

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1973

MÜNCHEN 1974

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

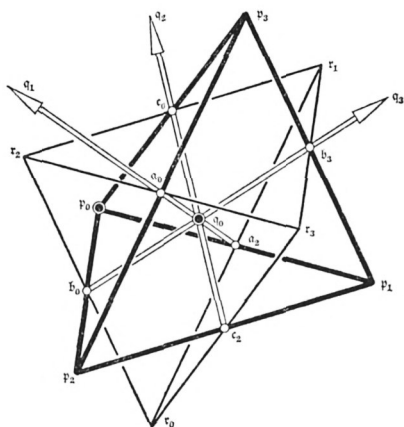
Desmische Kurvenpaare

Von Oswald Giering in München

Zahlreiche Untersuchungen der projektiven Differentialgeometrie befassen sich mit Paaren geometrischer Gebilde. Im folgenden wird (zunächst bei Raumkurven) auf eine Paarbildung aufmerksam gemacht, zu welcher die *desmische Figur* Anlaß gibt, die W. Blaschke [1, S. 150 ff., 181] ausführlich beschrieben hat. Eine desmische Figur ist ein selbstduales Tetraedertripel mit der Eigenschaft, daß jede Kante irgendeines Tetraeders ein Gegenkantenpaar jedes anderen Tetraeders trifft. In 1. wird die desmische Figur für unsere Zwecke entwickelt. In 2. werden alle Paare von Raumkurven bestimmt, deren Punkte sich derart einander zuordnen lassen, daß in entsprechenden Punkten die Begleittetraeder „derselben“ desmischen Figur angehören. Es zeigt sich, daß zwei spezielle W -Kurvenpaare – D_1 -Paar bzw. D_2 -Paar genannt – dieser Bedingung genügen. Als D_1 -Paar ergibt sich ein Paar von Komplexkurven mit einem Torsalsystem und einem invarianten Parameter, als D_2 -Paar ein gewisses W -Kurvenpaar mit ebenfalls invariantem Parameter. Abschließend werden in 3. die desmischen Figuren näher betrachtet, die entsprechenden Kurvenpunkten zugeordnet sind. Dabei ergibt sich, daß die desmische Koppelung in den umgebenden Raum fortsetzbar ist bis auf gewisse Ausnahmepunkte, für die neben den Begleittetraederebenen jenes Tetraeder verantwortlich ist, das nicht als Begleittetraeder auftritt.

1. In einem dreidimensionalen projektiven Raum sei P ein Tetraeder mit den Ecken p_0, p_1, p_2, p_3 ; $q_0 = \alpha p_0 + \beta p_1 + \gamma p_2 + \delta p_3$ ($\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$) sei ein fester Raumpunkt, der in keiner Ebene von P liegt (Figur 1). Die drei mit q_0 inzidenten Treffgeraden der Gegenkantenpaare von P seien:

$$\begin{aligned} (q_0, q_1) &= (a_0 \in (p_2, p_3), a_2 \in (p_0, p_1)), \\ (q_0, q_3) &= (b_0 \in (p_0, p_2), b_3 \in (p_1, p_3)), \\ (q_0, q_2) &= (c_0 \in (p_0, p_3), c_2 \in (p_1, p_2)). \end{aligned} \tag{1}$$



Figur 1

Die Ebene $\varepsilon = (q_1, q_2, q_3)$ des Tetraeders Q mit den Ecken q_0, q_1, q_2, q_3 ist derart eindeutig wählbar, daß umgekehrt für die drei mit p_0 inzidenten Treffgeraden der Gegenkantenpaare von Q gilt:

$$\begin{aligned} (p_0, p_1) &= (a_1 \in (q_2, q_3), a_2 \in (q_0, q_1)), \\ (p_0, p_3) &= (c_0 \in (q_0, q_2), c_3 \in (q_1, q_3)), \\ (p_0, p_2) &= (b_0 \in (q_0, q_3), b_2 \in (q_2, q_1)).^1 \end{aligned} \quad (2)$$

