

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1974

MÜNCHEN 1975

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Runaway und Renormierung

F. Hupke, F. Bopp

Sektion Physik der Ludwig-Maximilians-Universität in München

Abstract:

We consider the motion of pointcharges in their own electromagnetic field. Using the Green function of Landé $\delta(x^2 + l^2)$ instead of Maxwell-Dirac's $\delta(x^2)$, equation of motions turns out, which can be integrated rigorously. In general, we obtain Zitterbewegung and runaway. Both vanish if Dirac's renormalization condition yields. No other conditions are necessary.

1. Das Wirkungsintegral

Unter den Greenfunktion für regularisierte Elektrodynamiken gibt es eine einparametrische Schar, die zu Potentialen führt, welche sich von den Liénard-Wiechertschen¹ nur in der Art der Berechnung der Retardierung unterscheiden. An die Stelle der retardierten Maxwell-Diracschen Greenfunktion $2 \Theta(x) \delta(x^2)$ tritt

$$(1.1) \quad G = 2 \Theta(x) \delta(x^2 + l^2), \quad \Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x^2 < 0, x^0 > 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(x zeitartig, wenn $x^2 < 0$). Eine Punktladung e auf der Raum-Zeit-, der RZ-Bahn $x(\tau)$ erzeugt danach im Aufpunkt z das Viererpotential

$$(1.2) \quad A^\mu(z) = \frac{e}{4\pi} \left(\frac{\dot{x}^\mu(\tau)}{(z - x(\tau)) \cdot \dot{x}(\tau)} \right)_{ret}.$$

Darin berechnet sich τ aus der Retardierungsbedingung

$$(1.3) \quad (z - \dot{x}(\tau))^2 = -l^2, \quad z^0 - x^0(\tau) > 0.$$

Diese beiden Gleichungen unterscheiden sich von denen im Maxwellfall nur durch die Annahme $l \neq 0$.

Für mehrere Punktladungen ohne Selbstwechselwirkung berechnen sich die Bewegungsgleichungen aus dem Fokkerschen Wirkungsintegral.² Nach der Regularisierung kann man die Selbstwechselwirkung einbeziehen und speziell die Bewegung einer Punktladung in ihrem eigenen elektromagnetischen Feld untersuchen. Dafür lautet das Fokkersche Integral in explizite kovarianter Form (Dirac³):

$$(1.4) \quad S = -M \int \sqrt{-\dot{x}(\tau)^2} d\tau + \frac{\alpha}{2} \int \delta((x(\tau_1) - x(\tau_2))^2 + l^2) \dot{x}(\tau_1) \dot{x}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

(Einheiten: Wirkungsquantum $\hbar$, Vakuum-Lichtgeschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, Vakuum-Wellenwiderstand $f = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$, $\alpha =$ Feinstrukturkonstante). Wegen der Parameterinvarianz sind die τ willkürlich wählbar. M verhält sich wie eine feldunabhängige Masse (J. J. Thomson⁴). Tatsächlich wird sie als negative Größe die Kohäsionsenergie der Punktladung beschreiben.

Die obige Greenfunktion ist schon 1939 von Landé⁵ untersucht und von andern aufgegriffen worden. Um 1950 ist sie als einfaches Beispiel⁶ im Rahmen der Theorie von Mie⁷ und Born⁸ wiederentdeckt worden. Erst vor wenigen Jahren hat man bemerkt, daß sie zu Bewegungsgleichungen mit endlich vielen Freiheitsgraden führt,⁹ was eine elementare Quantisierung ermöglicht.¹⁰ Hier betrachten wir nur die nichtquantisierten Gleichungen.

In (1.4) ist die Strahlungskraft noch vernachlässigt. Diesen Mangel kann man nicht dadurch beheben, daß man die Greenfunktion in (1.4) durch die in (1.1) ersetzt. Denn der Θ -Faktor fällt in der quadratischen Form heraus. Ähnliches gilt für alle dissipativen Systeme, z. B. für den gedämpften harmonischen Oszillator. Um weiterzukommen, muß man das reale gedämpfte System mit einem zugeordneten fiktiven angefachten System zusammen betrachten. Beispielsweise liefert die Lagrangefunktion¹¹

$$L = m (\dot{\bar{x}}(t) \dot{x}(t) - 2 \gamma \bar{x}(t) \dot{x}(t) - \omega_0^2 \bar{x}(t) x(t))$$

bei freier Variation von $\bar{x}$ die Bewegungsgleichungen des gedämpften und bei freier Variation von x die des angefachten Oszillators.

