponente  $X_1$  besteht. Die magnetische Kraft hingegen liegt in der Oberfläche unserer Kugel. Daher erfährt jedes Oberflächenelement derselben zweitens einen senkrechten Druck gleich  $\sigma (M_1^2 + N_1^2)$ . Der Gesamtdruck auf ein Oberflächenelement wird daher:  $\sigma (M_1^2 + N_1^2 - X_1^2)$  oder nach (92) gleich:

$$\sigma \{ G^2 \cos^2(g+qt) \sin^2 \varphi + H^2 \cos^2(h+qt) \cos^2 \varphi - F^2 \cos^2(f+qt) \cos^2 \varphi \}.$$

Der Druck ändert sich hiernach periodisch mit der halben Schwingungsperiode des Lichts. Der uns allein interessierende Durchschnittswert für Zeiten, welche viele Perioden umfassen, wird:

$$\frac{\sigma}{2} (G^2 \sin^2 \varphi + H^2 \cos^2 \varphi - F^2 \cos^2 \varphi).$$

Bildet man durch Multiplikation mit  $\cos \vartheta$  die in die  $x$ -Richtung fallende Componente dieses Drucks und integriert über die ganze Kugeloberfläche, so erhält man für den in Richtung der einfallenden Welle auf die Kugel wirkenden Druck  $D$ :

$$D = \frac{\sigma}{2} \int a^2 d\vartheta d\varphi \sin \vartheta \cos \vartheta (G^2 \sin^2 \varphi + H^2 \cos^2 \varphi - F^2 \cos^2 \varphi),$$

wobei, wie früher,  $a$  den Kugelradius bedeutet. Da  $F$ ,  $G$  und  $H$  nicht von  $\varphi$  abhängen, lässt sich die Integration nach  $\varphi$  ausführen und das Integral auf folgende Form bringen:

$$D = \frac{\sigma \pi a^2}{2} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \cos \vartheta [(G \cos g)^2 + (G \sin g)^2 + (H \cos h)^2 + (H \sin h)^2 - (F \cos f)^2 - (F \sin f)^2].$$

Hier sind nun die Summen (93) einzusetzen. Beginnen wir beispielsweise mit der Summe für  $G \cos g$ , so folgt:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \cos \vartheta (G \cos g)^2 \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} (2m+1)(2m'+1) G_m G_{m'} \cos g_m \cos g_{m'} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \cos \vartheta P_{m,0} P_{m',0}. \end{aligned}$$

Die in der vorstehenden Formel rechts auftretenden Integrale sind null, ausser wenn  $m' = m \pm 1$  ist. Daher reduziert sich die Doppelsumme auf die einfache:

$$2 \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)(2m+3) G_m G_{m+1} \cos g_m \cos g_{m+1} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \cos \vartheta P_{m,0} P_{m+1,0}$$

und wenn man hier für die Integrale nach (24) die Werte

$$\frac{2(m+1)}{(2m+1)(2m+3)}$$

einsetzt, so wird:

$$\int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \cos \vartheta (G \cos g)^2 = 4 \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) G_m G_{m+1} \cos g_m \cos g_{m+1}.$$

Ganz ähnlicher Umformungen sind die übrigen Glieder des Ausdrucks von  $D$  fähig (bei den Gliedern mit  $F$  hat man die Integralformel (23) zu benutzen) und man erhält schliesslich durch Addition der sechs entstehenden Summen die Schlussformel für den Druck des Lichts:

$$D = 2 \sigma \pi a^2 \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) G_m G_{m+1} \cos(g_m - g_{m+1}) \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) H_m H_{m+1} \cos(h_m - h_{m+1}) \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1)(m+2) F_m F_{m+1} \cos(f_m - f_{m+1}) \right\}. \quad 94)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $\sigma$  lässt sich leicht aus der durchschnittlichen Energie pro Volumeneinheit  $E$  der einfallenden Welle berechnen. Die elektrische Schwingung der einfallenden Welle war  $Y = \cos(kx + qt)$ , dementsprechend ihre elektrische Energie gleich  $\sigma Y^2 = \sigma \cos^2(kx + qt)$ . Der Mittelwert dieses Ausdrucks für Vielfache der Schwingungsperiode ist  $\frac{\sigma}{2}$ . Es ist bekannt, dass in ebenen Wellen die Energie der magnetischen und die Energie der elektrischen Schwingung gleich sind. Daher habe ich noch einmal  $\frac{\sigma}{2}$  hinzuzufügen, um die ganze Energie pro Volumeneinheit zu erhalten, und finde damit:

