

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1973

MÜNCHEN 1974

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Holomorphe Vervollständigung metrisierbarer lokalkonvexer Räume

Von Martin Schottenloher in München

Vorgelegt von Karl Stein am 2. März 1973

Einleitung: Nach einem Beispiel von Noverraz [6] gibt es lokalkonvexe Räume E über $\mathbf{C}$ mit der Eigenschaft, daß sich nicht jede analytische Funktion $f: E \rightarrow \mathbf{C}$ auf die Vervollständigung $\hat{E}$ von E analytisch fortsetzen läßt. Stattdessen kann man jedoch einen eindeutig bestimmten maximalen Untervektorraum E_θ von $\hat{E}$ finden, derart, daß jede analytische Funktion $f: E \rightarrow \mathbf{C}$ eine analytische Fortsetzung nach E_θ besitzt (vgl. Dineen [2]). E_θ heißt die *holomorphe Vervollständigung* (oder *holomorph-vollständige Hülle*) von E , und E heißt *holomorph-vollständig*, falls $E = E_\theta$ gilt. Ein Beispiel von Hirschowitz [4, S. 413] zeigt, daß nicht jeder normierte Raum holomorph-vollständig ist.

In dieser Note werden einige Eigenschaften der holomorphen Vervollständigung metrisierbarer Räume mit Hilfe von Methoden aus [8] bewiesen. Insbesondere wird für metrisierbare lokalkonvexe Räume E und F gezeigt, daß jede analytische Abbildung $f: E \rightarrow F$ eine analytische Fortsetzung $f_\theta: E_\theta \rightarrow F_\theta$ besitzt. Diese Aussage verallgemeinert Resultate von Hirschowitz [5, S. 284] und Dineen [3]. Außerdem wird $E_\theta \times F_\theta = (E \times F)_\theta$ für den metrisierbaren Fall bewiesen.

1. In diesem Abschnitt sollen zunächst einige Definitionen und bereits bekannte Ergebnisse über die holomorphe Vervollständigung bereitgestellt werden.

E und F seien lokalkonvexe Hausdorffräume über dem Körper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen, und $\text{cs}(E)$ sei die Menge der stetigen Seminormen von E nach $\mathbf{R}$. Eine Abbildung $P: E \rightarrow F$ heißt *homogenes Polynom n -ten ($n \in \mathbf{N}$) Grades*, wenn es eine n -lineare Abbildung $\tilde{P}: E^n \rightarrow F$ so gibt, daß $P = \tilde{P} \cdot \Delta_n$ für die Diagonalabbildung $\Delta_n: E \ni a \mapsto (a, a, \dots, a) \in E^n$ gilt. *Polynome n -ten Grades* sind die konstanten Abbildungen von E nach F .

Mit $\mathbf{P}^n(E, F)$ wird der Raum der homogenen Polynome n -ten Grades bezeichnet. Statt $P(a)$ für $P \in \mathbf{P}^n(E, F)$ und $a \in E$ wird auch $P \cdot a$ geschrieben. Ohne Mühe läßt sich zeigen:

1.1. Lemma: 1° Ein Polynom $P \in \mathbf{P}^n(E, F)$ ist genau dann stetig, wenn P in $0 \in E$ stetig ist, und das ist gleichbedeutend mit der folgenden Aussage: Für alle $\beta \in \text{cs}(F)$ existiert ein $\alpha \in \text{cs}(E)$ mit $\|P\|^{\alpha, \beta} := \sup \{\beta \circ P(a) \mid a \in E \text{ und } \alpha(a) \leq 1\} < \infty$.

2° Jedes stetige Polynom $P \in \mathbf{P}^n(E, F)$ besitzt eine stetige Fortsetzung $\hat{P} \in \mathbf{P}^n(\hat{E}, \hat{F})$.

Für eine offene Menge $U \subset E$ und $\alpha \in \text{cs}(E)$ ist die α -Randdistanz $d_U^\alpha(x)$ eines Punktes $x \in U$ definiert durch

$d_U^\alpha(x) := \sup \{r \mid r \in \mathbf{R} \text{ und } x + a \in U \text{ für alle } a \in E, \alpha(a) < r\}$. $d_U^\alpha: U \rightarrow \mathbf{R}$ ist stetig, denn für $y \in U$, $\alpha(x - y) < d_X^\alpha(x)$ gilt: $|d_U^\alpha(x) - d_U^\alpha(y)| \leq \alpha(x - y)$.