Reichlich formal wenden wir dieses Verfahren auf (1.4) an. Im weiteren gehen wir von folgendem Wirkungsintegral aus:

$$\begin{aligned}
 S = & -M \int \sqrt{-\dot{x}(\tau)^2} d\tau + \\
 (1.5) \quad & + \alpha \int \Theta(\bar{x}(\tau_1) - x(\tau_2)) \delta((\bar{x}(\tau_1) - x(\tau_2))^2 + l^2) \dot{\bar{x}}(\tau_1) \cdot \\
 & \cdot \dot{x}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2.
 \end{aligned}$$

Darin beschreibt $x(\tau)$ die retardiert zu berechnende RZ-Bahn der realen Punktladung und $\bar{x}(\tau)$ die fiktive avancierte RZ-Bahn. Die Bewegungsgleichungen ergeben sich durch Variation nach $\bar{x}(\tau)$ bzw. $x(\tau)$. Hier begnügen wir uns mit dem Hinweis auf die Oszillatoranalogie. Eine feldtheoretische Begründung ist möglich und soll später vorgelegt werden. Anders als im Oszillatorbeispiel hat jedoch der Signalvektor

$$(1.6) \quad y(\tau) = \bar{x}(\tau) - x(\tau)$$

wegen der Nichtlinearität der Gleichungen auch für das retardierte System Bedeutung. Er beschreibt die Wechselwirkung der Punktladung mit ihrem Feld, das darum nicht völlig eliminiert ist. Es bringt sich sozusagen durch y in Erinnerung. Daß dazu ein einziger Vektor genügt, ist eine Folge unserer speziellen Greenfunktion. Jede andere Regularisierung liefert einen ganzen Fächer von Signalvektoren.

2. Lagrangefunktion und Bewegungsgleichungen

In dem Doppelintegral (1.5) kann man eine der Integrationen ausführen, ohne daß man die RZ-Bahnen $x(\tau)$ und $\bar{x}(\tau)$ kennen muß. S läßt sich also als einfaches Integral darstellen und definiert so die Lagrangefunktion. Die daraus folgenden Lagrange-schen Gleichungen werden im weiteren untersucht.

Wegen der doppelten Parameterinvarianz kann man über τ_1 in spezieller Weise verfügen, ohne damit die Wahl von τ_2 einzuschränken. Wir setzen

$$(2.1) \quad \tau_2 = \tau, \quad \tau_1 = \tau + \lambda$$

und verfügen über λ so, daß für $\lambda = 0$

$$(2.2) \quad (\bar{x}(\tau) - x(\tau))^2 = -l^2, \quad \bar{x}^0(\tau) - x^0(\tau) > 0$$

gilt. Damit wird jedem Punkt auf x ein und nur ein Punkt auf $\bar{x}$ zugeordnet. Nur die infinitesimale Umgebung von $\lambda = 0$ trägt zum Integral bei. Darum kann man das Argument der δ -Funktion in (1.5) durch

$2 \dot{\bar{x}}(\tau) \cdot (\bar{x}(\tau) - x(\tau)) \lambda = 2 (\dot{x}(\tau) + \dot{y}(\tau)) \cdot y(\tau) \lambda = 2 \dot{x}(\tau) \cdot y(\tau) \lambda$
ersetzen, letzteres nach (1.6) und (2.2), woraus $y^2 = -l^2$ und $\dot{y} \cdot y = 0$ folgt. Wegen $\dot{x} \cdot y < 0$ ist

$$\delta(2 \dot{x} \cdot y \lambda) = - \frac{\delta(\lambda)}{2 \dot{x} \cdot y},$$

was zu der Lagrangefunktion

$$(2.3) \quad L = -M \sqrt{-\dot{x}^2} - \frac{\alpha}{L} \frac{\dot{x}^2 + \dot{x} \cdot \dot{y}}{\dot{x} \cdot y} + \wedge \dot{y} \cdot y$$

führt. Die Nebenbedingung $y^2 = -l^2$ ist in differentieller Gestalt $\dot{y} \cdot y = 0$ mit dem Lagrangeschen Parameter $\wedge$ angehängt. Die letzte Gleichung findet sich im wesentlichen schon in l. c. 10, ist aber hier besser begründet.

