BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1973

MÜNCHEN 1974

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Konkretisierung kompakter Riemannscher Flächen

Von **Andrei Duma** in München

Vorgelegt am 6. Juli 1973

§ 0. Einleitung

Sei X_0 eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geqslant 3$ und $f: X_0 \to \boldsymbol{P}_1$ eine Konkretisierung von X_0 mit d Blättern, d. h. f sei eine auf X_0 definierte meromorphe Funktion, die jeden Wert genau d-mal (mit Vielfachheit) annimmt. Zwei Konkretisierungen f und h von X_0 heißen äquivalent, falls auf X_0 gilt:

$$f = \frac{ah+b}{ch+d} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad-bc \neq 0.$$

Im Jahre 1874 haben A. Brill und M. Noether |3| gezeigt, daß eine Riemannsche Fläche „im allgemeinen" eine Konkretisierung mit $m(g)$ Blättern besitzt, wobei

$$m(g) = \begin{cases} \dfrac{g+3}{2} & \text{falls } g \text{ ungerade} \\[2ex] \dfrac{g+2}{2} & \text{falls } g \text{ gerade} \end{cases}$$

ist.

Th. Meis hat 1960 in seiner Dissertation |7| diese Behauptung präzisiert, indem er bewiesen hat: Jede Riemannsche Fläche vom Geschlecht g besitzt eine Konkretisierung mit $m(g)$ oder weniger Blättern; ferner ist die Menge der Punkte t des Teichmüller-Raumes T_g, deren entsprechende Riemannschen Flächen $V_{g,t}$ keine Konkretisierungen mit genau $m(g)$ Blättern besitzen, in einer von T_g verschiedenen analytischen Menge enthalten. Für ungerades g besitzt $V_{g,t}$ sogar unendlich viele nichtäquivalente Konkretisierungen mit $m(g)$ Blättern, wenn t außerhalb einer bestimmten analytischen Menge ($\neq T_g$) liegt.

Wir ergänzen diese letzten Aussagen (Satz 38 und Satz 38 bis bei Th. Meis), und zwar geben wir eine Charakterisierung der analytisch-dünnen Menge $A_g \subset T_g$ ($t \notin A_g$ dann und nur dann, wenn $V_{g,t}$ eine Konkretisierung mit $m(g)$ Blättern hat). Ferner zeigen wir: Wenn g ungerade ist, ist $T_g - A_g$ genau die Menge aller Punkte $t \in T_g$ mit der Eigenschaft: $V_{g,t}$ besitzt unendlich-viele nichtäquivalente Konkretisierungen mit $m(g)$ Blättern.

Offen bleiben die Fragen, ob A_g analytisch ist oder nicht und ob A_g für jedes $g \geqslant 3$ nicht leer ist.

Ich möchte Herrn Professor Dr. K. Stein für die Anregung zu diesem Thema danken.

§ 1. Bezeichnungen

Sei $W = (X \xrightarrow{\pi} S)$ eine holomorphe Familie von Riemannschen Flächen vom Geschlecht g (in der Bezeichnungsweise von |7|) oder eine g-Kurve (in der Bezeichnungsweise von |5|). X_s bezeichne die Faser von π über $s \in S$. Weiter bezeichne $W_g = (V_g \xrightarrow{\pi_g} T_g)$ die universelle Familie von Riemannschen Flächen über dem Teichmüller-Raum T_g (s. |2|, |4|, |5|). Mit $\bigoplus_1^d W$ bezeichnen wir die d-fache Whitneysche Summe.

Das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_1^d W & \longrightarrow & X \times \ldots \times X = \prod_1^d X \\
\downarrow & & \downarrow \pi \\
\Delta^d(S) & \longrightarrow & S \times \ldots \times S = \prod_1^d S
\end{array}$$

ist dann kartesisch; dabei sei $\Delta^d(S)$ die Diagonale des d-fachen Produktes $S \times \ldots \times S$. Es ist

$$\Delta^d(S) = \bigcap_{i,j} D_{i\,j}^d(S)$$

mit $D_{i,j}^d(S) := \left\{ (s_1, \ldots, s_d) \in \prod_1^d S : s_i = s_j \right\}$.

$\bigoplus_1^d W \to \Delta^d(S) \approx S$ ist eine eigentliche und lokal lokaltriviale Abbildung; wir werden deshalb im „Kleinen" einen Punkt aus $\bigoplus_1^d W$ durch $(s, P_1, \ldots, P_d)$ beschreiben, wobei $s \in S$ und $P_1, \ldots, P_d \in X_s$ sind. Die Projektion $\prod_1^{d+1} X \to \prod_1^d X$, die die i-te Koordinate „vergißt", induziert eine S-Abbildung $\varphi_{i,d}\colon \bigoplus_1^{d+1} W \to \bigoplus_1^{d} W$. Statt $m(g)$ (bzw. $\varphi_{i,m(g)}$) schreiben wir kurz m (bzw. φ_i).