Damit liegt ein durch P und q_0 eindeutig bestimmtes Tetraederpaar P, Q vor mit der Eigenschaft, daß jede Kante von P ein Gegenkantenpaar von Q trifft und umgekehrt. Die Treffpunkte sind:

$$\begin{aligned} a_0 &= \gamma p_2 + \delta p_3, & b_0 &= \alpha p_0 + \gamma p_2, & c_0 &= \alpha p_0 + \delta p_3, \\ a_1 &= \alpha p_0 - \beta p_1, & b_1 &= -\beta p_1 + \delta p_3, & c_1 &= -\beta p_1 + \gamma p_2, \\ a_2 &= \alpha p_0 + \beta p_1, & b_2 &= \alpha p_0 - \gamma p_2, & c_2 &= \beta p_1 + \gamma p_2, \\ a_3 &= -\gamma p_2 + \delta p_3, & b_3 &= \beta p_1 + \delta p_3, & c_3 &= \alpha p_0 - \delta p_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Wir nennen jedes Tetraederpaar P, Q ein *desmisches Tetraederpaar*. Jedes Tetraeder läßt sich durch Vorgabe eines beliebigen, mit keiner Tetraederebene inzidenten Punktes zu einem desmi-

¹ In Figur 1 wurde die Ebene ε uneigentlich gewählt; ε enthält die Punkte $q_1, q_2, q_3, a_1, a_3, b_1, b_2, c_1, c_3$.

schen Tetraederpaar ergänzen, das durch jedes seiner Tetraeder und eine beliebige Ecke des andern Tetraeders eindeutig bestimmt ist. Die Tetraeder P und Q lassen sich durch ein Tetraeder R mit den Ecken r_0, r_1, r_2, r_3 zu einer desmischen Figur P, Q, R vervollständigen. Deren Ecken sind:

$$\begin{aligned} p_0, q_0 &= \alpha p_0 + \beta p_1 + \gamma p_2 + \delta p_3, & r_0 &= \alpha p_0 + \beta p_1 + \gamma p_2 - \delta p_3, \\ p_1, q_1 &= -\alpha p_0 - \beta p_1 + \gamma p_2 + \delta p_3, & r_1 &= \alpha p_0 + \beta p_1 - \gamma p_2 + \delta p_3, \\ p_2, q_2 &= \alpha p_0 - \beta p_1 - \gamma p_2 + \delta p_3, & r_2 &= \alpha p_0 - \beta p_1 + \gamma p_2 + \delta p_3, \\ p_3, q_3 &= \alpha p_0 - \beta p_1 + \gamma p_2 - \delta p_3, & r_3 &= -\alpha p_0 + \beta p_1 + \gamma p_2 + \delta p_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Nach [1, S. 153] liegen zu jeder Ecke irgendeines der Tetraeder P, Q, R die beiden andern Tetraeder *perspektiv*. Die aus den Ecken a_i, b_i, c_i ($i = 0, \dots, 3$) gebildeten Tetraeder A, B, C bilden ebenfalls eine desmische Figur. Jede Tetraederkante trägt genau vier der Punkte $p_i, q_i, r_i, a_i, b_i, c_i$, die ein *harmonisches Quadrupel* bilden.

2. Im folgenden sei $P = \{p_0, p_1, p_2, p_3\} = \{x, t, y, z\}$ das Begleittetraeder einer Raumkurve mit der Parameterdarstellung $x = x(t)$; dabei ist¹⁾

$$t = x', y = x'' - 3ax, z = x''' - 7ax' - (3a' + b)x. \quad (5)$$

Striche bedeuten Ableitungen nach t und a, b sind Koeffizienten aus den Ableitungsgleichungen für die Vektoren x, t, y, z . Geometrisch ist in jedem Kurvenpunkt nach Wahl der Tetraederecke z auf der zugehörigen Harmonikal- C_3 ein Begleittetraeder bestimmt (vgl. dazu auch [3]). Ein Punkt q_0 mit festen lokalen Koordinaten $\alpha:\beta:\gamma:\delta = \text{const.}$ in den Begleittetraedern P einer Raumkurve $x(t)$ beschreibt eine Raumkurve $\hat{x}(t)$, wenn P das Begleitsystem von $x(t)$ durchläuft. Wir fragen nach allen Raumkurven $x(t)$, deren Begleittetraeder P mit den entsprechenden Begleittetraedern Q von $\hat{x}(t)$ desmische Tetraederpaare P, Q bilden. Jedes Kurvenpaar $x(t), \hat{x}(t)$ mit dieser Eigenschaft nennen wir ein *desmisches Kurvenpaar*, kurz ein *D-Paar*.