1.2. Definition: Sei $U \subset E$ offen. Eine Abbildung $f: U \rightarrow F$ heißt *analytisch* (oder *holomorph*) in U , wenn es zu jedem $x \in U$ eine Folge $(d^n f(x))$ stetiger homogener Polynome $d^n f(x) \in \mathbf{P}^n(E, F)$ so gibt, daß für alle $\beta \in \text{cs}(F)$ ein $\alpha \in \text{cs}(E)$ existiert mit

$$d_U^\alpha(x) > 1 \text{ und } \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\alpha(a) < 1} \beta(f(x + a) - \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} d^n f(x) \cdot a) = 0.$$

Jede analytische Abbildung $f: U \rightarrow F$ ist stetig. Genauer gilt: Eine Abbildung $f: U \rightarrow F$ ist genau dann analytisch, wenn f stetig ist, und wenn alle Restriktionen $f|_{E_1 \cap U}: E_1 \cap U \rightarrow F$ für endlichdimensionale affine Teilräume $E_1 \subset E$ analytisch sind [1].

Sei $f: U \rightarrow F$ analytisch und seien $x \in U, a \in E \setminus \{0\}$ mit $x + \lambda a \in U$ für alle $\lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| \leq 1$. Dann gilt aufgrund der klassischen Cauchyschen Integralformel:

$$\frac{1}{n!} d^n f(x) \cdot a = \int_0^1 f(x + e^{2\pi i t} a) e^{-2\pi i n t} dt.$$

Für alle $a \in E$ und $n \in \mathbf{N}$ ist daher $d_a^n f: U \ni x \mapsto d^n f(x) \cdot a \in F$ analytisch. Ferner gibt es zu jedem $x \in U$ und $\beta \in \text{cs}(F)$ ein $\alpha \in \text{cs}(E)$ und ein $r > 0$ mit $\sum_{n \geq 0} \left\| \frac{1}{n!} d^n f(x) \right\|^{\alpha, \beta} r^n < \infty$.

Im Falle $F = \mathbf{C}$ ist der α -Konvergenzradius $\varrho_f^\alpha(x)$ von f im Punkte $x \in U$ ($\alpha \in \text{cs}(E)$) definiert durch:

$$\varrho_f^\alpha(x) := \sup \left\{ r \mid r \in \mathbf{R} \text{ und } \sum_{n \geq 0} \left\| \frac{1}{n!} d^n f(x) \right\|^\alpha r^n < \infty \right\},$$

$$\text{wobei jetzt } \left\| \frac{1}{n!} d^n f(x) \right\|^\alpha := \sup \left\{ \left\| \frac{1}{n!} d^n f(x) \cdot a \right\| \mid \alpha(a) \leq 1 \right\}.$$

1.3. Lemma: Sei $f: U \rightarrow \mathbf{C}$ analytisch. Dann gilt:

1° Für alle $x \in U$ gibt es $\alpha \in \text{cs}(E)$ mit $\varrho_f^\alpha(x) > 0$.

2° Es ist $\varrho_f^\alpha(y) \geq \varrho_f^\alpha(x) - \alpha(x - y)$ für alle $y \in E$ mit $\alpha(x - y) \leq \min \{ \varrho_f^\alpha(x), d_U^\alpha(x) \}$ und daher $|\varrho_f^\alpha(x) - \varrho_f^\alpha(y)| \leq \alpha(x - y)$.

Insbesondere ist $\varrho_f^\alpha: U \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ gleichmäßig stetig in der von E induzierten uniformen Struktur.

Beweis: 1° folgt unmittelbar aus dem Vorangehenden. 2° läßt sich wie im normierten Fall beweisen [8].

Obwohl eine analytische Funktion auf E sich im allgemeinen nicht auf ganz $\hat{E}$ analytisch fortsetzen läßt, wie in der Einleitung erwähnt wurde, kann man zeigen:

1.4. Satz: [2]: Zu jeder analytischen Funktion $f: E \rightarrow \mathbf{C}$ gibt es ein E enthaltendes Gebiet $\Omega_f \subset \hat{E}$, das Existenzgebiet einer analytischen Funktion $\check{f}: \Omega_f \rightarrow \mathbf{C}$ mit $\check{f}|_E = f$ ist.

