Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1901. Heft I.

München.
Verlag der k. Akademie.
1901.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber Abkühlung geschlossener Lufträume durch Wärmeleitung.

Von **G. Recknagel.**

(Eingelaufen 20. März.)

1. Voraussetzungen. Ein mit Luft von konstanter Masse (L) und überall gleich hoher Temperatur (J) erfüllter Raum ist durch seine Begrenzung von der übrigen Luft vollkommen abgeschlossen. Er kehrt der äusseren freien Luft, deren Temperatur (A) konstant angenommen wird, nur eine homogene Wand (Mauer) von gegebener Fläche (F) und gleichmässiger Dicke (δ) zu. Die ganze übrige Begrenzung wird als wärmedicht angenommen, d. h. sie gibt weder Wärme an die Luft des Raumes ab, noch nimmt sie solche von ihr auf.

Denkt man sich die Mauer, auf deren beiden Grenzflächen die Abscissenaxe senkrecht stehen soll, durch Schnitte, die den Grenzflächen parallel geführt sind, in Schichten von der Dicke dx geteilt, so wird angenommen, dass jede einzelne Schicht von Anfang an durchaus die gleiche Temperatur hat, und dass die Temperaturen der Schichten von innen nach aussen stetig abnehmen. Bezeichnet man die Anfangstemperaturen 1) der inneren Luft mit J_0, 2) der Innenwand mit $\mathfrak{T}_{i0}$, 3) der Aussenwand mit $\mathfrak{T}_{a0}$, 4) der Aussenluft mit A und 5) der Mauerschicht, die sich in der Entfernung x von der Innenwand befindet, mit U_0, so wird demnach vorausgesetzt

$$J_0 > \mathfrak{T}_{i0} > U_0 > \mathfrak{T}_{a0} > A.$$

Ferner $U_0 = f(x)$ und $\frac{d\,U_0}{d\,x}$ durchaus negativ.

Es soll untersucht werden, wie sich von diesem „Anfangszustande" aus im Laufe der Zeit (Z) die Temperaturen J der Innenluft, $\mathfrak{T}_i$ der Innenwand, U der Mauerschicht im Abstande x, $\mathfrak{T}_a$ der Aussenwand verändern, und wieviel Wärme in gegebener Zeit an die Aussenluft verloren geht. Die genannten vier Temperaturen sind somit als Funktionen der Zeit zu denken, und diese Funktionen sollen ermittelt werden.[1]

2. Die Grundlage der folgenden Rechnung gibt der Satz: die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit aus der Schicht (x, U) in die Schicht ($x + dx$, $U - dU$) übergeht, ist dem Temperaturgefälle

$$-\frac{dU}{dx}$$

proportional.

Die Wärmemenge, die man dem Temperaturgefälle als Faktor beizugeben hat, um die in der Zeiteinheit übergehenden Kalorien zu erhalten, hängt von der Grösse der gewählten Zeiteinheit, von der Grösse der Wandfläche und vom Material der Mauer ab. Nimmt man als Zeiteinheit die Stunde, als Wandfläche ein Quadratmeter, so heisst der dem Temperaturgefälle beizugebende Faktor λ das innere Leitungsvermögen des betreffenden Materials.

Demnach ist die bei dem Gefälle $\left(-\frac{dU}{dx}\right)$ in der Stunde

---

[1]) Es werden dabei die Hilfsmittel benützt, welche Fourier in der Theorie analytique de la Chaleur gibt. Doch darf bemerkt werden, dass Fourier den Fall einer veriablen Lufttemperatur überhaupt nicht behandelt hat, und dass das von ihm Gebotene für diesen Fall nicht ausreicht. Von späteren Arbeiten in dieser Richtung ist mir durch Byerly, An Elem. treatise on Fourier's Series etc. S. 123 bekannt, dass E. W. Hobson das Problem behandelt hat: die Wärmebewegung in einem unendlich langen festen Körper von der Anfangstemperatur Null zu ermitteln, wenn eine ebene Grenzfläche derselben an Luft grenzt, deren Temperatur eine gegebene Funktion der Zeit ist. Der von Byerly gegebenen Probe nach zu urteilen, erfolgt die Behandlung durch das ebenfalls von Fourier eingeführte $\int e^{-z^2} dz$, dessen Grenzen den Bedingungen des Problems angepasst werden.