Aus (2.3) erhält man zwei Sätze von Lagrangeschen Gleichungen:

$$(2.4) \quad \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{M \dot{x}}{\sqrt{-\dot{x}^2}} - \frac{\alpha}{2} \frac{2 \dot{x} + \dot{y}}{\dot{x} \cdot y} + \frac{\alpha}{2} \frac{\dot{x}^2 + \dot{x} \cdot \dot{y}}{(\dot{x} \cdot y)^2} y \right\} = 0$$

und

$$(2.5) \quad \frac{d}{d\tau} \left\{ -\frac{\alpha}{2} \frac{\dot{x}}{\dot{x} \cdot y} + \wedge y \right\} = \frac{\alpha}{2} \frac{\dot{x}^2 + \dot{x} \cdot \dot{y}}{(\dot{x} \cdot y)^2} \dot{x} + \wedge \dot{y}.$$

Nach der Variation kann man τ mit der Eigenzeit identifizieren:

$$(2.6) \quad \dot{x} = u, \quad u^2 = -1, \quad u \cdot \dot{u} = 0, \quad u \cdot \ddot{u} + \dot{u}^2 = 0.$$

Damit erhält man aus (2.4) den konstanten Viererimpuls

$$(2.7) \quad p = M u - \frac{\alpha}{2} \frac{2u + \dot{y}}{u \cdot y} - \frac{\alpha}{2} \frac{1 - u \cdot \dot{y}}{(u \cdot y)^2} y = \text{const},$$

und (2.5) lautet

$$-\frac{\alpha}{2} \frac{\dot{u}}{u \cdot y} + \frac{\alpha}{2} \frac{u(\dot{u} \cdot y)}{(u \cdot y)^2} + \wedge y = -\frac{\alpha}{2} \frac{u}{(u \cdot y)^2}.$$

Die letzte Gleichung kann man vereinfachen. Skalarmultiplikation mit y ergibt wegen $y^2 = -l^2$

$$\dot{\lambda} = \frac{\alpha}{2l^2} \frac{1}{u \cdot y},$$

was nach Elimination von $\dot{\lambda}$ zu folgender Gleichung führt:

$$\ddot{u} - \frac{\dot{u} \cdot y}{u \cdot y} u - \frac{1}{l^2} y - \frac{u}{u \cdot y}.$$

Daraus folgt mit Rücksicht auf $u \cdot y < 0$

$$\dot{u} \cdot y = l^2 \ddot{u}^2, \quad u \cdot y = -l \sqrt{1 + l^2 \dot{u}^2},$$

also an Stelle von (2.5) schließlich

$$(2.8) \quad y = l^2 \ddot{u} + l \sqrt{1 + l^2 \dot{u}^2} u.$$

Somit ist y durch die RZ-Bahn vollständig bestimmt. Der Signalvektor hängt nur von Vierergeschwindigkeit und Viererbeschleunigung ab.

Damit kann man y aus (2.7) eliminieren:

$$(2.9) \quad p = \left\{ \left(M + \frac{\alpha}{2l} \left(2B - \frac{1}{B} \right) \right) u + \frac{\alpha l}{2} (\dot{B} \dot{u} + B \ddot{u}) \right\}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{1 + l^2 \dot{u}^2}}.$$

Ist eine äußere Kraft F vorhanden, so lautet die Bewegungsgleichung

$$(2.10) \quad \frac{dp}{d\tau} = F, \quad F \cdot u = 0.$$

Es ergibt sich also eine Differentialgleichung vierter Ordnung, nicht dritter wie in der Maxwellschen Elektrodynamik, aber auch nicht unendlich hoher wie gewöhnlich in regularisierten Theorien.