Beweis: Ω_f wird folgendermaßen konstruiert: Die nach 1.3.2° gleichmäßig stetige Funktion $\varrho_f^\alpha: E \rightarrow [0, \infty]$ hat eine eindeutig bestimmte gleichmäßig stetige Fortsetzung $\hat{\varrho}_f^\alpha: \hat{E} \rightarrow [0, \infty]$. Es sei $\Omega_f := \{y \in \hat{E} \mid \text{Es gibt } \alpha \in \text{cs}(E) \text{ mit } \hat{\varrho}_f^\alpha(y) > 0\}$. Ω_f ist offen als Vereinigung von offenen Mengen und zusammenhängend, da sich jeder Punkt $y \in \Omega_f$ mit einem Punkt der zusammenhängenden Menge $E \subset \Omega_f$ verbinden läßt. Für jedes $x \in E$ hat $d^n f(x)$ nach 1.1.2° eine stetige Fortsetzung $\hat{d}^n f(x)$ auf $\hat{E}$.

Nach Definition von ϱ_f^α konvergiert $\check{f}(x + a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(x) \cdot a$ gleichmäßig für $\alpha(a) < \varrho_f^\alpha(x)$, $a \in \hat{E}$, und definiert daher eine analytische Funktion $\check{f}: \Omega_f \rightarrow \mathbf{C}$. Ω_f ist Existenzgebiet von $\check{f}$, da $\hat{\varrho}_f^\alpha = \varrho_f^\alpha = 0$ außerhalb Ω_f für alle $\alpha \in \text{cs}(E) \cong \text{cs}(\hat{E})$ gilt.

Im folgenden sei $H(U, F)$ der Vektorraum der analytischen Abbildungen von U nach F versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz. Statt $H(U, \mathbf{C})$ wird auch $H(U)$ geschrieben (U und F wie in 1.2).

1.5. Satz [2]: $E_\theta := \bigcap \{\Omega_f \mid f \in H(E)\}$ ist ein Vektorraum mit den folgenden Eigenschaften:

1° $E \subset E_\theta$ und zu jeder Funktion $f \in H(E)$ existiert eine Funktion $g \in H(E_\theta)$ mit $g|_E = f$.

2° Sei E_1 ein Untervektorraum von $\hat{E}$ mit $E \subset E_1$ und der Eigenschaft: Zu jedem $f \in H(E)$ gibt es $h \in H(E_1)$ mit $h|_E = f$. Dann gilt $E_1 \subset E_\theta$.

Beweis: Für $a \in E$ sei $f_a: E \ni x \mapsto f(x - a) \in \mathbf{C}$. Dann gilt offenbar $\Omega_{f_a} = a + \Omega_f$. Für $b \in E_\theta$ ist $a \in b + a + \Omega_f = b + \Omega_{f_a}$, also gilt $E \subset b + \Omega_f$ für alle $f \in H(E)$. Daher ist $f_b: E \ni x \mapsto \check{f}(x - b) \in \mathbf{C}$ wohldefiniert und analytisch, und es folgt: $E_\theta = \bigcap \{\Omega_f \mid f \in H(E)\} = \bigcap \{\Omega_{f_b} \mid f \in H(E)\} = b + \bigcap \{\Omega_f \mid f \in H(E)\} = b + E_\theta$. Deshalb ist $E_\theta + E_\theta = E_\theta$ und analog $\lambda E_\theta = E_\theta$ für $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

1° gilt nur mit $g := \check{f}|_{E_\theta}$ (vgl. 1.4) und 2° ergibt sich aus $E_1 \subset \Omega_f$ für alle $f \in H(E)$.

2. Zur weiteren Beschreibung von Eigenschaften der holomorphen Vervollständigung eines lokalkonvexen Raumes benötigen wir die Begriffe der *regulären Klasse* und der *zulässigen Überdeckung* [8].