durch 1 Quadratmeter des Querschnittes (x, U) einer Mauer vom inneren Leitungsvermögen λ gehende Wärmemenge

$$-\lambda \frac{dU}{dx} \text{ Kalorien.}^{1)}$$

3. Indem man von der Wärmemenge, welche in der Zeit dz in die Schicht (x, U) von der Dicke dx eintritt, die gleichzeitig austretende Wärmemenge subtrahiert, bleibt die zur Temperaturerhöhung $\frac{dU}{dz} dz$ der Schicht verwendete Wärme übrig, für welche man mittelst eben dieser Temperaturerhöhung noch einen zweiten Ausdruck gewinnt. Durch Vergleichung beider erhält man die Differenzialgleichung

$$\frac{dU}{dz} = \frac{\lambda}{sw} \frac{d^2 U}{dx^2}, \tag{I}$$

in welcher S das Gewicht eines Kubikmeters Mauer, w die Wärmekapazität des Materials bezeichnet.[2] Statt $\frac{\lambda}{sw}$ wird künftig $\varkappa$ geschrieben.

4. Dieser Differenzialgleichung genügt die Funktion

$$U = A + (a \cos mx + b \sin mx)\, e^{-\varkappa m^2 z}. \tag{II}$$

Dieselbe enthält die drei Konstanten m, a, b, mittelst deren man den Eigentümlichkeiten des Problems gerecht werden kann, und überdies die Annahme, dass sich mit unendlich wachsender Zeit die Temperatur der Mauer überall der konstanten Temperatur der äusseren Luft nähert.[3]

5. Einführung der Eigentümlichkeiten des Problems. Die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit von der Aussenwand (F) der Mauer abgeht, nämlich

$$F(\mathfrak{T}_a - A)\, h_2$$

---

[1] Fourier, Chap. I Nr. 72 und an anderen Orten.
[2] Fourier, Chap. II Nr. 142.
[3] Fourier, Chap. IV Nr. 239 und ff.

(wobei h_2 den äusseren Leitungskoeffizienten der Aussenwand bezeichnet), ist der Wärmemenge gleich, welche in derselben Zeit durch die äusserste Schicht der Mauer geht, nämlich

$$-F\lambda \left|\frac{dU}{dx}\right|_\delta,$$

wobei durch den Index δ angedeutet werden soll, dass in $\frac{dU}{dx}$ der Grenzwert δ an die Stelle von x gesetzt werden soll.[1])

Die Gleichung

$$(\mathfrak{T}_a - A)\, h_2 = -\lambda \left|\frac{dU}{dx}\right|_\delta \qquad \text{(III)}$$

geht durch Substitution aus II ($U = \mathfrak{T}_a$ für $x = \delta$) über in

$$h_2 (a \cos m\,\delta + b \sin m\,\delta) = \lambda\, m\, (a \sin m\,\delta - b \cos m\,\delta). \qquad \text{(IV)}$$

Man erhält so die erste Beziehung zwischen den eingeführten Konstanten a, b, m, den Leitungsvermögen λ, h_2 und der Mauerstärke δ.

Dividiert man durch $\lambda\, a \cos m\,\delta$, schreibt p_2 für $\frac{h_2}{\lambda}$, β für $\frac{b}{a}$ und löst nach tang $m\,\delta$ auf, so erhält man

$$\operatorname{tang} m\,\delta = \frac{p_2 + \beta m}{m - \beta p_2} \qquad \text{(IVa)}$$

Denkt man sich β bestimmt, so ergeben sich hieraus unendlich viele Werte von m von der Form

$$m_n = [2(n-1) + \gamma_n]\,\frac{\pi}{2\,\delta},$$

worin nach und nach für n alle ganzen positiven Zahlen von 1 bis ∞ zu setzen sind, während γ_n als ächter Bruch gedacht ist.

Es ist demnach eine Erweiterung der Gleichung II vorzunehmen, so dass rechts eine unendliche Reihe von Gliedern auftritt, die dem ersten konform gebildet sind.