¹ Alle Ergebnisse aus der projektiven Theorie der Raumkurven, die im folgenden Verwendung finden und nicht durch Literaturzitate belegt sind, können in [2] nachgeschlagen werden.

Zur Auffindung aller D -Paare hat man ausgehend von $\hat{x} = q_0$ zu prüfen, welche der Geraden (q_0, q_1) , (q_0, q_2) , (q_0, q_3) als Kurventangente $(\hat{x}, \hat{t})$ fungieren können und welche der Ebenen (q_0, q_1, q_2) , (q_0, q_1, q_3) ; (q_0, q_2, q_1) , (q_0, q_2, q_3) ; (q_0, q_3, q_1) , (q_0, q_3, q_2) die zugehörigen Schmiegeebenen $(\hat{x}, \hat{t}, \hat{y})$ abgeben können. Die Begleittetraederecke $\hat{z}$ fällt dann in die jeweils vierte Ecke des Tetraeders Q . Analog zu (5) gilt für $\hat{t}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$:

$$\hat{t} = \hat{x}', \hat{y} = \hat{x}'' - 3\hat{a}\hat{x}, \hat{z} = \hat{x}''' - 7\hat{a}\hat{x}' - (3\hat{a}' + \hat{b})\hat{x}. \quad (6)$$

Aus $\hat{x} = q_0$ folgen unter Beachtung von (4), (5), von $\{p_0, p_1, p_2, p_3\} = \{x, t, y, z\}$ und der Grundgleichung [2, S. 156]

$$x^{IV} = 10ax'' + 2dx' + ex \quad (7)$$

die Darstellungen

$$\hat{x} = \delta x''' + \gamma x'' + (\beta - 7\delta a)x' + (\alpha - 3\gamma a + 2\delta a' - \delta d)x, \quad (8)$$

$$\hat{x}' = \gamma x''' + (\beta + 3\delta a)x'' + (\alpha - 3\gamma a + \delta d - 5\delta a')x' + (\delta[2a'' - d' + e] - 3\gamma a')x, \quad (9)$$

$$\hat{x}'' = (\beta + 3\delta a)x''' + (\alpha + 7\gamma a + \delta[d - 2a'])x'' + (\gamma[2d - 6a'] + \delta[e - 3a''])x' + (\gamma[e - 3a''] + \delta[2a''' - d'' + e'])x, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}''' = & (\beta e + \gamma[e' - 3a'''] + \delta[2a^{IV} - d''' + e'' + 3ae])x \\ & + (2\beta d + \gamma[e - 9a'' + 2d'] + \delta[6ad - a''' - d'' + 2e'])x' \\ & + (10\beta a + \gamma[2d + a'] + \delta[e + d' - 5a'' + 30a^2])x'' \\ & + (\alpha + 7\gamma a + \delta[d + a'])x'''. \end{aligned} \quad (11)$$

Für das Vorliegen eines D -Paares ergeben sich aus (6) unter Verwendung von (8)–(11) für jede mögliche Ersetzung von $\hat{t}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ durch q_1 , q_2 , q_3 drei notwendige und hinreichende Bedingungen der Bauart

$$A_{3k}(t)x''' + A_{2k}(t)x'' + A_{1k}(t)x' + A_{0k}(t)x = 0, \quad (k=1, 2, 3). \quad (12)$$

Die Funktionen $A_{ik}(t)$ ($i=0, \dots, 3$, $k=1, 2, 3$) seien in einem gewissen Intervall mindestens stetig in t . Sind die Bedingungen (12) für eine Kurve $x(t)$ eines D -Paares nicht identisch erfüllt, so genügt $x(t)$ *mindestens einer* Differentialgleichung höchstens 3. Ordnung und liegt daher nach [2, S. 58] in einem höchstens zweidimensionalen linearen Unterraum; $x(t)$ ist somit keine