$$\sigma = E. \quad 95)$$

### § 9. Formeln zur numerischen Rechnung.

Um eine etwaige Controlle der späteren numerischen Angaben zu erleichtern, will ich die Formeln angeben, die ich zur numerischen Berechnung des Drucks benutzt habe und die aus den oben abgeleiteten auf die einfachste Weise hervorgehen, indem man von vorneherein für Trennung des Reellen und Imaginären sorgt.

$$a \text{ Kugelradius.} \quad \varrho = \frac{2 \pi a}{\lambda}.$$

Man bilde die endlichen Ausdrücke:

$$k_m \cos \chi_m = 1 - \frac{(m-1)m(m+1)(m+2)}{2 \cdot 4} \frac{1}{\varrho^2} \\ + \frac{(m-3)(m-2) \dots (m+3)(m+4)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{1}{\varrho^4} - \dots$$

$$k_m \sin \chi_m = \frac{1}{\varrho} \frac{m(m+1)}{2} - \frac{1}{\varrho^3} \frac{(m-2)(m-1) \dots (m+2)(m+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots$$

sowie:

$$l_m \cos \psi_m = 1 - \frac{1}{\varrho^2} \frac{m(m+1)}{2} \cdot \frac{m(m+1)+1 \cdot 2}{4} \\ + \frac{1}{\varrho^4} \frac{(m-2)(m-1) \dots (m+2)(m+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{m(m+1)+3 \cdot 4}{8} - \dots$$

$$l_m \sin \psi_m = \frac{1}{\varrho} \frac{m(m+1)}{2} - \frac{1}{\varrho^3} \frac{(m-1)m(m+1)(m+2)}{2 \cdot 4} \cdot \frac{m(m+1)+2 \cdot 3}{6} + \dots$$

und berechne hieraus  $k_m$ ,  $l_m$ ,  $\chi_m$ ,  $\psi_m$  für eine Reihe von Werten des Index  $m$ .

Wünscht man für den Druckwert etwa eine zweistellige Genauigkeit, so gehe man dabei bis zu einem Index  $\bar{m}$ , für welchen  $k_m$  und  $l_m$  grösser als 100 werden, und vernachlässige auch in den späteren Formeln alle Glieder, in welchen  $k_m$  oder  $l_m$  mit höherem Index als  $\bar{m}$  vorkommen. Für  $\varrho = \frac{1}{4}$ , bei einem Kugeldurchmesser gleich etwa  $\frac{1}{12}$  Wellenlänge, genügt es,  $\bar{m} = 3$  zu nehmen, so dass die Berechnung des Drucks sehr leicht auszuführen ist; für  $\varrho = 4$  hingegen, wenn also der Kugeldurchmesser die Wellenlänge schon um einiges übertrifft, muss man bereits bis zu  $\bar{m} = 7$  oder 8 gehen und für Kugeln, deren Durchmesser mehrere Wellenlängen beträgt, wird die Rechnung praktisch undurchführbar, aber, wie sich unten zeigen wird, auch nicht mehr erforderlich.

Man berechne weiter die Hilfsgrössen:

$$\frac{1}{\varrho k m} = r_m \quad \frac{2m+1}{\varrho^2 l_m} \frac{k_m^2}{k_{m-1} k_{m+1}} = s_m \quad \frac{m}{\varrho^2 l_m} \frac{k_m}{k_{m+1}} = t_m \quad \frac{1}{\varrho^2 l_m} = F_m$$

und die Hülfswinkel:

$$\chi'_m = \chi_m + \varrho - \frac{\pi m}{2} \quad \psi'_m = \frac{\pi}{2} (m+1) - \varrho - \psi_m$$

$$\tau_m = \psi'_m + \chi'_m - \chi'_{m+1} \quad \sigma_m = \chi'_{m-1} - \chi'_m - \tau_m.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} G_m \cos g'_m + G_{m+2} \cos g'_{m+2} &= r_m \cos \chi'_m + r_{m+2} \cos \chi'_{m+2} + s_{m+1} \cos \sigma_{m+1} \\ G_m \sin g'_m + G_{m+2} \sin g'_{m+2} &= r_m \sin \chi'_m + r_{m+2} \sin \chi'_{m+2} + s_{m+1} \sin \sigma_{m+1}. \end{aligned}$$