---

[1]) Fourier, Chap. II Nr. 146—154.

$$
\begin{aligned}
U = A &+ (a_1 \cos m_1 x + b_1 \sin m_1 x)\, e^{-\varkappa m_1^2 z} \\
&+ (a_2 \cos m_2 x + b_2 \sin m_2 x)\, e^{-\varkappa m_2^2 z} \\
&+ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
&+ (a_n \cos m_n x + b_n \sin m_n x)\, e^{-\varkappa m_n^2 z} \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{aligned}
\qquad \text{(II a)}
$$

Zur Abkürzung soll im Folgenden e_1 für $e^{-\varkappa m_1^2 z}$, e_2 für $e^{-\varkappa m_2^2 z}$, e_n für $e^{-\varkappa m_n^2 z}$ geschrieben werden.

6. **Fortsetzung.** Wie für die Aussenwand so gilt analog auch für die Innenwand die Gleichung

$$(J - \mathfrak{T}_i)\, h_1 = -\lambda \left|\frac{dU}{dx}\right|_0 \qquad \text{(V)}$$

welche aussagt, dass die in der Zeiteinheit vom Quadratmeter aufgenommene Wärme $(J - \mathfrak{T}_i)\, h_1$, derjenigen gleich ist, die gleichzeitig durch die innerste Mauerschicht, ihrem Temperaturgefälle und ihrer Leitungsfähigkeit gemäss, in die Mauer eindringt.

Setzt man in Gl. (II a) $x = 0$, so geht U in $\mathfrak{T}_i$ über, und es wird

$$\mathfrak{T}_i - A = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \ldots = \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n e_n).$$

Ferner ist

$$\left|\frac{dU}{dx}\right|_0 = \sum_{n=1}^{n=\infty} (b_n m_n e_n).$$

Durch Substitution dieser Werte in Gl. V erhält man einen Ausdruck für die Temperatur J der Innenluft, nämlich $\left(\frac{h_1}{\lambda} = p,\ \text{gesetzt}\right)$

$$J = A + \left(a_1 - \frac{1}{p_1} b_1 m_1\right) e_1 + \left(a_2 - \frac{1}{p_1} b_2 m_2\right) e_2 + \ldots.$$

oder

$$J = A + \sum \left[\left(a_n - \frac{1}{p_1} b_n m_n\right) e_n\right] \qquad \text{(V a)}$$

Ein zweiter Ausdruck für die Temperatur J wird auf folgende Weise gefunden.

Bezeichnet man mit $(-d\,J)$ die Aenderung, welche die Temperatur J in der Zeit $d\,z$ dadurch erfährt, dass der Luft die Wärmemenge

$$-\lambda \left|\frac{d\,U}{d\,x}\right|_0 F\,d\,z$$

entzogen wird, mit L die (konstant angenommene) Masse der eingeschlossenen Luft, mit c ihre Wärmekapazität, so ist

$$-d\,J\,L\,c = -\lambda \left|\frac{d\,U}{d\,x}\right|_0 F\,d\,z,$$

was sich, da $\left|\frac{d\,U}{d\,x}\right|_0$ eine Funktion der Zeit Z allein ist, sofort integrieren lässt.

Da für $Z = 0$, $J = J_0$, erhält man

$$(J_0 - J)\,L\,c = \frac{\lambda\,F}{\varkappa} \Sigma \left[\frac{b_n}{m_n}(e_n - 1)\right].$$

Erinnert man sich an den Wert von $\varkappa = \frac{\lambda}{s\,w}$, dividiert beiderseits durch $F\,s\,w$ und setzt den im allgemeinen kleinen Bruch $\frac{L\,c}{F\,s\,w} = \varrho$, so erhält man die Form

$$(J_0 - J)\,\varrho = \Sigma \left[\frac{b_n}{m_n}(e_n - 1)\right] \tag{VI}$$

Nach Gl. (Va) geht J für $Z = \infty$ oder $e_n = 0$ in A über. Somit gilt auch

$$(J_0 - A)\,\varrho = -\Sigma \left(\frac{b_n}{m_n}\right) \tag{6}$$

Zieht man Gl. VI von Gl. (6) ab, so bleibt

$$J = A - \frac{1}{\varrho} \Sigma \left[\frac{b_n}{m_n} e_n\right]. \tag{VI a}$$

Da nun die beiden Ausdrücke für die Temperatur J, welche die Innenluft zur Zeit Z hat, identisch sein müssen, so folgt aus (Va) und (VIa) die Gleichheit der Koeffizienten beider Reihen:

$$a_n - \frac{1}{p_1} b_n m_n = - \frac{b_n}{\varrho m_n}$$

und somit eine zweite Beziehung zwischen den eingeführten Konstanten a, b, m, welche alsbald in der Form $\left(\frac{b_n}{a_n} = \beta_n\right)$

$$\beta_n = - p_1 \frac{\varrho m_n}{p_1 - \varrho m_n^2} \tag{VII}$$

Verwendung finden wird.