Raumkurve. Für jede Kurve eines D -Paares müssen daher die Bedingungen (12) identisch erfüllt sein. Wie man leicht nachprüft, lassen sich die Bedingungen (12) nur identisch erfüllen für

$$\hat{t} = q_1, \hat{y} = q_3, \hat{z} = q_2 \quad (13)$$

sowie für

$$\hat{t} = q_2, \hat{y} = q_3, \hat{z} = q_1. \quad (14)$$

In beiden Fällen ergibt sich außerdem, daß nur die Bahnkurve des Punktes

$$q_0 = p_0 - p_1 + p_2 + p_3 = r - t + y + z \quad (15)$$

die Kurve $r(t)$ zu einem D -Paar $r(t), \hat{r}(t)$ zu ergänzen vermag.

Bestimmen (13) und (15) die Begleittetraeder von $\hat{r}(t)$, so liefern die identisch zu erfüllenden Bedingungen (12) bei Beachtung der Grundgleichung von $\hat{r}(t)$ (vgl. (7))

$$a = \hat{a} = \frac{2}{3}, d = \hat{d} = -\frac{8}{3}, e = \hat{e} = -\frac{1}{3}. \quad (16)$$

Damit genügen $r(t)$ und $\hat{r}(t)$ derselben Grundgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$3r^{IV} - 20r'' + 16r' + r = 0, \quad (17)$$

deren charakteristische Gleichung vier verschiedene reelle Wurzeln besitzt. Nach (17) und [2, S. 150, 198] stellen $r(t), \hat{r}(t)$ zwei projektiv äquivalente W -Kurven dar, deren Punkte mit gleichen Parameterwerten einander entsprechen. Die Ableitungsgleichungen von $r(t), \hat{r}(t)$ haben wegen (16) die konstanten Koeffizienten (vgl. [2, S. 153-155])

$$a = \hat{a} = \frac{2}{3}, b = \hat{b} = -\frac{8}{3}, c = \hat{c} = \frac{11}{3}, \quad (18)$$

die $r(t), \hat{r}(t)$ ebenfalls als W -Kurven kennzeichnen [2, S. 198]. Der Parameter t ist wegen $b = \hat{b} = \text{const}$ zur absolut invarianten Projektivbogenlänge proportional und damit selbst absolut invariant.

Bestimmen (14) und (15) die Begleittetraeder von $\hat{r}(t)$, so ergeben die identisch zu erfüllenden Bedingungen (12) bei Beachtung der Grundgleichung von $\hat{r}(t)$

$$a = \hat{a} = 0, d = \hat{d} = 0, e = \hat{e} = 1. \quad (19)$$

Die Ableitungsgleichungen des so bestimmten D -Paares $\mathfrak{x}(t)$, $\hat{\mathfrak{x}}(t)$ lauten

$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{t}, \mathfrak{t}' = \mathfrak{y}, \mathfrak{y}' = \mathfrak{z}, \mathfrak{z}' = \mathfrak{x} \quad (20)$$

bzw.

$$\hat{\mathfrak{x}}' = \hat{\mathfrak{t}}, \hat{\mathfrak{t}}' = \hat{\mathfrak{y}}, \hat{\mathfrak{y}}' = \hat{\mathfrak{z}}, \hat{\mathfrak{z}}' = \hat{\mathfrak{x}}. \quad (21)$$