2.1. Definition: Sei Ω ein Gebiet im lokalkonvexen Hausdorffraum E . Eine offene Überdeckung $\mathfrak{B}$ von Ω heißt *zulässig*, wenn gilt:

1° Zu jedem $U \in \mathfrak{B}$ gibt es $\alpha \in \text{cs}(E)$, $s \in \mathbf{R}_+$ und $V \in \mathfrak{B}$ mit $\inf \{d_\alpha^s(x) \mid x \in U\} > s$ und $\{y \in E \mid \text{Es gibt } x \in U \text{ mit } \alpha(x - y) < s\} \subset V$.

2° $U \cup V \in \mathfrak{B}$ für alle $U, V \in \mathfrak{B}$.

Für eine zulässige Überdeckung $\mathfrak{B}$ von Ω sei $A_\mathfrak{B} := \{f \in H(\Omega) \mid \|f\|_U < \infty \text{ für alle } U \in \mathfrak{B}\}$, wobei $\|f\|_U := \sup \{|f(x)| \mid x \in U\}$. $A_\mathfrak{B}$ versehen mit der *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen* $U \in \mathfrak{B}$ ist eine vollständige lokalkonvexe Algebra. Ferner ist $A_\mathfrak{B}$ eine „*reguläre Klasse*“ im folgenden Sinne:

2.2. Lemma: Für jede zulässige Überdeckung $\mathfrak{B}$ von Ω gilt:

1° $d_a^n f \in A_\mathfrak{B}$ für alle $f \in A_\mathfrak{B}$, $n \in \mathbf{N}$ und $a \in E$.

2° Zu jedem Punkt $x \in \Omega$ gibt es eine Seminorm $\alpha \in \text{cs}(E)$ mit: $\varrho_{\mathfrak{B}}^{\alpha}(x) := \inf \{\varrho_f^{\alpha}(x) \mid f \in A_{\mathfrak{B}}\} > 0$ (vgl. [8, 2.7]).

Sei $\omega(\Omega)$ das gerichtete System der zulässigen und abzählbaren Überdeckungen von Ω . ($\mathfrak{B} < \mathfrak{B}'$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}'$ Verfeinerung von $\mathfrak{B}$ ist.) $A_{\mathfrak{B}}$ ist Fréchetalgebra, falls $\mathfrak{B} \in \omega(\Omega)$. Für metrisierbare Räume E ist $H(\Omega) = \bigcup \{A_{\mathfrak{B}} \mid \mathfrak{B} \in \omega(\Omega)\}$. Ist $f \in H(\Omega)$, so gehört eine geeignete Verfeinerung $\mathfrak{B}$ von $(\{x \in \Omega \mid |f(x)| < n\} \mid n \in \mathbb{N})$ zu $\omega(\Omega)$, so daß $f \in A_{\mathfrak{B}}$. Allgemein heißt E ein ω -Raum [2], wenn die Bedingung $H(E) = \bigcup \{A_{\mathfrak{B}} \mid \mathfrak{B} \in \omega(E)\}$ erfüllt ist. Wie in [8, 3.7] läßt sich zeigen:

2.3. Lemma: Sei Ω ein Gebiet des metrisierbaren lokalkonvexen Raumes E . Dann ist $H(\Omega)_b := \lim_{\mathfrak{B} \in \omega(\Omega)} \text{ind } A_{\mathfrak{B}}$ der zu $H(\Omega)$ assoziierte bornologische Raum.

Ebenfalls überträgt sich der folgende Satz vom Typ Cartan-Thullen (vgl. [8, 4.7]):

2.4. Satz: Sei Ω ein Gebiet im lokalkonvexen Hausdorffraum E und sei $\mathfrak{B} \in \omega(\Omega)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1° Die Funktionen aus $A_{\mathfrak{B}}$ lassen sich nicht simultan in ein Ω echt umfassendes Gebiet analytisch fortsetzen (auch wenn nicht-schlichte Gebiete zugelassen sind).

2° Es gilt für alle $x \in \Omega$ und alle $\alpha \in \text{cs}(E)$: Aus $d_{\Omega}^{\alpha}(x) > 0$ folgt $d_{\Omega}^{\alpha}(x) \geq \varrho_{\mathfrak{B}}^{\alpha}(x)$.

3° Zu jeder Folge (x_n) aus Ω mit $d_{\Omega}^{\alpha}(x_n) \rightarrow 0$ für alle $\alpha \in \text{cs}(E)$ gibt es eine Funktion $f \in A_{\mathfrak{B}}$ mit $\sup |f(x_n)| = \infty$.