Im weiteren setzen wir $l = 1$ und messen außerdem Massen und Viererimpuls in Einheiten $\alpha/2l = \alpha/2$. Danach erhält man aus (2.9) die von Konstanten unbelastete Gleichung

$$(2.11) \quad p = \left(M + 2B - \frac{1}{B} \right) u + \dot{B} \dot{u} + B \ddot{u}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{u}^2}},$$

aus der die wichtige Gleichung

(2.12)

$$-p \cdot u = M + B$$

hervorgeht.

3. Integration der Impulsgleichung

Gl. (2.11) läßt sich in Strenge integrieren. Wegen der Lorentz-Invarianz genügt es, ins Impuls-o-System zu gehen:

(3.1)

$$p^0 = m, \quad p = 0.$$

Dabei ist die Masse m von M zu unterscheiden. Die Zeitkomponente von (2.11) lautet:

(3.2)

$$m = \left(M + 2B - \frac{1}{B} \right) u^0 + \dot{B} \dot{u}^0 + B \ddot{u}^0.$$

und für die Raumkomponenten erhält man

(3.3)

$$\left(M + 2B - \frac{1}{B} \right) u + \dot{B} \dot{u} + B \ddot{u} = 0.$$

Danach ist die Bewegung im Raum eine ebene. Wir können die 3-Komponente weglassen und machen den Ansatz:

(3.4)

$$u = (\cosh \Phi; \sinh \Phi \cos \varphi, \sinh \Phi \sin \varphi).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} u &= \dot{\Phi} (\sinh \Phi; \cosh \Phi \cos \varphi, \cosh \Phi \sin \varphi) \\ &+ (0; -\sinh \Phi \sin \varphi, \sinh \Phi \cos \varphi) \end{aligned}$$

und

(3.5)

$$\dot{u}^2 = \dot{\Phi}^2 + \sinh^2 \Phi \dot{\varphi}^2.$$

Durch Vektormultiplikation von (3.3) mit u erhält man

$$\frac{d}{d\tau} (B u x \dot{u}) = 0, \quad B u x \dot{u} = C = (0, 0, C) = \text{const}$$

also

$$B \sinh^2 \Phi \dot{\varphi} = C.$$

Danach ist

(3.6)

$$\dot{\varphi} = \frac{C \sqrt{1 + \dot{\Phi}^2}}{\sinh \Phi \sqrt{\sinh^2 \Phi - C^2}}$$

Wenn $C = 0$ ist, ändert sich φ nicht. Es ergibt sich eine rein radiale Bewegung. Wenn $C \neq 0$ ist, nimmt φ je nach dem Vorzeichen von C ständig zu oder ab. Es ergibt sich eine fortschreitende Azimutalbewegung, der noch eine radiale überlagert ist. In (4.6) kann man $\dot{\Phi}$ eliminieren.

Aus (2.12) erhält man mittels (3.3/4)

$$m \cosh \Phi - M = (1 + \dot{\Phi}^2 + \sinh^2 \Phi \dot{\Phi}^2)^{-1/2},$$

d. i. nach (3.6) gleich

$$\begin{aligned} (1 + \dot{\Phi}^2)^{-1/2} \left(1 + \frac{C^2}{\sinh^2 \Phi - C^2} \right)^{-1/2} = \\ = (\sinh^2 \Phi - C^2)^{1/2} / \sinh \Phi (1 + \dot{\Phi}^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$(3.7) \quad \sqrt{1 + \dot{\Phi}^2} = \frac{\sqrt{\sinh^2 \Phi - C^2}}{|\sinh \Phi| (m \cosh \Phi - M)},$$

und Substitution in (3.6) ergibt:

$$(3.8) \quad \dot{\Phi} = \frac{C}{\sinh^2 \Phi (m \cosh \Phi - M)}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\Phi}$ ist also allein durch Φ und damit durch die Radialkomponente $\sinh \Phi$ der Vierergeschwindigkeit bestimmt.