Jeder Riemannschen Fläche X ist (trivialerweise) eine g-Kurve über einem einpunktigen Raum assoziiert, die wiederum mit X bezeichnet wird.

Wir setzen $F(W, d, r) := \left\{(s, P_1, \ldots P_d) \in \bigoplus_1^d W;\right.$ $\left.\dim\left(-\sum_1^d P_i\right) = r\right\}$, wobei mit $-\sum_1^d P_i$ der Divisor bezeichnet wird, der in den Punkten P_i den Wert -1 annimmt und sonst Null ist, und $G(W, d, r) := \bigcup_{p \geqslant r} F(W, d, r)$.

Da $\dim D \leqslant \operatorname{grad} D + 1$ für jeden Divisor D gilt, ist $F(W, d, r) = \emptyset$ für $r \geqslant d + 2$.

Sei A_W die Menge aller Punkte $s \in S$, derart, daß X_s keine Konkretisierung mit m Blättern hat. Statt A_{W_g} schreiben wir einfach A_g.

Wir halten uns im übrigen an die „klassischen" Bezeichnungen (s. z.B. |1|, |5|, |7|), z.B. bezeichnen wir für jeden Divisor D auf der Riemannschen Fläche X_0 mit $\Gamma(X_0, \mathcal{O}_D)$ den Vektorraum aller meromorphen Funktionen auf X_0, deren Divisor größer oder gleich D ist.

§2. Das Theorem 3.1 |5, I| zeigt, daß jede Behauptung lokalen Charakters über g-Kurven nur für W_g bewiesen werden muß. Insbesondere sind Behauptungen lokalen Charakters über A_W, $F(W, d, r)$ und $G(W, d, r)$ nur für $W = W_g$ zu beweisen.

Bemerkung. Es gilt für alle d und r:

$$G(W_g, d, r) \supseteq \bigcup_{i=1}^{d} \varphi_{i,d}^{-1}\, G(W_g, d-1, r).$$

Satz 1. Ein Punkt liegt genau dann in A_g, wenn für alle $2 \leqslant r \leqslant m + 1$ die Mengengleichung gilt:

$$G(W_g, m, r)_s = \left\{\bigcup_{i=1}^{m} \varphi_i^{-1}\, G(W_g, m-1, r)\right\}_s.$$

Beweis. Sei $(s, P_1, \ldots, P_m) \in G(W_g, m, r)$ mit $\dim\left(-\sum_{i=1}^{m} P_i\right) = r \geqslant 2$. Falls $\dim\left(-\sum_{i \neq k} P_i\right) < r$ für alle $k = 1, \ldots, m$ gilt, ist die Inklusion

$$\bigcup_{k=1}^{m} \Gamma(V_{g,s}, \mathcal{O}_{-\sum\limits_{i \neq k} P_i}) \subset \Gamma(V_{g,s}, \mathcal{O}_{-\sum\limits_{i=1}^{m} P_i})$$

strikt und deshalb gibt es eine meromorphe Funktion auf $V_{g,s}$ mit genau $-\sum_{i=1}^{m} P_i$ als Polstellendivisor, d. h. eine Konkretisierung von $V_{g,s}$ mit genau m Blättern.

Umgekehrt sei $s \notin A_g$; dann gibt es eine Konkretisierung $(V_{g,s}, h)$ mit m Blättern. Seien $P_1, \ldots, P_m$ die Polstellen von h und $r := \dim\left(-\sum_{i=1}^{m} P_i\right)$, d. h. $(s, P_1, \ldots, P_m) \in G(W_g, m, r)$.

Behauptung: $(s, P_1, \ldots P_m) \notin \sum_{i=1}^{m} \varphi_i^{-1} G(W_g, m-1, r)$. Sonst wäre z. B. $(s, P_1, \ldots, \hat{P}_k, \ldots, P_m) \in G(W_g, m-1, r)$, d. h. $\dim \Gamma(V_{g,t}, \mathcal{O}_{-\sum\limits_{i=1}^{m} P_i}) = \dim \Gamma(V_{g,t}, \mathcal{O}_{-\sum\limits_{i \neq k} P_i}) = r$. Wegen $\Gamma(V_{g,t}, \mathcal{O}_{-\sum\limits_{i \neq k} P_i}) \subseteq \Gamma(V_{g,t}, \mathcal{O}_{-\sum\limits_{i=1}^{m} P_i})$ würde folgen: h hat keinen Pol (oder einen Pol kleinerer Ordnung) im Punkte P_k. Widerspruch!