7. Berechnung der m. Indem man aus (VII) in (VIa) substituiert, erhält man

$$m \operatorname{tang} m \delta = p_2 - \frac{\varrho (m^2 + p_2^2)}{1 - \varrho \left(\frac{m^2}{p_1} - p_2\right)},$$

wo m die einzige Unbekannte ist.

Da
$$m = (2(n-1) + \gamma) \frac{\pi}{2 \delta},$$

so wird allgemein

$$\operatorname{tang} m \delta = \operatorname{tang} \left(\gamma \frac{\pi}{2}\right).$$

Da δ bekannt und n die gewählte Ordnungszahl der m ist, so ist auch im Werte von m der Bruch γ die Unbekannte, und z. B. für $\delta = \frac{1}{4}$ Meter das dritte m von der Form

$$m_3 = (4 + \gamma_3) 2 \pi.$$

Diese Einführung des γ bietet den Vorteil, dass bei Versuchen mit nahe liegenden Werten von γ die rechte Seite nur geringen Aenderungen unterliegt, während die linke Seite sehr empfindlich reagiert.

8. Berechnung der a. In der Reihe

$$U - A = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[a_n (\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x) e^{-\varkappa m_n^2 z}\right]$$

können nun die m und β aus den Konstanten des Problems (h_1, h_2, λ, δ, ϱ) berechnet werden. Es erübrigt noch, die Koeffizienten a zu bestimmen, was dadurch geschieht, dass man den „Anfangszustand", d. h. die Funktion von x, durch welche der Ueberschuss der Anfangstemperatur U_0 der Mauer über A gegeben ist, durch die Reihe

$$U_0 - A = \sum_{n=1}^{n=\infty} [a_n (\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)] \qquad \text{(VIII)}$$

darstellt. Hiefür stehen noch die Koeffizienten a zur Verfügung.[1])

---

[1]) Fourier hat für solche Darstellungen eine Methode angegeben, die ich am ausführlichsten Chap. VI Nr. 315 und 316 beschrieben finde, wo sie verwendet wird, um den Anfangszustand eines unendlich langen Cylinders darzustellen. Auf den vorliegenden Fall übertragen, würde die Vorschrift etwa so lauten: Es sei $U_0 - A = f(x)$ und $\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x$ mit u_n bezeichnet, so soll durch geeignete Bestimmung der a werden

$$f(x) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \ldots . a_n u_n + \ldots$$

„Um den ersten Koeffizienten (a_1) zu bestimmen, multipliziere man jedes Glied der Gleichung mit $\sigma_1 \, d x$, wobei σ_1 eine Funktion von x ist, und integriere dann von $x = 0$ bis $x = \delta$. Die Funktion σ_1 ist so zu bestimmen, dass nach Ausführung der Integrationen die rechte Seite der Gleichung sich auf das erste Glied reduziert, d. h. dass alle übrigen Integrale Null werden. Um den zweiten Koeffizienten a_2 zu bestimmen, multipliziert man mit $\sigma_2 \, d x$ etc." ..... „Es handelt sich jetzt darum, die Funktionen $\sigma_1, \sigma_2 \ldots$ zu finden." Fourier gibt hiefür in Nr. 316 eine Anleitung, die sich zwar auf das spezielle Problem des Cylinders bezieht, aber leicht auf andere Fälle übertragen werden kann.

Ein übersichtliches Beispiel hiezu findet man Chap. V Nr. 291, wo der Anfangszustand $F(x)$ einer Kugel durch die Reihe

$$F(x) = \frac{1}{x} (a_1 \sin n_1 x + a_2 \sin n_2 x + a_3 \sin n_3 x \ldots)$$

dargestellt werden soll, und die n ebenso wie meine m die Wurzeln einer transscendenten Gleichung $\left[\frac{n X}{\operatorname{tang} n X} = 1 - h X\right]$ sind, die ähnlich wie Gl. (IVa) durch Vergleichung der von der Oberfläche abgehenden mit der aus der äussersten Kugelschicht heraus dringenden Wärme gefunden ist. (X ist der Kugelradius.) Fourier multipliziert, um a_1 zu bestimmen, mit $x \sin n_1 x$, integriert zwischen den Grenzen 0 und X, und kann mit-

Um den Koeffizienten a_r zu bestimmen, multipliziert man beide Seiten der Gl. VIII mit

$$(\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x)\, d\, x$$

und integriert zwischen den Grenzen 0 und δ.