Man kann aus diesen beiden Gleichungssystemen die  $G_m$  und  $g'_m$  durch Rekurrenz berechnen, indem man mit einem hinreichend hohen Wert des Index  $m = \bar{m}$  beginnt und  $G_{m+1}$  sowie  $G_{m+2}$  gleich null setzt. Ist das ausgeführt, so findet man  $H_m$  und  $h'_m$  nach den Formeln:

$$H_m \cos h'_m = t_m \cos \tau_m - 2 r_m \sin \chi'_m + G_{m+1} \cos g'_{m+1}$$

$$H_m \sin h'_m = t_m \sin \tau_m - 2 r_m \cos \chi'_m - G_{m+1} \sin g'_{m+1}.$$

Die  $F_m$ ,  $G_m$  und  $H_m$  stimmen überein mit den im vorigen § so bezeichneten Grössen.

Das Verhältnis des Drucks der Strahlung  $D$  zu der Strahlungsenergie in der Volumeneinheit wird dann erhalten aus der Summe:

$$\begin{aligned} \frac{D}{E} &= 2\pi a^3 \left[ \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) G_m G_{m+1} \sin (g'_m - g'_{m+1}) \right. \\ &\quad \left. + (m+1) H_m H_{m+1} \sin (h'_{m+1} - h'_m) \right. \\ &\quad \left. + m(m+1)(m+2) F_m F_{m+1} \sin (\psi'_m - \psi'_{m+1}) \right]. \end{aligned}$$

### § 10. Grenzwerte des Drucks.

In den beiden Fällen, dass die Kugel entweder sehr klein oder sehr gross gegen die Wellenlänge ist, lassen sich einfache geschlossene Ausdrücke für den Druck angeben.

Wenn der Kugelradius und damit  $\varrho$  sehr klein ist, kann man sich in der Entwicklung (28) von  $K_m$ :

$$i^{m+1} K_m = i \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{\varrho^{m+1}} \left\{ 1 + \frac{\varrho^2}{2(2m-1)} + \frac{\varrho^4}{2 \cdot 4 (2m-1)(2m-3)} \dots \right\} \\ + \frac{\varrho^m}{1 \cdot 3 \dots 2m+1} \left\{ 1 - \frac{\varrho^2}{2(2m+3)} + \frac{\varrho^4}{2 \cdot 4 (2m+3)(2m+5)} \dots \right\}$$

auf die paar ersten Glieder beschränken. Wo dann in den obigen Formeln ein Faktor oder Divisor  $K_m$  oder ein Differentialquotient dieser Grössen auftritt, kann man stets nach Potenzen von  $\varrho$  entwickeln und enthält schliesslich den Druck  $D$  selbst in Form einer Potenzreihe nach  $\varrho$ , deren erstes Glied den gesuchten Grenzwert darstellt. Die Rechnungen, die hierzu führen, sind ziemlich umständlich, aber ganz elementar; man muss sich nur hüten, zu früh höhere Glieder wegzulassen, da sich zum Schluss solche niederer Ordnung herausheben. Man erhält als Grenzwert des Drucks für sehr kleine Kugeln:

$$\frac{D}{E} = \frac{14}{3} \pi a^2 \varrho^4 = \frac{224}{3} \pi^2 \frac{a^6}{\lambda^4}. \quad (96)$$