Von grundlegender Bedeutung ist der folgende Satz:

2.5. Satz: Sei E metrisierbar, $\mathfrak{B} \in \omega(E)$ und E_1 ein Unterraum von $\hat{E}$. Sei $\Omega \subset E_1$ ein Gebiet mit $E \subset \Omega$, in das sich jedes $f \in A_{\mathfrak{B}}$ fortsetzen läßt: Für alle $f \in A_{\mathfrak{B}}$ existiert $\check{f} \in H(\Omega)$ mit $\check{f}|_E = f$. Dann gibt es eine zulässige Überdeckung $\mathfrak{B}' \in \omega(\Omega)$ mit $A_{\mathfrak{B}'} = \{\check{f} \mid f \in A_{\mathfrak{B}}\}$, und die Restriktionsabbildung $A_{\mathfrak{B}'} \ni g \mapsto g|_E \in A_{\mathfrak{B}}$ ist ein Isomorphismus von Frécheträumen.

Beweis: Sei $x \in \Omega$. Dann ist $\hat{x}: A_{\mathfrak{B}} \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ stetig. Es gibt nämlich eine Folge (x_n) aus E mit $x_n \rightarrow x$, das bedeutet $\hat{x}_n(f) \rightarrow \hat{x}(f)$ für alle $f \in A_{\mathfrak{B}}$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus [7, S. 86] ist $\hat{x}$ stetig, da natürlich alle $\hat{x}_n$ stetig sind. Also

existieren eine Konstante $C \in \mathbf{R}$ und ein $U \in \mathfrak{B}$ mit $|\hat{x}(f)| \leq C \|f\|_U$ für alle $f \in A_{\mathfrak{B}}$. Diese Ungleichung gilt auch für alle Potenzen von f ; es kann deshalb $C = 1$ gesetzt werden. Wir zeigen jetzt:

(1) Es gibt eine Umgebung $W \subset \Omega$ von x und ein $V \in \mathfrak{B}$, so daß $|\hat{y}(f)| \leq \|f\|_V$ für alle $y \in W$ und alle $f \in A_{\mathfrak{B}}$.

Zu U gibt es zunächst α, s, V wie in der Definition 2.1.1°. Aus 2.2.1° folgt $|\hat{x}(d_a^n f)| \leq \|d_a^n f\|_U$ für $a \in E$, und aus der Cauchy-Integralformel ergibt sich $\left\| \frac{1}{n!} d_a^n f \right\|_U \leq \|f\|_V$, falls $\alpha(a) \leq R$, $0 < R < s$. Also gilt $\left\| \frac{1}{n!} d^n \check{f}(x) \right\|^\alpha \leq R^{-n} \|f\|_V$ und daher $|\hat{y}(f)| = \left| \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} d^n \check{f}(x) \cdot (y - x) \right| \leq \|f\|_V$ für $y \in \Omega, \alpha(y - x) < R$. Damit ist (1) bewiesen.

Nun sei $(\alpha_k)_{k \in \mathbf{N}}$ eine aufsteigende Folge von stetigen Seminormen auf E , die die Topologie von E definiert. Für $U \in \mathfrak{B}$ und $n, k \in \mathbf{N}$ sei $V_n^k(U)$ der offene Kern der Menge $\{x \in \Omega \mid d_\Omega^{\alpha_k}(x) > 2^{-n} \text{ und } |\hat{y}(f)| \leq \|f\|_U \text{ für alle } y \in \Omega, \alpha_k(y - x) < 2^{-n}, \text{ und alle } f \in A_{\mathfrak{B}}\}$. Das System $\mathfrak{V}$ aller endlichen Vereinigungen solcher $V_n^k(U)$ ist wegen (1) eine offene Überdeckung von Ω . Aus der Definition der $V_n^k(U)$ ergibt sich weiter, daß $\mathfrak{V} \in \omega(\Omega)$ gilt. Es bleibt $A_{\mathfrak{V}} = \{\check{f} \mid f \in A_{\mathfrak{B}}\}$ zu zeigen. Dazu sei $f \in A_{\mathfrak{B}}$ und $V_n^k(U) \in \mathfrak{V}$. Offenbar gilt