Links erhält man eine Funktion von $m_r, \delta \ldots$, die mit $\varphi(m_r)$ bezeichnet werden soll:

$$\varphi(m_r) = \int_0^\delta (U'_0 - A)(\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x)\, d\, x.$$

Rechts erhält man eine unendliche Reihe, deren allgemeines (n^{tes}) Glied:

$$t_n = a_n \int_0^\delta (\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x)(\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)\, d\, x$$

untersucht werden soll.

Das unbestimmte Integral bringt man leicht auf die Form:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{m_r^2 - m_n^2} \Big\{ & m_r \sin m_r x \cos m_n x - m_n \cos m_r x \sin m_n x \\ & - \beta_r (m_r \cos m_r x \cos m_n x + m_n \sin m_r x \sin m_n x) \\ & + \beta_n (m_r \sin m_r x \sin m_n x + m_n \cos m_r x \cos m_n x) \\ & - \beta_r \beta_n (m_r \cos m_r x \sin m_n x - m_n \sin m_r x \cos m_n x) \Big\} \end{aligned}$$

---

telst der transscendenten Gleichung nachweisen, dass rechts alle Integrale verschwinden bis auf das erste.

In ganz analoger Weise führt die Methode Fouriers zum Ziel, wenn man sich im vorliegenden Probleme auf die Annäherung beschränkt, die man unter Ausserachtlassung des Einflusses der Luft ($\beta = 0$) gewinnt.

Die Schwierigkeit der hier behandelten Aufgabe fand ich darin, dass für $u_1 = \cos m_1 x + \beta_1 \sin m_1 x$ eine Funktion, welche die Rolle des obigen σ_1 oder des beispielsweisen $x \sin n_1 x$ übernehmen konnte, nicht zu ermitteln war. Am günstigsten gestaltete sich die Rechnung für $\sigma_1 = u_1$. Zwar verschwanden die Integrale auf der rechten Seite nicht, sondern bildeten jedesmal eine unendliche Reihe bestimmter mit den Koeffizienten a multiplizierter Grössen. Die Lösung gelang aber dadurch, dass die Summe dieser Reihe angegeben werden konnte. Der Text gibt die detaillierten Nachweise.

daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
t_n = \frac{a_n}{m_r^2 - m_n^2} \Big\{ & m_r \sin m_r \delta \cos m_n \delta - m_n \cos m_r \delta \sin m_n \delta \\
& - \beta_r (m_r \cos m_r \delta \cos m_n \delta + m_n \sin m_r \delta \sin m_n \delta) \\
& + \beta_n (m_r \sin m_r \delta \sin m_n \delta + m_n \cos m_r \delta \cos m_n \delta) \\
& - \beta_r \beta_n (m_r \cos m_r \delta \sin m_n \delta - m_n \sin m_r \delta \cos m_n \delta) \Big\} \\
& + a_n \frac{\beta_r m_r - \beta_n m_n}{m_r^2 - m_n^2}.
\end{aligned}
$$

Es lässt sich nachweisen, dass der Ausdruck in $\{\}$ Null ist. Gemäss Gl. (IV) ist für jedes m und das zugehörige β

$$\frac{m (\sin m \delta - \beta \cos m \delta)}{\cos m \delta + \beta \sin m \delta} = \frac{h_2}{\lambda}.$$

Somit

$$\frac{m_r (\sin m_r \delta - \beta_r \cos m_r \delta)}{\cos m_r \delta + \beta_r \sin m_r \delta} = \frac{m_n (\sin m_n \delta - \beta_n \cos m_n \delta)}{\cos m_n \delta + \beta_n \sin m_n \delta}.$$

Führt man hier die Multiplikation mit dem Produkte der Nenner aus und ordnet nach den β, so erhält man das Behauptete: $\{\} = 0$.

Es verschwindet somit in jedem Gliede (t_n), in welchem m_n von m_r verschieden ist, der erste Summand, und erhält sich nur in dem einen Gliede t_r, in welchem wegen $n = r$ auch der Nenner $m_r^2 - m_n^2$ zu Null wird, in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, deren wirklicher Wert noch zu bestimmen ist und vorläufig durch $a_r Q$ bezeichnet werden soll.