§ 3. Es stellt sich auf natürliche Weise die Frage, ob die Menge A_g für gewisse g leer ist. Ist $m(g)$ ungerade (d. h. $g = 4k$ oder $g = 4k - 1$), so besitzen die hyperelliptischen Riemannschen Flächen vom Geschlecht g keine Konkretisierung mit $m(g)$-Blättern, d. h. $A_{4k} \neq \varnothing$. $A_{4k-1} \neq \varnothing$ $(k \geqslant 1)$. Th. Meis gibt ein Beispiel (das analytische Gebilde von $W^3 = (Z-1) \cdot (Z-2) \cdot (Z-3) \cdot (Z-4) \cdot (Z-5) \cdot (Z-6) \cdot (Z-7)$), das zeigt, daß auch $A_6 \neq \varnothing$ ist.

In diesem Zusammenhang beweisen wir folgenden Satz als Weiterführung:

Satz 2. Es gibt eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g $(g = 6k \pm 1)$, die eine 3-blättrige Konkretisierung, aber keine $m(g)$-blättrige Konkretisierung besitzt. Insbesondere ist A_g für $g = 6k \pm 1$ nicht leer.

Beweis: Man betrachte die kompakte Riemannsche Fläche R, die als analytisches Gebilde der algebraischen Funktion

$$W^3 = \frac{(Z-1)\,(Z-2)\,\ldots\ldots.(Z-r-2)\,(Z-r-3)}{(Z-r-4)\,(Z-r-5)\,\ldots..(Z-2r-2)(Z-2r-3)}\ (r \geqq 2)$$

definiert ist. Die Verzweigungspunkte von R liegen über $1, 2, \ldots, 2r+3$ und alle sind von zweiter Ordnung; mittels der Riemann-Hurwitzschen Formel errechnet man das Geschlecht von R:

$$g = \frac{2r+3}{2} \cdot 2 - 3 + 1 = 2r + 1.$$

Man setze: $\omega_0 := \frac{dZ}{W^2}$ und für alle $k = 1, \ldots, r$:

$$\omega_k^1 := \frac{dZ}{(Z-r-3-k)\cdot W^2},\ \omega_k^2 := W \cdot \omega_k^1 = \frac{dZ}{(Z-r-3-k)\,W}.$$

Die folgende Tabelle zeigt die Null-(bzw. Pol-)stellenordnungen in den kritischen Punkten der für uns interessanten Funktionen und Differentiale:

Fkt/Diff	$1 \leqq i \leqq r+3$	$r+3+k$	$r+3+l$	∞
dZ	2	2	2	-4
$Z-r-3-k$	0	3	0	-3
W	1	-1	-1	-3
ω_0	0	4	4	2
ω_k^1	0	1	4	5
ω_k^2	1	0	3	2

Es folgt, daß ω_0, ω_k^1, ω_k^2 für $(k = 1, \ldots, r)$ holomorphe Differentiale sind. Sie bilden sogar eine Basis des Vektorraumes aller holomorphen Differentiale 1. Ordnung, da aus einer Relation:

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \cdot \omega_k^1 + \sum_{k=1}^{r} \beta_k \cdot \omega_k^2 + \gamma \cdot \omega_0 = 0$$

folgt: $\beta_k = 0$, weil ω_k^2 das einzige unter den betrachteten Differentialen ist, das über $r + 3 + k$ keine Nullstelle hat. Da ω_0 in ∞ eine Nullstelle 2. Ordnung besitzt und alle ω_k^1 Nullstellen 5. Ordnung haben, folgt: $\gamma = 0$. Schließlich folgt aus $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \cdot \omega_k^1 = 0$, daß alle α_k verschwinden, weil ω_k in $r + 3 + k$ eine einfache

Nullstelle besitzt, die übrigen ω_l^1 aber in demselben Punkt eine 4-fache Nullstelle besitzen.

Wir zeigen, daß die Annahme der Existenz einer Konkretisierung $f : R \to \boldsymbol{P}_1$ mit $m(g) = \frac{2r+1+3}{2} = r + 2$-Blättern einem Widerspruch führt. Sei $a \in \boldsymbol{P}_1$ so gewählt, daß folgendes gilt:

a) Über a liegen $r+2$ paarweise verschiedene Punkte $P_1, \ldots, P_{r+2}$;

b) $\{dZ(P_i), Z(P_i), W(P_i); i = 1, \ldots, r+2\} \cap \{0, \infty\} = \varnothing$.

Man bezeichne mit $\omega(P_1, \ldots, P_{r+2})$ die $(r+2) \times (2r+1)$ Matrix:

$$\left|\begin{array}{l}
\frac{1}{W_1^2} \quad \frac{1}{(Z_1 - r - 4) W_1^2} \;\cdots\; \frac{1}{(Z_1 - 2r - 3) W_1^2} \quad \frac{1}{(Z_1 - r - 4) W_1} \;\cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\; \frac{1}{(Z_1 - 2r - 3) W_1} \\
\cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\quad \cdots \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\qquad \cdots \\
\frac{1}{W_{r+2}^2} \quad \frac{1}{(Z_{r+2} - r - 4) W_{r+2}^2} \;\cdots\; \frac{1}{(Z_{r+2} - 2r - 3) W_{r+2}^2} \\
\qquad\quad \frac{1}{(Z_{r+2} - r - 4) W_{r+2}} \;\cdots\; \frac{1}{(Z_{r+2} - 2r - 3) W_{r+2}}
\end{array}\right|$$

wobei $W_i := W(P_i)$, $Z_i := Z(P_i)$ bedeutet.