Für sehr grosse Kugeln findet man den Druck folgendermassen. Fällt eine ebene Welle unter einem Winkel  $\psi$  auf eine vollkommen reflektierende ebene Platte auf, so erleidet letztere einen senkrechten Druck:  $P = 2 E \cos^2 \psi$ , wobei  $E$  wiederum die Energie pro Volumeneinheit der einfallenden Welle bedeutet. (Vgl. für die einfache Ableitung dieser Regel aus Maxwell's Druckannahmen Goldhammer, Annalen der Physik, Bd. 4, 1901, pag. 844 und Boltzmann, Wied. Annalen, 22). Betrachten wir die Oberflächenelemente unserer Kugel als eben, so folgt, dass überall auf dieselbe ein senkrechter Druck gleich  $2 E \cos^2 \vartheta$  — in unserer Bezeichnung — wirkt. Die  $x$ -Komponente dieses Drucks ist  $2 E \cos^3 \vartheta$  und der Gesamtdruck auf die Kugel wird durch Integration über die Vorderfläche gewonnen, da die beschattete Hinterfläche natürlich keine Einwirkung erleidet. Es ergibt sich daher:

$$D = a^2 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin \vartheta \cdot 2 E \cos^3 \vartheta$$

oder:

$$\frac{D}{E} = \pi a^2. \quad (97)$$

Es ist im ersten Augenblick auffällig, dass dieser für eine vollkommen reflektierende grosse Kugel geltende Wert genau übereinstimmt mit dem von Herrn Arrhenius benutzten für eine vollkommen schwarze Kugel gültigen. Doch lässt sich dieses Resultat leicht aufklären. An der Stelle, welche von der einfallenden Welle zuerst getroffen wird ( $\vartheta = 0$ ), erleidet eine vollkommen reflektierende Kugel allerdings einen doppelt so starken Druck, als eine vollkommen schwarze. Indessen nimmt nach den Seiten hin bei der vollkommen reflektierenden Kugel der Druck viel rascher ab, weil bei flachen Incidenzen die Druckwirkung der reflektierten Welle die der einfallenden zum Teil wieder aufhebt.

### § 11. Ergebnis.

Nachdem der Druck für sehr grosse wie sehr kleine Kugeln aus den Formeln des vorigen Paragraphen bekannt war, erübrigte noch die Berechnung für Kugeln von der Grössenordnung der Wellenlänge. Ich will zur Bequemlichkeit das Verhältnis von  $D$  zu  $\pi a^3 E$  mit  $V$  bezeichnen. Die Berechnung von  $V$  habe ich nach den Formeln § 9 für einige Werte des Kugelradius numerisch ausgeführt mit folgendem Resultat:

| $\frac{2\pi a}{\lambda} = \varrho$ | $1/4$          | $1/2$          | $V^{1/2}$      | 1              | $\sqrt{2}$     | 2              | 4              |
|------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $2a$                               | $0.08 \lambda$ | $0.16 \lambda$ | $0.22 \lambda$ | $0.32 \lambda$ | $0.45 \lambda$ | $0.64 \lambda$ | $1.27 \lambda$ |
| $V = \frac{D}{\pi a^3 E}$          | 0.018          | 0.35           | 1.07           | 2.42           | 2.16           | 1.31           | 1.22           |
| $\frac{14}{3} \varrho^4$           | 0.018          | 0.29           | 1.17           | 4.67           |                |                |                |

Zur Vergleichung wurden die Werte von  $V$ , wie sie aus der Näherungsformel (96) folgen, mitangesetzt. Man sieht: „Beschränkt man sich auf eine Genauigkeit von etwa 20%, so genügt die Formel:  $D = \frac{14}{3} \pi a^3 \varrho^4 E$  zur Berechnung des Drucks von unendlich kleinen Kugeln

an bis herauf zu Kugeln von ein Viertel Wellenlänge Durchmesser.“ Andererseits muss nach (97) für sehr grosse Kugeln das Verhältnis von  $D$  zu  $\pi a^3 E$  gleich 1 werden. Man sieht aus der Tabelle: Bei derselben Genauigkeit gilt die Formel  $D = \pi a^3 E$  bis herab zu Kugeln von etwa andert-halb Wellenlängen Durchmesser.