Der zweite Summand von t_n:

$$a_n \frac{\beta_r m_r - \beta_n m_n}{m_r^2 - m_n^2}$$

wird von dem Nenner $m_r^2 - m_n^2$ frei, wenn man aus Gl. VII die Werte der β, nämlich

$$\beta_r = - \frac{\varrho p_1 m_r}{p_1 - \varrho m_r^2}, \quad \beta_n = - \frac{\varrho p_1 m_n}{p_1 - \varrho m_n^2}$$

einsetzt, und erhält die Form:

$$-\frac{a_n \varrho p_1^2}{(\varrho m_r^2 - p_1)(\varrho m_n^2 - p_1)}$$

$$= \frac{p_1}{p_1 - \varrho m_r^2} \cdot \left(-\frac{a_n p_1 \varrho}{p_1 - \varrho m_n^2}\right)$$

$$= \frac{\beta_r}{\varrho m_r} \cdot \left(-\frac{a_n \beta_n}{m_n}\right) \text{ oder } \frac{\beta_r}{\varrho m_r}\left(-\frac{b_n}{m_n}\right).$$

Somit gilt die Gleichung

$$\varphi(m_r) = a_r Q + \frac{\beta_r}{\varrho m_r}\left(-\frac{b_1}{m_1} - \frac{b_2}{m_2} - \ldots \frac{b_r}{m_r} \ldots - \frac{b_n}{m_n} \ldots\right)$$

oder

$$\varphi(m_r) = a_r Q + \frac{\beta_r}{\varrho m_r} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(-\frac{b_n}{m_n}\right).$$

Nun ist aber nach Gl. (6)

$$(J_0 - A)\varrho$$

die Summe der Reihe $\sum\left(-\frac{b_n}{m_n}\right)$. Folglich wird

$$\varphi(m_r) = a_r Q + \frac{\beta_r}{m_r}(J_0 - A). \tag{IX}$$

Es ist noch Q zu bestimmen.

In der Reihe $\frac{\beta_r}{\varrho m_r} \sum\left(-\frac{b_n}{m_n}\right)$ ist auch der zweite Summand des Gliedes t_r enthalten, nämlich

$$\frac{\beta_r}{\varrho m_r}\left(-\frac{b_r}{m_r}\right) = -\frac{a_r}{\varrho} \frac{\beta_r^2}{m_r^2},$$

so dass der volle Wert desselben ist

$$t_r = a_r Q - \frac{a_r}{\varrho}\left(\frac{\beta_r}{m_r}\right)^2.$$

Andererseits ist (unter Benützung von Gl. IV)

$$t_r = a_r \int_0^\delta (\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x)^2 \, dx$$

$$= a_r \left[\delta \frac{1+\beta_r^2}{2} + \left(1 + \frac{\beta_r}{m_r} p_2\right) \cdot \frac{\sin m_r \delta}{2 m_r} \cdot \frac{\cos (m_r \delta - \varphi_r)}{\cos \varphi_r} \right] \quad \text{(X)}$$

wobei $\beta_r = \operatorname{tang} \varphi_r$ gesetzt ist.

Schreibt man zur Abkürzung für das mit a_r multiplizierte Integral das Zeichen B_r, so dass

$$t_r = a_r B_r,$$

so folgt nun Q aus

$$a_r B_r = a_r Q - \frac{a_r}{\varrho} \left(\frac{\beta_r}{m_r}\right)^2$$

$$Q = B_r + \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\beta_r}{m_r}\right)^2.$$

Nach Substitution dieses Ausdruckes in IX wird der gesuchte Koeffizient

$$a_r = \frac{\varphi(m_r) - \frac{\beta_r}{m_r}(J_0 - A)}{B_r + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\beta_r}{m_r}\right)^2}. \quad \text{(XI)}$$

---

9. Zusammenstellung der Resultate.

1) Für die Temperatur U, welche die im Abstande x von der Innenwand befindliche Schicht der Mauer zur Zeit Z besitzt, gilt

$$U - A = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[a_n (\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x) \, e^{-\varkappa m_n^2 Z} \right].$$

Zunächst sind die m nach dem in Nr. 7 angegebenen Verfahren zu berechnen, worauf die β aus Nr. 6, Gl. VII erhalten werden.