Die Existenz von f impliziert:

$$\text{Rang } \omega(P_1, \ldots P_{r+2}) \leqslant r + 1. \tag{1}$$

Wir erinnern auch an die aus dem Satz von Riemann-Roch abgeleitete Gleichung:

$$\dim \left(-\sum_{\alpha=1}^{q} P_{i_\alpha} \right) = q + 1 - \text{Rang } \omega\, (P_{i_1}, \ldots, P_{i_q}).$$

Lemma 1 Rang $\omega(P_1, \ldots, P_{r+2})$ ist gleich zu dem Rang folgender Matrix:

$$\mathcal{A} = \left|\begin{array}{ccccccccc}
1 & Z_1 & Z_1^2 & \ldots Z_1^r & W_1 & W_1 & Z_1 & \ldots W_1 & Z_1^{r-1} \\
1 & Z_2 & Z_2^2 & \ldots Z_2^r & W_2 & W_2 & Z_2 & \ldots W_2 & Z_2^{r-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots \cdot & \cdot & & \cdot & \ldots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots \cdot & \cdot & & \cdot & \ldots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots \cdot & \cdot & & \cdot & \ldots & \cdot \\
1 & Z_{r+2} & Z_{r+2} & \ldots Z_{r+2}^2 & W_{r+2}^r & W_{r+2} & Z_{r+2} & \ldots W_{r+2} & Z_{r+2}^{r-1}
\end{array}\right|.$$

Beweis: Für $i = 1, 2, \ldots, r+2$ multipliziere man die Zeile i mit W_i^2. Für jedes $j = 3, \ldots, r+2$ (bzw. $k = r+4, \ldots, 2r+1$) subtrahiere man aus der j-ten (bzw. k-ten) Spalte die $(j-1)$-te (bzw. $(k-1)$te) Spalte. Für jedes $j = 4, \ldots, r+2$ (bzw. $k = r+5, \ldots, 2r+1$) subtrahiere man aus der j-ten (bzw. k-ten) Spalte die $(j-1)$-te (bzw. $(k-1)$-te) Spalte und jede neuerschienene Spalte teile man durch 2, usw. Man erhält nach r solchen Schritten die äquivalente Matrix:

$$\left|\begin{array}{l}
1 \quad \dfrac{1}{Z_1-r-4} \quad \dfrac{1}{(Z_1-r-4)(Z_1-r-5)} \cdots W_1 \quad \dfrac{W_1}{Z_1-r-4} \cdots \\
\qquad \cdots \dfrac{W_1}{(Z_1-r-4)\ldots(Z_1-2r-3)} \\
1 \quad \dfrac{1}{Z_2-r-4} \quad \dfrac{1}{(Z_2-r-4)(Z_2-r-5)} \cdots W_2 \quad \dfrac{W_2}{Z_2-r-4} \cdots \\
\qquad \cdots \dfrac{W_2}{(Z_2-r-4)\ldots(Z_2-2r-3)} \\
\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots \\
\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots \\
\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots \\
1 \quad \dfrac{1}{Z_{r+2}-r-4} \quad \dfrac{1}{(Z_{r+2}-r-4)(Z_{r+2}-r-5)} \cdots W_{r+2} \quad \dfrac{W_{r+2}}{Z_{r+2}-r-4} \cdots \\
\qquad \cdots \dfrac{W_{r+2}}{(Z_{r+2}-r-4)\ldots(Z_{r+2}-2r-3)}
\end{array}\right|$$

Durch Multiplikation der i-ten Zeile mit $\prod_{l=1}^{r}(Z_i - r - 3 - l)$ und durch geeignete spaltenweise Subtraktionen erhält man das gewünschte Ergebnis.

Wir untersuchen jetzt die allgemeine Verteilung*) der Werte $Z_1, \ldots, Z_{r+2}$. Unter diesen Werten mögen die folgenden, aber keine weiteren Gleichungen bestehen:

$$Z_{s+1} = Z_{s+2},\ Z_{s+3} = Z_{s+4}, \ldots, Z_{s+2p-1} = Z_{s+2p}$$
$$Z_{s+2p+1} = Z_{s+2p+2} = Z_{s+2p+3}, \ldots, Z_r = Z_{r+1} = Z_{r+2}.^{**})$$

Der Rang der Matrix $\mathcal{A}$ ist zunächst gleich $2p$ plus dem Rang der Matrix:

---

* bis auf eine Permutation!