Zugleich liefert (3.7) eine Differentialgleichung für die Radialbewegung:

$$(3.9) \quad \dot{\Phi}^2 = \frac{\sinh^2 \Phi (1 - (m \cosh \Phi - M)^2) - C^2}{\sinh^2 \Phi (m \cosh \Phi - M)^2}.$$

Daraus folgt mit

$$(3.10) \quad s = \cosh \Phi$$

das elliptische Integral

$$(3.11) \quad \tau = \pm \int \frac{(ms - M) ds}{\sqrt{(s^2 - 1)(1 - (ms - M)^2) - C^2}}.$$

Alles hier wesentliche kann man aus (3.9) entnehmen. Dazu betrachten wir das Φ - $\dot{\Phi}$ -Diagramm in Fig. 3-1; Φ ist gemäß

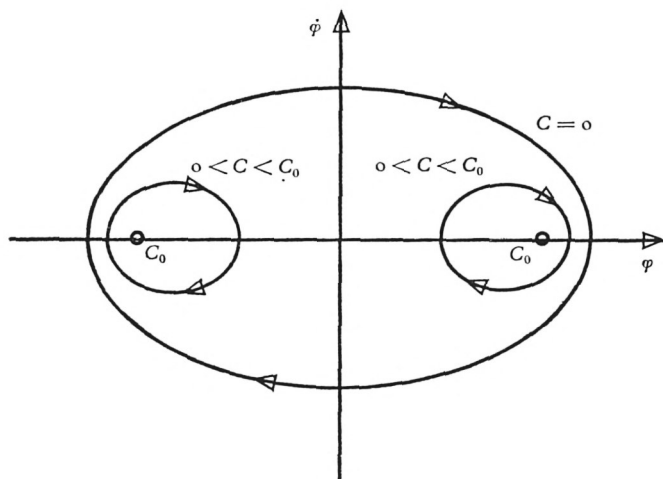


Fig. 3-1: $\dot{\Phi}$ - Φ -Diagramm (qualitativ);

$C = C_0$: Kreisförmige Zitterbewegung;

$C = 0$: Radiale Zitterbewegung;

$0 < C < C_0$: Spiralender Runaway.

Im Grenzfall $0 < C \rightarrow 0$ schmiegen sich die beiden inneren Kurven mehr und mehr den Halbkurven $C = 0$ und der Ordinate an, ohne sich zu berühren. Im Grenzfall $C_0 > C \rightarrow C_0$ ziehen sich die beiden inneren Kurven auf die beiden Punkte C_0 zusammen.

(3.9) als Funktion von Φ und in Abhängigkeit vom Parameter C dargestellt. Da (3.9) nur gerade Funktionen von $\dot{\Phi}$ und Φ enthält, erhält man zu beiden Koordinatenachsen symmetrisch liegende Punkte. Im Falle $0 < C < C_0$ haben die Funktionen $\dot{\Phi}$ auf beiden Seiten der Ordinate je zwei Nullstellen, die Scheitelpunkte von zwei geschlossenen Kurven sind und die im Uhrzeigersinne durchlaufen werden. Die inneren Nullstellen rücken im Limes $C \rightarrow 0$ zum Ursprung hin und verschwinden für $C = 0$, weil sich in diesem Fall $\sinh^2 \Phi$ im Zähler und im Nenner herausheben. Im Grenzfall $C = 0$ ergibt sich also eine einzige Kurve, die alle übrigen umschließt. Mit wachsendem C (s. Fig. 3-2) ziehen sich die Kurvenpaare auf zwei Punkte zusammen, die durch

$$(3.12) \quad h(\Phi) = \sinh^2 \Phi (1 - (m \cosh \Phi - M)^2) \leq \\ \leq \sinh^2 \Phi (1 - (m \cosh \Phi_0 - M)^2) = C_0^2$$