$$(2) \quad \|\check{f}\|_{V_n^k(U)} \leq \|f\|_U.$$

Sei umgekehrt $g \in A_{\mathfrak{V}}$ und $U \in \mathfrak{B}$. Es gibt α, s, V wie in 2.1.1° und es ist $\alpha \leq \alpha_k$ und $2^{-n} < s$ für geeignete $n, k \in \mathbf{N}$. Es folgt

$$(3) \quad \|g\|_U \leq \|g\|_{V_n^k(U)},$$

also $A_{\mathfrak{V}} = \{\check{f} \mid f \in A_{\mathfrak{B}}\}$. Die Restriktion $A_{\mathfrak{V}} \rightarrow A_{\mathfrak{B}}$ ist deshalb bijektiv; daß sie offen und stetig ist, läßt sich aus (2) und (3) ablesen.

Für eine zulässige Überdeckung $\mathfrak{B}$ von E ist $\varrho_{\mathfrak{B}}^\alpha$ wieder gleichmäßig stetig; es gelten die entsprechenden Ungleichungen wie in 1.3.2°. Also gibt es eine stetige Fortsetzung $\hat{\varrho}_{\mathfrak{B}}^\alpha: \hat{E} \rightarrow \hat{\mathbf{R}}$. Mit Hilfe des letzten Satzes läßt sich in Analogie zu 1.4 zeigen:

2.6. Satz: Sei E metrisierbar und $\mathfrak{B} \in \omega(E)$. Dann ist das Gebiet $\Omega_{\mathfrak{B}} \subset \hat{E}$, $\Omega_{\mathfrak{B}} := \{y \in \hat{E} \mid \text{Es gibt } \alpha \in \text{cs}(E) \text{ mit } \hat{\varrho}_{\mathfrak{B}}^{\alpha}(y) > 0\}$, die maximale simultane analytische Fortsetzung von $A_{\mathfrak{B}}$, und es gilt $\Omega_{\mathfrak{B}} = \bigcap \{\Omega_f \mid f \in A_{\mathfrak{B}}\}$.

Beweis: Nach Definition von $\Omega_{\mathfrak{B}}$ gilt $d_{\Omega}^{\alpha}(x) \geq \varrho_{\mathfrak{B}}^{\alpha}(x)$ (vgl. 1.3.2°) für $x \in \Omega$, und mit $\mathfrak{B} := \check{\mathfrak{B}}$ ($\check{\mathfrak{B}}$ wie in 2.5) folgt $\varrho_{\mathfrak{B}}^{\alpha} = \hat{\varrho}_{\mathfrak{B}}^{\alpha}$. Die erste Aussage des Satzes ergibt sich nun aus 2.4.

$\Omega_{\mathfrak{B}} \subset \bigcap \{\Omega_f \mid f \in A_{\mathfrak{B}}\}$ gilt unmittelbar. Zu $x \notin \Omega_{\mathfrak{B}}$ gibt es eine Folge (x_n) aus $\Omega_{\mathfrak{B}}$ mit $x_n \rightarrow x$ und daher nach 2.4 ein $g \in A_{\mathfrak{B}}$ mit $\sup |g(x_n)| = \infty$. Mit $f := g|_E \in A_{\mathfrak{B}}$ folgt $x \notin \Omega_f$, also $x \notin \bigcap \{\Omega_f \mid f \in A_{\mathfrak{B}}\}$.

2.7. Korollar: $E_{\Theta} = \bigcap \{\Omega_{\mathfrak{B}} \mid \mathfrak{B} \in \omega(E)\}$.

2.8. Korollar: Die Restriktion $r: H(E_{\Theta})_b \rightarrow H(E)_b$ ist ein Isomorphismus von lokalkonvexen Räumen.

Beweis: Offenbar ist r stetig. Zu $\mathfrak{B} \in \omega(E)$ gibt es nach 2.5 eine Überdeckung $\check{\mathfrak{B}} \in \omega(E_{\Theta})$, so daß die Restriktion $A_{\check{\mathfrak{B}}} \rightarrow A_{\mathfrak{B}}$ topologisch ist. Also ist $A_{\mathfrak{B}} \rightarrow A_{\check{\mathfrak{B}}} \rightarrow H(E_{\Theta})_b$ und damit nach 2.3 auch r^{-1} stetig.