** Die Fälle: a) $s = r+2$ b) $s + 2p = r+2$ c) $p = 0$ sind nicht ausgeschlossen.

$$\begin{vmatrix}
1 & Z_1 & \dots Z_1^{r-p} & W_1 & \dots W_1 & . \, Z_1^{r-p-1} \\
1 & Z_2 & \dots Z_2^{r-p} & W_2 & \dots W_2 & . \, Z_2^{r-p-1} \\
. & . & \dots . & . & \dots & . \\
. & . & \dots . & . & \dots & . \\
. & . & \dots . & . & \dots & . \\
1 & Z_s & \dots Z_s^{r-p} & W_s & \dots W_s & . \, Z_s^{r-p-1} \\
1 & Z_{s+2p+1} & \dots Z_{s+2p+1}^{r-p} & W_{s+2p+1} & \dots W_{s+2p+1} & . \, Z_{s+2p+1}^{r-p-1} \\
1 & Z_{s+2p+2} & \dots Z_{s+2p+2}^{r-p} & W_{s+2p+2} & \dots W_{s+2p+2} & . \, Z_{s+2p-1} \\
. & . & \dots . & . & \dots & . \\
. & . & \dots . & . & \dots & . \\
. & . & \dots . & . & \dots & . \\
1 & Z_{r+2} & \dots Z_{r+2}^{r-p} & W_{r+2} & \dots W_{r+2} & . \, Z_{r+2}^{r-p-1}
\end{vmatrix}$$

Ferner ist er gleich zu $2p + \frac{2}{3}(r + 2 - s - 2p)$ plus dem Rang der Matrix:

$$\mathcal{B} := \begin{vmatrix}
1 & Z_1 & \dots & Z_1^{r-p-(1/3)\cdot(r+2-s-2p)} & W_1 & \dots \\
 & & \dots & W_1 Z_1^{r-p-(1/3)\cdot(r+2-s-2p)} & & \\
1 & Z_2 & \dots & Z_1^{r-p-(1/3)\cdot(r+2-s-2p)} & W_2 & \dots \\
 & & \dots & W_2 Z_2^{r-p-(1/3)\cdot(r+2-s-2p)} & & \\
. & . & \dots & . & . & \dots \\
. & . & \dots & . & . & \dots \\
. & . & \dots & . & . & \dots \\
1 & Z_s & \dots & Z_s^{r-p-(1/3)\cdot(r+2-s-2p)} & W_s & \dots \\
 & & \dots & W_s Z_s^{r-p-(1/3)\cdot(r+2-s-2p)} & &
\end{vmatrix}$$

a) Ist $p \geqslant 1$, so folgt: $r - p - (1/3) \cdot (r + 2 - s - 2p) \geqslant s - 1$ und dadurch enthält unsere letzte Matrix eine Vandermondesche Determinante s-ter Ordnung, d. h.

Rang $\mathcal{A} = 2p + \frac{2}{3}(r + 2 - s - 2p) + s = \frac{2p + 2r + 4 + s}{3}$; daraus folgt:

$$\dim\left(-\sum_{i=1}^{r+2} P_i\right) = r+2+1-\text{Rang }\omega\,(P_1,\ldots,P_{r+2}) =$$
$$= \frac{r+2-2p-s}{3}+1\text{; aber}$$

$$1,\ \frac{1}{Z-Z_{s+2p+1}},\ \frac{1}{Z-Z_{s+2p+4}},\ \ldots,\ \frac{1}{Z-Z_{s+2p+7}},\ \frac{1}{Z-Z_r},\ \frac{1}{f-a}$$

sind $\dim\left(-\sum_{i=1}^{r+2} P_i\right)+1$ linear-unabhängige Funktionen auf R, die höchstens in $P_1,\ldots,P_{r+1}$ Polstellen 1. Ordnung haben! (Ist $s=0$, so verläuft unser Beweis genauso, nur wird ein Schritt weggelassen.)

b$_1$) Gelten $p=0$ und $s \neq r+2$, so folgt:
$r-p-(1/3)\cdot(r+2-s-2p) = r-(1/3)(r+2-s) \geqslant s-1$ und wiederum ist der Rang von $\mathcal{B}$ gleich s, d. h. Rang $\mathcal{A} =$ $=$ Rang $\omega\,(P_1,\ldots,P_{r+2}) = \frac{2}{3}\cdot(r+2-s)+$ Rang $\mathcal{B} =$ $= \frac{1}{3}(2r+4+s)$. Es folgt:

$$\text{(2)}\quad \dim\left(-\sum_{i=1}^{r+2} P_i\right) = r+2+1-\frac{2r+4+s}{3} = \frac{r+2-s}{3}+1.$$

Die Existenz von $\frac{r+2-s}{3}+2$ Funktionen $1,\ \frac{1}{Z-Z_{s+1}},$ $\frac{1}{Z-Z_{s+4}},\ \frac{1}{Z-Z_{s+7}},\ \ldots,\ \frac{1}{Z-Z_r},\ \frac{1}{f-a}$ widerspricht (2).

b$_2$) $s=r+2$ ist die letzte Möglichkeit (d. h. alle Z_i sind paarweise verschieden). Wir zeigen, daß Rang $\mathcal{A} = r+2$ gilt, was jedoch (1) und Lemma 1 widerspricht. Wäre Rang $\mathcal{A}$ ungleich $r+2$ (d. h. Rang $\mathcal{A} = r+1$), so gäbe es $\alpha_0,\ldots,\alpha_r \in \mathbb{C}$ mit $W_i = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j Z_i^j$ für $i = 1, 2, \ldots, r+2$.