bestimmt sind. C_0^2 ist also das Maximum von $h(\Phi)$ und Φ_0 die

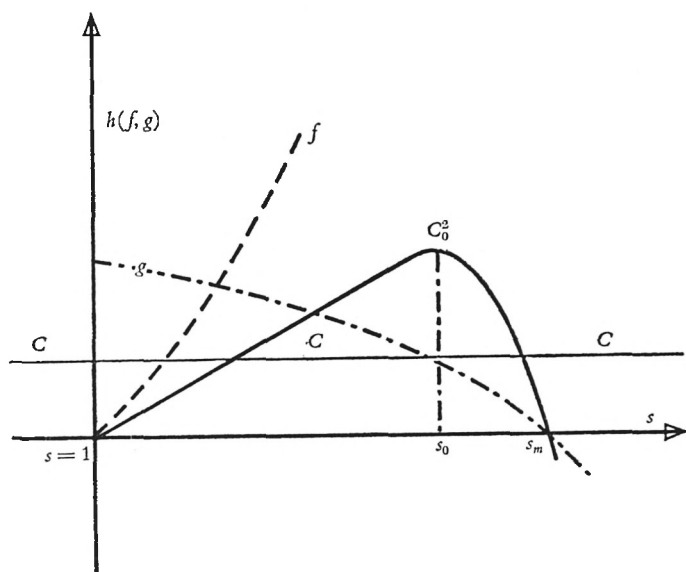


Fig. 3-2: Darstellung von $h(\varphi)$ in (3.12), qualitativ;

$f = s^2 - 1$ (gestrichelt); $g = 1 - (ms - M)^2$ strichpunktiert);

$h = fg$ (ausgezogene Linie).

Maximum: Ordinate = C_0^2 , Abszisse = $s_0 = \cosh \Phi_0$; Schnittpunkte von CCC mit Kurve h liefern Scheitel der Kurven $0 < C < C_0$ in Fig. 3-1; $s_m = \cosh \Phi_m = (1 + M)/m$.

Abszisse des Maximums. Aus Fig. 3-2 geht hervor, daß es auf jeder Seite der Ordinate nur ein solches Maximum gibt. Im Falle $C = C_0$ ist $\dot{\Phi} = 0$, also $\Phi = \Phi_0 = \text{const}$. Nach (3.8) ist auch die Winkelgeschwindigkeit konstant. Der Hodograph ist also ein gleichförmig durchlaufener Kreis um den Ursprung, ebenso die Bahnkurve im Raum. Es ergibt sich also eine Zitterbewegung um eine mittlere Lage.

Im Falle $C = 0$ ist der Hodograph radial gerichtet. Es ergibt sich eine im allgemeinen anharmonische Oszillation mit den Geschwindigkeitsamplituden $\pm \sinh \Phi_m$ (s. Fig. 3-1). Die radiale Verschiebung während einer Periode beträgt wegen

$$(3.13) \quad \frac{dr}{d\tau} = \sinh \Phi: \quad \Delta r = \oint \frac{\sinh \varphi}{\dot{\varphi}} d\varphi.$$

Da im Falle $C = 0$ der Integrand ungerade ist, verschwindet Δr . Die Punktladung kehrt also nach einer Periode zur Ausgangslage zurück. Es ergeben sich radiale Schwingungen um den Ursprung. Wiederum liegt eine Zitterbewegung vor.

Das Bild ändert sich vollständig, wenn $0 < C < C_0$ ist. Denn dann ist der Integrand in (3.13) rechts von der Ordinate stets positiv und links stets negativ. Mit jeder Periode wird der Abstand vom Zentrum größer. Der azimuthalen Zitterbewegung ist eine radiale Fluchtbewegung überlagert, der bekannte Runaway, allerdings einer mit Unterlichtgeschwindigkeit:

$$(3.14) \quad \frac{dr}{dt} = \frac{\dot{r}}{\dot{t}} = \tanh \Phi < \tanh \Phi_0 < 1.$$

Man kann nicht hoffen, dem Runaway durch eine spezielle Lösungsauswahl zu entgehen, weil die verschiedenen Bewegungstypen durch äußere Kräfte verkoppelt werden. Doch verschwinden Runaway und Zitterbewegung, wenn sich die umschließende Kurve in Fig. 3-1 auf den Ursprung zusammenzieht. Das ergibt sich dann und nur dann, wenn $\Phi_m = 0$ ist, also wegen

$$\cosh \Phi_m = \frac{1 + M}{m}$$

für

$$(3.15) \quad m = 1 + M.$$

Damit folgt aus (2.12) und (3.4):

$$m (\cosh \Phi - 1) = -(1 - B).$$

Die linke Seite ist für positive m positiv, die rechte nach (2.11) negativ. Nur in 0 berühren sich die Intervalle. Somit gilt:

$$(3.16) \quad m > 0, \quad \Phi = 0, \quad u = (1; 0, 0, 0), \quad B = 1, \quad \dot{u} = 0.$$

Impuls-0-Teilchen mit positiver Masse sind in Ruhe, wenn (3.15) gilt.