2.9. Korollar: Für jede kompakte Menge $\mathcal{B} \subset H(E)$ (kompakt in der Topologie der kompakten Konvergenz) ist $r|_{r^{-1}(\mathcal{B})}: r^{-1}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$ topologisch.

Beweis: Das Korollar folgt unmittelbar aus 2.8 unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $H(E)$ für metrisierbare E ein Semi-Montelraum ist.

Zum Schluß dieses Abschnitts eine Charakterisierung der holomorph-vollständigen metrisierbaren Räume (vgl. [2]):

2.10. Satz: Die folgenden Aussagen sind für einen metrisierbaren lokalkonvexen Raum E äquivalent:

1° E ist holomorph-vollständig (i.e. $E = E_{\Theta}$).

2° Zu jeder Cauchyfolge (x_n) aus E ohne Häufungspunkt in E gibt es eine analytische Funktion $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\sup |f(x_n)| = \infty$.

3° Für jede präkompakte Menge $K \subset E$ mit $\|f\|_K < \infty$ für alle $f \in H(E)$ gilt: $\hat{K} := \{x \in E \mid |f(x)| \leq \|f\|_K \text{ für alle } f \in H(E)\}$ ist kompakt in E .

Beweis: $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Sei (x_n) eine Folge aus E mit $x_n \rightarrow x \in \hat{E} \setminus E_\theta$. Dann gilt $x \notin \Omega_{\mathfrak{B}}$ für ein $\mathfrak{B} \in \omega(E)$ (2.7). Also gibt es nach 2.5 und 2.4 eine Funktion $f \in A_{\mathfrak{B}}$ mit $\sup |f(x_n)| = \infty$.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. $\hat{K}$ liegt in der abgeschlossenen konvexen Hülle von K in E , die kompakt ist. Wäre $\hat{K}$ nicht kompakt, so gäbe es eine Folge (x_n) aus K mit $x_n \rightarrow x \notin E$. Nach 2° gibt es dann eine Funktion $f \in H(E)$ mit $\sup |f(x_n)| = \infty \leq \|f\|_K$. Widerspruch!

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Sei $x \in E_\theta$. Da E in E_θ dicht liegt, gibt es eine Folge (x_n) aus E mit $x_n \rightarrow x$. $K := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ erfüllt die Voraussetzungen in 3° , also ist $\hat{K} \subset E$ kompakt, und es folgt $x \in \hat{K} \subset E$.

3. Es werden jetzt vektorwertige analytische Abbildungen betrachtet.

3.1. Satz: *Sei E metrisierbar und F folgenvollständig. Dann hat jede analytische Abbildung $f: E \rightarrow F$ eine analytische Fortsetzung $\check{f}: E_\theta \rightarrow F$.*

Beweis: Sei zunächst F vollständig. Die Abbildung $f^*: F'_c \rightarrow H(E): v \mapsto v \circ f$, ist stetig, wenn mit F'_c der Dualraum F' von F mit der Topologie der kompakten Konvergenz bezeichnet wird. Für gleichstetige Mengen $H \subset F'_c$ ist folglich $f^*(H)$ relativkompakt und $r^{-1}: f^*(H) \rightarrow r^{-1}(f^*(H))$ stetig nach 2.9. Jede Auswertungsabbildung $\hat{x}: H(E_\theta) \ni g \mapsto g(x) \in \mathbf{C}$, $x \in E_\theta$, ist stetig. Zusammenfassend ist also $\hat{x} \circ r^{-1} \circ f^*|_H: H \rightarrow \mathbf{C}$ für alle gleichstetigen Mengen $H \subset F'$ stetig. Aus dem Vollständigkeitsatz von Grothendieck [7, S. 148] folgt: $\hat{x} \circ r^{-1} \circ f^*: F' \rightarrow \mathbf{C}$ ist schwach stetig und bestimmt daher ein Element $\check{f}(x)$ aus F . Offenbar ist $\check{f}: E_\theta \ni x \mapsto \check{f}(x) \in F$ eine analytische Fortsetzung von f , der Satz ist also für vollständige Räume F bewiesen. Sei jetzt F folgenvollständig und $i: F \rightarrow \hat{F}$ die natürliche Inklusion. $i \circ f$ hat dann eine analytische Fortsetzung $i \circ \check{f}: E_\theta \rightarrow \hat{F}$, und es gilt $i \circ \check{f}(E_\theta) \subset F$, da E dicht in E_θ liegt.