Das Verhalten des Drucks für dazwischen liegende Werte wird durch Curve Fig. 1 veranschaulicht. Um dieselbe etwas sicherer zeichnen zu können, habe ich einige Punkte zwischen den oben berechneten bestimmt, indem ich die einfach verlaufende Grösse  $\log V - 4 \log \varrho$  als Funktion von  $\log \varrho$  numerisch interpolierte. Das Verhalten des Drucks lässt sich hier-nach etwa so beschreiben: „Das Verhältnis  $V$  des Drucks zur „auffallenden Energiemenge“  $\pi a^3 E$  steigt von dem für grosse Kugeln gültigen und auch von Herrn Arrhenius benutzten Werte 1 zunächst langsam an, wenn man den Kugelradius verkleinert. Ist der Kugel-durchmesser auf etwa  $\frac{2}{3}$  Wellenlänge herabgesunken, so erfolgt ein merkwürdiges rapides Anwachsen von  $V$ , welches bei etwa  $\frac{1}{3}$  Wellenlänge Durchmesser zu einem Maximum gleich 2.5 führt. Bei weiterer Ver-  
kleinerung des Kugeldurchmessers sinkt  $V$  noch plötz-  
licher ab, als es vorher angestiegen ist. Für  $2a = \frac{1}{3}\lambda$  ist es bereits wieder unter die Einheit zurückgegangen und nimmt alsbald verschwindend kleine Werte an.“

Vergleichen wir nun den Druck des Lichts mit der Schwer-kraft. Ist  $G$  die auf die Masseneinheit, also z. B. das Gramm, wirkende Schwerkraft der Sonne,  $s$  das spezifische Gewicht des Kugelmateriales, so hat die auf die ganze Kugel wirkende Schwerkraft den Betrag:

$$S = \frac{4}{3} \pi a^3 s \cdot G,$$

wobei  $a$  in Centimetern zu messen ist.

Der Druck des Lichts hat den Wert  $\pi a^3 E \cdot V$  und das Verhältnis beider wird:

$$\frac{D}{S} = W = \frac{3}{4} \frac{E}{G} \cdot \frac{V}{as}.$$

Nimmt man die Solarkonstante zu 2.5 (Grammkalorien pro Minute und Quadratcentimeter) an, so findet man mit Herrn Arrhenius (l. c. pag. 83) die Energiedichte der Sonnen-

Fig. 1.

Verhältnis des Drucks zur auffallenden Energie.

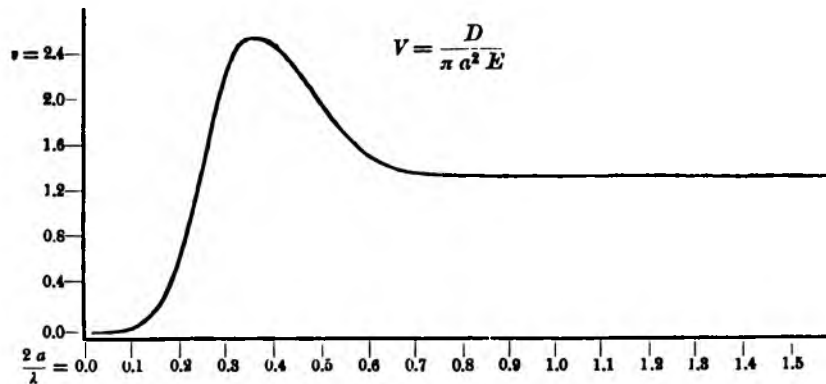
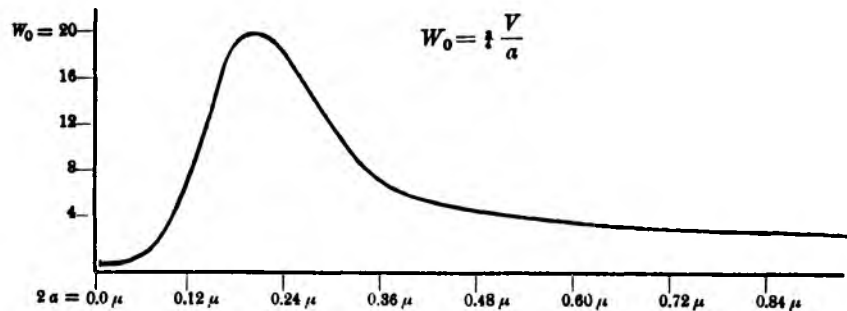


Fig. 2.