Es gibt zwei Möglichkeiten:

I. $\alpha_2 = \ldots = \alpha_{r+2} = 0$, d. h. $W_i = \alpha_0 + \alpha_1 Z_i$ für $i = 1, 2, \ldots,$ $r+2$. Dann hat die Funktion $h = W-(\alpha_0+\alpha_1 Z)$ eine Ordnung $\geqslant r+2$; aber über ∞ liegen vermöge h nicht mehr als 3 Punkte, weil gilt: $\{Q\colon h\,(Q)=\infty\} = \{Q\colon w\,(Q)=\infty$ oder $Z(Q)=\infty\} = \{Q : W(Q)=\infty\}$.

Widerspruch!

II. Es gibt ein $v \geqslant 2$ mit $\alpha_v \neq 0$. In diesem Fall ist der Rang von $\mathcal{A}$ gleich $r+2$, da durch elementare Transformationen eine Vandermondesche Determinante erscheint.

§ 4. In | 7 | sind verschiedene Ergebnisse über $G(W_g, d, 2)$ enthalten. Viele von ihnen lassen sich verallgemeinern für $G(W, d, r)$ $(2 \leqslant r \leqslant d+1)$; die Beweise laufen oft analog; auf einige von ihnen werden wir verzichten.

Satz 3. Sei X_0 eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und d eine natürliche Zahl zwischen 2 und g. Dann enthält $G(X_0, d, r)$ keine isolierten Punkte. Außerdem liegt die Menge der Punkte von $F(X_0, d, r)$ mit paarweise verschiedenen Koordinaten dicht in $G(X_0, d, r)$.

Der Beweis ist denen der Sätze 29 und 34 | 7 | ähnlich und stützt sich im wesentlichen auf die Tatsache, daß jede konkrete Riemannsche Fläche nur endlich viele Verzweigungspunkte besitzt.

Sei Ω_g das Geradenbündel der relativen Differentiale der universellen Familie W_g, dessen Beschränkung auf $V_{g,s}$ für jedes $s \in T_g$ das Geradenbündel der holomorphen Differentiale über $V_{g,s}$ darstellt (in | 5, VII | mit Ω_{V_g/T_g} bezeichnet). Nach | 6 | existieren zu jedem Punkt $s \in T_g$ eine Umgebung $U \ni s$ und U-Schnitte $w_1, \ldots, w_g$ des Geradenbündels Ω_g, so daß für alle $s' \in U$ die Beschränkungen von $w_1, \ldots, w_g$ auf jedes $V_{g,s'}$ eine Basis des Vektorraumes der auf $V_{g,s'}$ holomorphen Differentiale bilden. In jedem Punkt $(s, P_1, \ldots, P_d)$ aus $\bigoplus_1^d W_g$ gibt es eine Umgebung $U \oplus \left(\bigoplus_1^d V_j\right)$, so daß $w_i = f_{ij} d\,\tau_j$ gilt, wobei τ_j die Koordinate auf U_j und f_{ij} eine auf U_j holomorphe Funktion ist.

Sei $D_{r,d}$ die Teilmenge des Raumes $\bigoplus_1^d W_g$, die aus allen Punkten $(s, P_1, \ldots, P_d)$ mit folgender Eigenschaft besteht: Es gibt eine Zerlegung der Menge $\{P_1, \ldots, P_d\}$: $P_{j_1,1} = \ldots = P_{j_1,k_1}$, $\ldots$, $P_{j_q,1} = \ldots = P_{j_q,k_q}$ mit $P_{j_\alpha,1} \neq P_{j_\beta,1}$ für alle $\alpha \neq \beta$ und $\sum_{i=1}^{q} k_i = r + q - 1$.

Sei $G'(W_g, d, r) := G(W_g, d, r) \bigcup D_{r,d}$. Dann gilt wie im Hilfssatz 1 | 7, S. 37 | :

Lemma 2. Der Punkt $(s, Q) = (s, Q_1, \ldots, O_d)$ liegt genau dann in $G'(W_g, d, r) \bigcap \left(U \oplus \left(\bigoplus_1^d U_i\right)\right)$, wenn die Matrix $\mathcal{F}(s, Q) := (f_{ij}(s, Q_j))_{i,j}$ höchstens den Rang $d - r + 1$ hat.

Unmittelbar folgt:

Korollar. $G'(W_g, d, r)$ ist eine analytische Menge in $\bigoplus_1^d W_g$.