Negative Massen kommen nicht vor. Tatsächlich gelten die Ungleichungen

$$(3.17) \quad 0 < m < 1, \quad -1 < M < 0.$$

Das folgt aus den Gl. (2.12) und (3.2). Setzt man

$$m u^0 = M + B$$

aus (2.12) in (3.2) nach Multiplikation mit m ein, so erhält man:

$$m^2 = (m - 1 + 2B - 1/B) (m - 1 + B) + \dot{B}^2 + B\ddot{B}.$$

Daraus folgt

$$\frac{d^2 B^2}{d\tau^2} = 2(1 - B) (m(3 + 1/B) - (1/B + 1 - 2B)).$$

In den Fällen $m \leq 0, \geq 1$ erhält man bzw.

$$\frac{d^2 B^2}{d\tau^2 d^2} < 0, > 0.$$

Die Kurve für B^2 als Funktion von τ ist im ersten Fall konvex nach oben und führt hinreichend weit vom Ursprung weg zu negativen Werten. Im zweiten Fall ist die Kurve konvex nach unten und übersteigt darum abseits vom Ursprung den Wert 1. Beides ist nach (2.11) unzulässig, so daß die Ungleichungen (3.17) gelten.

Die Gln. (3.15) und (3.17) haben eine einfache Bedeutung. Sie lauten, wenn wir zu den alten Einheiten zurückkehren:

$$(3.19) \quad m = \frac{\alpha}{2l} + M, \quad 0 < m < \frac{\alpha}{2l}, \quad -\frac{\alpha}{2l} < M < 0.$$

Darin ist $\alpha/2l$ die Feldenergie der ruhenden Punktladung. Da M negativ ist, handelt es sich um eine Bindungsenergie, um die Kohäsionsenergie, die für den Zusammenhalt der Ladung sorgt. Somit ist (3.19) nichts anders als die Renormierungsbedingung in Diracs klassischer Theorie des Elektrons. Ihre Bedeutung geht aber hier über die in der Diracschen Theorie hinaus. Denn hier bewirkt sie, ohne das weitere Annahmen nötig wären, daß der Runaway verschwindet. Mit ihm hört auch die Zitterbewegung auf. Impuls-0-Teilchen sind in Ruhe. Bei endlichem Impuls bewegen sie sich kraft Lorentztransformation geradlinig gleichförmig, verhalten sich also ganz Newtonisch.

Literatur:

- [1] Liénard, A.: L'éclairage électrique 16, 5, 53, 106 (1898).
Wiechert, E.: Arch. néerland (2) 5, 549 (1900); Ann. d. Phys. 4, 667 (1901).
- [2] Fokker, A.D.: Z. Phys. 58, 386 (1929).
- [3] Dirac, P. A. M.: Proc. Roy. Soc. (Lond.) A 167, 148 (1938).
- [4] Thomson, J. J.: Phil. Mag. (5) 11, 229 (1881).
- [5] Landé, A.: Phys. Rev. 56, 482 (1939).
- [6] Groschwitz, E.: Z. Naturforschung 7a, 458 (1952), s. Gl. (3.4).
- [7] Mie, G.: Ann. d. Phys. 37, 511 (1912), 39, 1 (1912), 40, 1 (1912).
- [8] Born, M.: Proc. Roy. Soc. (Lond.) A 143, 410 (1934).
- [9] Bopp, F., Lutzenberger, W.: Acta Nova Leopoldina 1972 (Wartburg-Symposium), im Druck.
- [10] Lutzenberger, W., Bopp, F.: Z. Naturforschung 28a, 408-416 (1973).
- [11] Bopp, F.: Sitzungsber. d. Bay. Ak. d. Wiss., Math.-Naturw. Kl., 1973, 67 (Nr. 6).