Verhältnis des Drucks zur Schwerkraft für  $\lambda = 0.6 \mu$  und  $s = 1$ .



strahlung an der Oberfläche der Sonne zu  $27.5 \cdot 10^{-4} g \text{ cm}^{-2}$  ( $g$  bedeutet das Grammgewicht). Andererseits ist die Schwere auf der Sonnenoberfläche 27.5 mal grösser als auf der Erde, daher:

$$G = 27.5 g$$

und damit:

$$\frac{D}{S} = \frac{1}{4} \cdot \frac{27.5 \cdot 10^{-4}}{27.5} \frac{V}{as} = 0.75 \cdot 10^{-4} \frac{V}{as},$$

wobei immer noch  $a$  in cm zu messen ist. Zieht man es vor,  $a$  in Tausendstel mm ( $\mu$ ) zu messen, so gilt:

$$W = \frac{D}{S} = 0.75 \frac{V}{as}.$$

Wir wollen zunächst den Normalfall betrachten, dass die ganze Sonnenstrahlung aus Wellen der Länge  $0.6 \mu$  bestehe, wie sie der hellsten Stelle des Spektrums entsprechen, und das spezifische Gewicht  $s$  gleich 1 sei, und wollen das diesem Fall entsprechende Verhältnis von Druck zu Schwere mit  $W_0$  bezeichnen.

Dann ist:

$$W_0 = \frac{D}{S} = \frac{1}{4} \frac{V}{a}. \quad (98)$$

Die Werte des Verhältnisses  $W_0$ , welche aus Formel (98) hervorgehen, sind in Fig. 2 graphisch dargestellt. Für grössere Werte von  $a$ , als die Figur giebt, kann man einfach  $V=1$  und:

$$W_0 = \frac{3}{4a}$$

setzen. Aus dieser Formel und der Figur entnimmt man folgendes: Im Normalfall wird der Druck des Lichts gleich der Schwerkraft, sobald der Kugeldurchmesser bis auf  $2.5 \lambda = 1.5 \mu$  herabsinkt. Bei weiterer Verkleinerung der Kugel wächst der Druck über die Schwerkraft hinaus, bis er sie bei einem Kugeldurchmesser von  $0.3 \lambda = 0.18 \mu$  um das 18-fache übertrifft. Von diesem Maximalwert sinkt er schnell wieder ab und wird bereits für den Kugeldurchmesser  $0.12 \lambda = 0.07 \mu$  wieder der Schwerkraft gleich, um sich sodann rasch der Null zu nähern.

„Ein Ueberwiegen des Drucks der Strahlung über die Schwerkraft findet also nur für gewisse zwischen

verhältnismässig engen Grenzen liegende Kugelgrößen ( $0.07 - 1.5 \mu$ ) statt, innerhalb dieses Bereichs wächst aber der Druck bis auf das 18-fache der Schwerkraft an.“

Bei der practischen Anwendung des vorstehenden Ergebnisses hat man vor allem zu berücksichtigen, dass die Strahlung der Sonne in Wirklichkeit nicht auf die Wellenlänge  $0.6 \mu$  konzentriert, sondern über alle möglichen Wellenlängen verteilt ist. Setzt man die Intensität der Sonnenstrahlung zwischen den Wellenlängen  $\lambda$  und  $\lambda + d\lambda$  gleich  $E J(\lambda) d\lambda$ , wobei:

$$\int_0^{\infty} J(\lambda) d\lambda = 1 \quad 99)$$

sein muss, damit der richtige Betrag der Gesamtenergie herauskommt, so hat man strenge den Druck zu berechnen nach der Formel:

$$D = \pi a^3 E \int_0^{\infty} J(\lambda) V d\lambda$$

und erhält für das Verhältnis von Druck zu Schwerkraft:

$$\frac{D}{S} = \frac{3}{4 a s} \int_0^{\infty} J(\lambda) V d\lambda. \quad 100)$$