Satz 4. $G(W_g, d, r)$ ist eine analytische Menge.

Beweis. Man beweist (s. | 7, S. 40 |), daß $G(W_g, d, r)$ in $\bigoplus_1^d W_g$ abgeschlossen ist. Sei $G''(W_g, d, r)$ die Vereinigung der irreduziblen Komponenten von $G'(W_g, d, r)$, die in keiner der Mengen $D^d_{ij}(V_g) \bigcap (\bigoplus_1^d W_g)$ enthalten sind. Nach Satz 3 folgt $G''(W_g, d, r) \supseteq G(W_g, d, r)$. Da die Punkte aus $G''(W_g, d, r)$, die in keiner Menge $D^d_{ij}(V_g) \bigcap \left(\bigoplus_1^d W_g\right)$ liegen, in $G(W_g, d, r)$ enthalten sind und eine dichte Menge in $G''(W_g, d, r)$ bilden, folgt nach der obigen Bemerkung: $G''(W_g, d, r) \subseteq G(W_g, d, r)$, d. h. $G(W_g, d, r) = G''(W_g, d, r)$. Q. E. D.

Bemerkung. Aus $G(W_g, m, m)_s = \left\{\bigcup_{i=1}^m \varphi_i^{-1} G(W_g, m, m-1)\right\}_s$ folgt: $G(W_g, m, m+1)_s = \varnothing$.

Denn sei $(s, P_1, \ldots, P_m)$ aus $\bigoplus_i^m W_g$ mit $\dim\left(-\sum_{i=1}^m P_i\right) = m + 1$. O.E.d.A. kann man alle P_i verschieden voraussetzen. Man wähle k so, daß $\dim\left(-\sum_{i \neq k} P_i\right) = m$ gilt.

Sei $g_1, \ldots, \hat{g}_k, \ldots, g_{m+1}$ eine Basis von $\Gamma\left(V_{g,s}, \mathcal{O}_{-\sum\limits_{i \neq k}^m P_i}\right)$ und g_k erweitere dieses Basis zu einer von $\Gamma\left(V_{g,s}, \mathcal{O}_{-\sum\limits_{i=1}^m P_i}\right)$. Für geeignete $\lambda_1, \ldots, \hat{\lambda}_k, \ldots, \lambda_{m+1}$ hat die Funktion $\sum_{i \neq k} \lambda_i g_i + g_k$ nur einen Pol (und zwar in P_k). Aber g ist $\geqslant 3$. Widerspruch!

Aus dem Beweis des Satzes 34 | 7 | erhält man den folgenden Satz:

Satz 5. Die Punkte von $F(X_0, d, r)$, die nicht auf einer der Menge $D_{ij}^d(X_0)$ liegen, bilden eine dichte Teilmenge von $G(X_0, d, r)$ für alle $2 \leqslant r \leqslant d+1$.

Wegen $G(W_g, d, r) = \bigcup_{s \in T_g} G(V_{g,s}, d, r)$ folgt aus den Sätzen 3 und 4:

Satz 5.* $G(W_g, d, r)$ enthält keine isolierten Punkte; die Punkte aus $F(W_g, d, r)$, die nicht auf $D_{ij}^d(V_g) \cap \left(\bigoplus_1^d W_g\right)$ liegen, bilden eine dichte Teilmenge von $G(W_g, d, r)$.

In dem nächsten Satz bringen wir eine Abschätzung der Dimension der Mengen $G(W_g, d, r)$ (vgl. | 7, Satz 36 | für den Fall $r = 2$).

Satz 6. Sei $W = (X \xrightarrow{\pi} S)$ eine g-Kurve, $2 \leqslant d \leqslant g$ und $2 \leqslant r \leqslant d+1$. Wenn S reduziert und reindimensional ist, gilt in jedem Punkte $(s, P_1, \ldots, P_d)$ aus $G(W, d, r)$:

$$\dim G(W, d, r) \geqslant d - (r-1)(g+r-d-1) + \dim S.$$

Insbesondere gilt für die Riemannsche Fläche X_0 vom Geschlecht g in jedem Punkte:

$$\dim G(X_0, d, r) \geqslant d - (r-1)(g+r-d-1).$$

Beweis. Wegen Satz 5* müssen wir diese Ungleichung nur für die Punkte $(s, P_1, \ldots, P_d)$ aus $F(W, d, r)$ zeigen, die auf keiner Menge $D_{i,j}^d(V_g) \cap \left(\bigoplus_1^d W\right)$ liegen. Sei $U \oplus \left(\bigoplus_1^d U_i\right)$ eine Umgebung von $(s, P_1, \ldots, P_d)$ wie im Lemma 2, derart, daß für jeden Punkt $(s', Q) = (s', Q_1, \ldots, Q_d)$ aus $F(W, d, r) \cap \left(U \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^d U_i\right)\right)$, der nicht auf einer der Mengen $D_{ij}^d(V_g) \cap \left(\bigoplus_1^d W\right)$ liegt, gilt:

$$r = \dim \left(-\sum_{i=1}^d Q_i\right) = d + 1 - \operatorname{Rang} \mathcal{F}(s', Q).$$