Für metrisierbare Bildräume F kann der Fortsetzungssatz noch folgendermaßen verschärft werden:

3.2. Satz. *Jede analytische Abbildung $f: E \rightarrow F$ zwischen metrisierbaren lokalkonvexen Räumen hat eine analytische Fortsetzung $f_\theta: E_\theta \rightarrow F_\theta$.*

Beweis: Nach 3.1 gibt es eine analytische Fortsetzung $i\circ f: E_\theta \rightarrow F$ von $i\circ f$, wenn $i: F \rightarrow \hat{F}$ wieder die natürliche Inklusion bezeichnet. Sei $x \in E_\theta$ und (x_n) eine Folge aus E mit $x_n \rightarrow x$. Wäre $i\circ f(x) \notin F_\theta$, so gäbe es nach 2.10 eine analytische Funktion $g: F_\theta \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\sup |g \circ i \circ f(x_n)| = \infty$, und $g \circ i \circ f \in H(E)$ ließe sich nicht analytisch nach E_θ fortsetzen. Widerspruch! Also ist $i\circ f(E_\theta) \subset F_\theta$ für jede analytische Abbildung $f: E \rightarrow F$, woraus folgt, daß die Restriktion $f_\theta: E_\theta \rightarrow F_\theta$ von $i\circ f$ analytisch ist.

Eine weitere Anwendung von Satz 3.1 ergibt das folgende Resultat:

3.3. Satz: *Für metrisierbare lokalkonvexe Räume E und F gilt $E_\theta \times F_\theta = (E \times F)_\theta$.*

Beweis: $(E \times F)_\theta \subset E_\theta \times F_\theta$ läßt sich zeigen, ohne daß von der Metrisierbarkeit Gebrauch gemacht werden muß: Sei $(a, b) \notin E_\theta \times F_\theta$, etwa $a \notin E_\theta$. Es gibt $f \in H(E)$ mit $a \notin \Omega_f$ (1.5). Die triviale Fortsetzung $\tilde{f}: E_\theta \times \hat{F} \ni (x, y) \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ erfüllt $\Omega_{\tilde{f}} = \Omega_f \times \hat{F}$, also ist $(a, b) \notin (E \times F)_\theta$, und $(E \times F)_\theta \subset E_\theta \times F_\theta$ ist bewiesen. Es bleibt nach 1.5 zu zeigen, daß sich jede Funktion $f \in H(E \times F)$ nach $E_\theta \times F_\theta$ analytisch fortsetzen läßt. Aus der Produktformel $H(E \times F) = H(E, H(F))$ [9] ergibt sich mit Hilfe von 3.1, daß sich f zunächst zu einer analytischen Funktion f_1 auf $E_\theta \times F$ fortsetzen läßt. f_1 läßt sich dann wegen $H(E_\theta \times F) = H(F, H(E_\theta))$ auf $E_\theta \times F_\theta$ analytisch fortsetzen.

Literatur:

- [1] Bochnak, J.-Siciak, J.: Analytic functions in topological vector spaces. *Studia Math.* 39, 77-112 (1971).
- [2] Dineen, S.: Holomorphically complete locally convex topological vector spaces. Erscheint im *Sém. Lelong*.
- [3] Dineen, S.: Holomorphic functions on locally convex topological vector spaces III. Handgeschriebenes Manuskript.
- [4] Hirschowitz, A.: Sur les suites de fonctions analytiques. *Ann. Inst. Fourier* 20, 403-413 (1970).
- [5] Hirschowitz, A.: Prolongement analytique en dimension infinie. *Ann. Inst. Fourier* 22, 255-292 (1972).

- [6] Noverraz, P.: Sur le théorème de Cartan-Thullen-Oka en dimension infinie. Erscheint in An. Acad. Bras. Ciências.
- [7] Schaefer, H. H.: Topological vector spaces. New York: Macmillan 1966.
- [8] Schottenloher, M.: Über analytische Fortsetzung in Banachräumen. Math. Ann 199, 313–336 (1972).
- [9] Schottenloher, M.: ε -product and continuation of analytic mappings. Erscheint in Colloque d'Analyse, Rio de Janeiro 1972, Hermann, Paris.