Die genauere Kenntnis der Funktion  $J(\lambda)$ , der Intensität der Sonnenstrahlung für die verschiedenen Wellenlängen vor ihrer Absorption durch die irdische Atmosphäre, ist noch ein Desideratum. Um einen beiläufigen Anhalt zu gewinnen, setze ich für  $J(\lambda)$  die nach Wien für den vollkommenen Radiator geltende Formel an:

$$J(\lambda) = \frac{1}{30 \lambda_m} \left( \frac{5 \lambda_m}{\lambda} \right)^5 e^{-5 \frac{\lambda_m}{\lambda}}, \quad 101)$$

wobei der willkürliche Faktor, mit dem  $J(\lambda)$  im allgemeinen multipliziert ist, gleich so bestimmt ist, dass die Gleichung (99) erfüllt wird, und wobei für  $\lambda_m$  die Wellenlänge maximaler Intensität, also bei der Sonne  $0.6 \mu$  einzusetzen ist. Die Mes-

sungen von Langley<sup>1)</sup> zeigen, dass man durch diesen Ansatz den wirklichen Verlauf der Funktion  $J(\lambda)$  jedenfalls im Groben trifft. Ich habe nun den Ausdruck (101) für  $J(\lambda)$  in (100) eingeführt und den Wert des Integrals durch mechanische Quadratur abgeschätzt. Dabei hat sich herausgestellt, dass durch die Verteilung der Sonnenenergie auf verschiedene Wellenlängen der Maximalwert des Verhältnisses von Druck zu Schwerkraft etwa auf die Hälfte des für den obigen Normalfall gültigen Wertes, also beiläufig auf 10 reduziert wird.

Auf der andern Seite sind aber auch Umstände in Betracht zu ziehen, welche die Druckwerte vergrössern. Es ist erstens möglich, dass die Materie der Cometenschweife ein geringeres spezifisches Gewicht hat als 1, etwa das spezifische Gewicht 0.8 der Kohlenwasserstoffe. Zweitens ist die Solar-konstante mit 2.5 für die Strahlung der Atmosphäre ausserhalb der Sonne zweifellos zu gering angesetzt und nach neueren Versuchen etwa auf 3.5—4 zu vermehren. Beides zusammen bewirkt eine Vergrösserung des Drucks auf nahezu das Doppelte, sodass man schliesslich auf einen Maximalwert von  $W$  in der Nähe von 20 zurückkommt.

Dass die Teilchen eine Constitution besitzen sollten, bei welchen grössere Drucke auftreten, als bei vollkommen reflektierenden Kugeln, ist, wenn nicht unmöglich, so doch unwahrscheinlich. Fasst man alles zusammen, so kommt man daher zu folgendem Schluss: „Die Theorie der Cometenschweife von Arrhenius erfährt insofern eine Bestätigung, als eine Zurückführung der grössten beobachteten abstossenden Kräfte auf den Druck der Sonnenstrahlung eben noch möglich erscheint. Noch grössere derartige Kräfte, welche die Schwere um mehr als das 20- oder 30-fache übertreffen, würde man aber nicht erklären können, ohne unwahrscheinlich kleine spezifische Gewichte für die Schweifeteilchen anzunehmen.

---

<sup>1)</sup> Memoirs of the National Akad. of Science. Washington Vol. IV.  
1901. Sitznngsb. d. math.-phys. Cl. 23

Schliesslich noch eine Bemerkung über einen Punkt der Sonnenphysik. Herr Arrhenius führt auch das radial gefaserte Aussehen der Sonnenkorona auf den Druck der Sonnenstrahlung zurück, indem er annimmt, dass der aus der Sonne bei Eruptionen emporgeschleuderte Staub unter seinem Einfluss nahezu radial von der Sonne wegströmt (l. c. pag. 85). Ein Zurücksinken der Teilchen in mehr parabolischen Curven, wie sie schon beobachtet worden sind, kann nach der Ansicht von Herrn Arrhenius dadurch bewirkt werden, dass zwei Teilchen sich zufällig treffen und zusammenbacken, mit dem Effekt, dass die Schwerkraft nun den Strahlendruck überwindet. Nach dem oben festgestellten rapiden Absinken des Drucks für sehr kleine Kugeln ist es einfacher, anzunehmen, dass die emporgeschleuderten Körperchen sich durch Verdunstung verkleinern und sich dadurch dem Strahlendruck mehr und mehr entziehen, sodass sie schliesslich samt ihren gasförmigen Verdunstungsprodukten unter dem Einfluss der Schwerkraft zur Sonne zurückfallen.