Schliesslich erhält man die a, wenn der Anfangszustand $(U_0 - A)$ der Mauer und die anfängliche Temperatur (J_0) der eingeschlossenen Luft bekannt sind, aus Nr. 8 Gl. X

$$a_n = \frac{\varphi(m_n) - \frac{\beta_n}{m_n}(J_0 - A)}{B_n + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\beta_n}{m_n}\right)^2},$$

wobei

$$\varphi(m_n) = \int_0^\delta (U_0 - A)(\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)\, d x$$

$$B_n = \int_0^\delta (\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)^2\, d x.$$

2) Daran reihen sich als besondere Fälle: die Temperatur $\mathfrak{T}_a$ der Aussenwand $(x = \delta)$:

$$\mathfrak{T}_a = A + \sum \left[a_n (\cos m_n \delta + \beta_n \sin m_n \delta)\, e^{-\varkappa m_n^2 z}\right]$$

und die Temperatur $\mathfrak{T}_i$ der Innenwand $(x = 0)$:

$$\mathfrak{T}_i = A + \sum \left[a_n\, e^{-\varkappa m_n^2 z}\right].$$

3) Die Temperatur (J) der Innenluft ist nach Gl. VI a:

$$J = A - \frac{1}{\varrho} \sum \left[\frac{\beta_n}{m_n}\, a_n\, e^{-\varkappa m_n^2 z}\right]$$

4) Die in der Zeit Z an die äussere Luft abgegebene Wärme V (der Wärmeverlust) ist gegeben durch

$$V = \int_0^Z (\mathfrak{T}_a - A)\, h_2\, F\, d z.$$

Durch Ausführung der Integration wird

$$V = \frac{h_2 F}{\varkappa} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{a_n}{m_n^2}(\cos m_n \delta + \beta_n \sin m_n \delta)\right]$$

$$- \frac{h_2 F}{\varkappa} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{a_n}{m_n^2}(\cos m_n \delta + \beta_n \sin m_n \delta)\, e^{-\varkappa m_n^2 z}\right],$$

und es stellt der Minuend die ursprünglich in dem Objekte (Innenluft und Aussenmauer) über dem Temperaturniveau

A enthaltene Wärme dar, während der Subtrahend aussagt, wieviel von dieser Wärme zur Zeit Z noch vorhanden ist.

10. Anwendungen. Als Anfangszustand des Abkühlungsprozesses bietet das grösste Interesse der Dauerzustand, in welchem sich ein vollkommen durchgeheiztes Zimmer befindet.

Im Dauerzustande $\left(\frac{d^2 U}{d x^2} = 0\right)$ gelten die Beziehungen

$$h_1 (J_0 - \mathfrak{T}_{i0}) = \lambda \frac{\mathfrak{T}_{i0} - \mathfrak{T}_{a0}}{\delta} = h_2 (\mathfrak{T}_{a0} - A)$$

und, insofern er als Anfangszustand des Abkühlungsprozesses angenommen wird

$$U_0 = \mathfrak{T}_{i0} - \frac{\mathfrak{T}_{i0} - \mathfrak{T}_{a0}}{\delta} x$$

oder

$$U_0 - A = (\mathfrak{T}_{i0} - A) - \frac{\mathfrak{T}_{i0} - \mathfrak{T}_{a0}}{\delta} x.$$

Dabei ist

$$\mathfrak{T}_{i0} - A = (J_0 - A) \frac{\frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2}}{\frac{1}{h_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2}},$$

$$\frac{\mathfrak{T}_{i0} - \mathfrak{T}_{a0}}{\delta} = (J_0 - A) \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{h_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2}}.$$

Führt man die einfachere Bezeichnung ein

$$U_0 - A = C - D x,$$

so wird in Nr. 9. 1)

$$\varphi (m_n) = \int_0^\delta (C - D x) (\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x) \, d x.$$

$$= \frac{C}{m_n} (\beta_n + \sin m_n \delta - \beta_n \cos m_n \delta)$$

$$- \frac{D}{m_n^2} [- 1 + m_n \delta (\sin m_n \delta - \beta_n \cos m_n \delta)$$

$$+ (\cos m_n \delta + \beta_n \sin m_n \delta)],$$

was mit Hilfe der Gl. IV auf

$$\frac{D + m_n \beta_n C}{m_n^2}$$

zurückgeführt werden kann.