Es folgt: Es gibt eine Unterdeterminante Δ von $\mathcal{F}(s', Q)$ mit $d + 1 - r$ Zeilen und Spalten, die im Punkte (s', Q) nicht verschwindet. Die Menge aller Punkte (s', Q) aus $U \oplus (\oplus U_i)$ mit $\dim (-\sum Q_i) \geqslant r$ stimmt mit der Menge der Punkte (s', Q) mit Rang $\mathcal{F}(s', Q) \leqslant d + 1 - r$ überein und weiter mit der Menge der Punkte, in welchen alle Determinanten verschwinden, die aus Δ durch Erweiterung mit einer der übrigen Zeilen und Spalten gebildet sind. Diese Anzahl ist aber $(r - 1)$ $(g + r - d - 1)$. Die Whitneysche Summe $\bigoplus_1^d W$ hat in jedem Punkte die Dimension $d + \dim S$. Nach einem elementaren Satz folgt: $\dim G(W, d, r) \geqslant \mathrm{d} + \dim M - (r - 1)(g + r - d - 1)$.

Bemerkung. In jedem Punkte von $G(W, d, r)$ ist die Dimension $\geqslant 1$; deshalb bringt der Satz 6 eine tatsächliche Abschätzung nur für $d - (r - 1)(g + r - d - 1) \geqslant 1$, d. h. nur für $2 \leqslant r \leqslant \frac{\sqrt{(g-d)^2 + 4(d-1)} - g + d}{2} + 1$.

§ 5. Sei g ungerade; für jedes $s \in T_g$ außerhalb einer analytischen Menge $(\neq T_g)$ besitzt $V_{g,s}$ unendlich viele nichtäquivalente Konkretisierungen mit m Blättern | 7 |. Eine Verschärfung dieser Aussage ist:

Satz 7. $V_{g,s}$ besitzt unendlich viele nichtäquivalente Konkretisierungen mit m-Blättern dann und nur dann, wenn s nicht in A_g liegt.

Beweis. Für $s \in A_g$ gibt es keine Konkretisierung von $V_{g,s}$ mit m-Blättern. Wenn s nicht in A_g liegt, gibt es mindestens eine Konkretisierung mit m-Blättern, z. B. $h: V_{g,s} \to \boldsymbol{P}_1$. Laut Satz 5* kann man o.E.d.A. annehmen, daß der Polstellendivisor von $h - \{P_1, \ldots, P_m\}$ — nicht auf einer Menge $D^d_{ij}(V_g) \cap \left(\bigoplus_1^d W\right)$ liegt, also sind $P_1, \ldots, P_m$ paarweise verschieden.

Dann ist $(s, P_1, \ldots, P_m)$ aus $G(V_{g,s}, m, 2)$, und in diesem Punkte ist $\dim G(V_{g,s}, m, 2) \geq 2 \frac{g+3}{2} - g - 1 = 2$. Sei $U \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^d U_i\right)$ eine Umgebung von $(s, P_1, \ldots, P_m)$, die keine der Mengen

$D^d_{ij}(V_g)$ trifft. Dann ist die Menge $\{(s', Q_1, \ldots, Q_m) \in U \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{d} U_i\right) : h(Q_1) = \ldots = h(Q_m)\} =: B$ eindimensional, und deshalb gibt es für jedes $(s', Q_1, \ldots, Q_m)$ aus $G(V_t, m, 2) \cap \left(U \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{d} U_i\right)\right) - B$ eine meromorphe Funktion f mit Polstellendivisor $Q_1, \ldots, Q_m$. Dann ist eine Gleichung: $h = \frac{af+b}{cf+d}$ mit $ad - bc \neq 0$ unmöglich, da nicht alle $g(Q_i)$ mit $\frac{a}{c}$ gleich sein dürfen usw. Q.E.D.

Literatur

[1] Behnke, H. und F. Sommer – Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 2. Aufl. Springer 1962.

[2] Bers, L. – „Uniformization and moduli“, Contribution to function theory, TATA Institute, Bombay, 1960.

[3] Brill, A. und M. Noether – Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie – Math. Annalen VII, 1874.

[4] Duma, A. – Der Teichmüller-Raum der Riemannschen Flächen vom Geschlecht g $\geqslant$ 2, Diss. München 1971.

[5] Grothendieck, A. – Technique de construction en geometrie analytique – Sem. Cartan 1960–1961.

[6] Kodaira, K. und D. C. Spencer – On deformations of complex-analytic structures – Teil I, II., Ann. of Math. 67, 1958.

[7] Meis, Th. – Die minimale Blätterzahl der Konkretisierungen einer kompakten Riemannschen Fläche, Schriftenreihe des Math. Inst. Münster 1960.