11. Als Beispiel für numerische Rechnung sei ein Zimmer gewählt von 5 m Länge, 5 m Breite, 4 m Höhe, welches eine Wand von $5 \cdot 4 = 20$ qm Fläche und 0,25 m Dicke der freien Luft zukehrt. Die Wand ist von Backsteinmauerwerk, so dass $\lambda = 0{,}7$, $h_1 = 6$ und unter der Annahme von Windstille auch $h_2 = 6$ angenommen werden darf. Ferner ist $S = 1800$ kg, $w = 0{,}2$, also $\varkappa = \frac{7}{3600}$. $\varrho = \frac{c\,L}{F\,s\,w}$ wurde zu 0,004 angenommen.

Wenn man kleinere Werte als 1 (1 Stunde) für Z nicht heranziehen will, genügen 6 Glieder der Reihe in Nr. 9. 1), um die Temperaturen auf 0,1° Cels. genau zu berechnen. Die bezüglichen Koeffizienten sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

	m	$\sphericalangle m\delta$	β	a
(1)	4,38	62° 9′	− 0,01751	0,63894 $(J_0 - A)$
(2)	14,45	180° + 27° 0′	− 0,06407	0,07651 „
(3)	25,82	360° + 9° 50′	− 0,1499	0,03235 „
(4)	37,04	540° − 9° 20′	− 0,4120	0,02395 „
(5)	45,48	720° − 68° 32′	− 5,213	+ 0,00407 „
(6)	53,24	720° + 42° 34′	+ 0,6636	− 0,01000 „

12. Nimmt man $J_0 = +20°$, $A = -20°$, so berechnen sich die Temperaturen, welche die Innenluft, die Innenwand, einzelne Mauerschichten und die Aussenwand nach Verlauf von 1, 2, 10 Stunden besitzen, wie folgt:

Abstand von der Innenwand	Ursprüngl. Temperatur	Temperatur nach 1 Stunde	Temperatur nach 2 Stunden	Temperatur nach 10 Stunden
	(J_0)	(J_1)	(J_2)	(J_{10})
Innenluft	+ 20	7,8	5,6	— 2,1
x	U_0	U_1	U_2	U_{10}
0	10,35	7,1	5,2	— 2,2 (Innenwand)
0,2 δ	6,2	5,4	4,1	— 2,7
0,4 δ	2,1	1,9	0,9	— 4,0
0,7 δ	— 4,1	— 4,1	— 4,2	— 7,4
δ	— 10,35	— 10,35	— 10,5	— 12,2 (Aussenwand)

Es ist bemerkenswert, dass die Temperaturen der Innenluft und der Innenwand, die für die Bewohner von unmittelbarem Interesse sind, nach Abstellung der Heizung sehr rasch abnehmen, während die Temperatur der Aussenwand eine zähe Ausdauer zeigt. Sie sinkt in 10 Stunden um nicht ganz 2°, während die Zimmerluft um mehr als 22°, die Innenwand um $12^1/_2{}^0$ kälter wird.

Der auch nach Abstellung der Heizung in der früheren Richtung fortfliessende Wärmestrom verhält sich demnach wie ein Wasserlauf, der in seinem Oberlaufe durch eine Schleusse abgesperrt wird. Während hier alsbald Ebbe eintritt, erleidet die Stromstärke im Unterlaufe noch längere Zeit hindurch keine erhebliche Aenderung.

Damit in Zusammenhang steht das Rechnungsergebnis Nr. 9. 4), welches für den gesamten Wärmeverlust in 10 Stunden

10888 Kalorien

gibt, nicht viel weniger als die Wärmemenge von

11600 Kalorien,

welche man hätte aufwenden müssen, um den Dauerzustand in diesen 10 Stunden aufrecht zu halten.

Will man nach zehnstündiger Unterbrechung der Heizung das Zimmer zunächst wieder bewohnbar machen, und dann vollständig durchheizen, so hat man in der folgenden Heizperiode nicht nur die gleichzeitigen Wärmeverluste zu decken, die nicht viel geringer sind als die im Dauerzustand stattfindenden, sondern auch jene verlorenen 10888 Kalorien allmählich wieder zuzuführen. Welche Mittel und wieviel Zeit hiezu nötig sind, soll in der Folge dargelegt werden.