Die zugehörigen Koeffizienten sind somit

$$a = \hat{a} = 0, b = \hat{b} = 0, c = \hat{c} = 1. \quad (22)$$

Wegen $b = \hat{b} = 0$ liegen W -Kurven vor, die Komplexkurven sind [2, S. 173]; ihre Begleitsysteme sind Torsalsysteme ($a = \hat{a} = 0$) [2, S. 175] mit dem invarianten Integral $\int \sqrt[4]{c} dt$ als Parameter [2, S. 198]. Diese W -Kurven genügen der Differentialgleichung $\mathfrak{x}^{\text{IV}} = \mathfrak{x}$, deren charakteristische Gleichung die vier verschiedenen Wurzeln $\pm 1, \pm i$ besitzt. E. Schubarth [4, S. 472 f.], der die W -Kurven nach ihren projektiven Automorphismen klassifiziert hat, faßt die W -Kurven, deren charakteristische Gleichungen vier verschiedene Wurzeln besitzen, zur Klasse $[1, 1, 1, 1]$ zusammen. Nichtprojektive Normalformen dieser W -Kurven sind die allgemeinen höheren Parabeln und Hyperbeln, die im Fall der Komplexkurven auf Flächen 2. Grades liegen. Zusammenfassend gilt:

Satz 1: Die einzigen D -Paare sind zwei Paare projektiv äquivalenter W -Kurven (D_1 -Paar, D_2 -Paar) der Klasse $[1, 1, 1, 1]$ mit invarianten Parametern. Das D_1 -Paar ist ein Komplexkurvenpaar mit einem Torsalsystem als Begleitsystem, das D_2 -Paar ist das durch (18) gegebene spezielle W -Kurvenpaar.

3. Die Ableitungsgleichungen (20), (21) zeigen, daß die Tetraederkanten $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t}), (\mathfrak{t}, \mathfrak{y}), (\mathfrak{y}, \mathfrak{z}), (\mathfrak{z}, \mathfrak{x}); (\hat{\mathfrak{x}}, \hat{\mathfrak{t}}), (\hat{\mathfrak{t}}, \hat{\mathfrak{y}}), (\hat{\mathfrak{y}}, \hat{\mathfrak{z}}), (\hat{\mathfrak{z}}, \hat{\mathfrak{x}})$ die Bahntangenten in den jeweils erstgenannten Tetraederecken sind. Davon ausgehend erhält man in den Bahnkurvenpaaren $\mathfrak{t}, \hat{\mathfrak{t}}; \mathfrak{y}, \hat{\mathfrak{y}}; \mathfrak{z}, \hat{\mathfrak{z}}$ drei weitere D_1 -Paare (22), deren Begleittetraeder übereinstimmen mit den Begleittetraedern von $\mathfrak{x}, \hat{\mathfrak{x}}$, abgesehen von der geometrischen Bedeutung der Tetraederecken, die zyklisch wechselt nach dem Schema $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{y} \rightarrow \mathfrak{z} \rightarrow \mathfrak{x}$ bzw. $\hat{\mathfrak{x}} \rightarrow \hat{\mathfrak{t}} \rightarrow \hat{\mathfrak{y}} \rightarrow \hat{\mathfrak{z}} \rightarrow \hat{\mathfrak{x}}$.

Als Folge davon ist ein Bahnkurvenpaar $\mathfrak{f}(t), \hat{\mathfrak{f}}(t)$, das entsprechende Punkte

$$\begin{aligned} \mathfrak{f} &= k_0 \mathfrak{x} + k_1 \mathfrak{t} + k_2 \mathfrak{y} + k_3 \mathfrak{z} \quad \left(k_0 k_1 k_2 k_3 \neq 0 \right) \\ \hat{\mathfrak{f}} &= k_0 \hat{\mathfrak{x}} + k_1 \hat{\mathfrak{t}} + k_2 \hat{\mathfrak{y}} + k_3 \hat{\mathfrak{z}} \quad \left(k_0 : k_1 : k_2 : k_3 = \text{const.} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

der projektiven Begleiträume erzeugen, im allgemeinen ein D_1 -Paar mit den Begleittetraederecken $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}', \mathfrak{f}'', \mathfrak{f}'''$ bzw. $\hat{\mathfrak{f}}, \hat{\mathfrak{f}}, \hat{\mathfrak{f}}'', \hat{\mathfrak{f}}'''$. Analog beschreiben entsprechende Ecken der Begleittetraeder eines D_2 -Paares (18) wieder ein D_2 -Paar; auch ein Paar (23) ist damit im allgemeinen ein D_2 -Paar. Die zugehörigen Begleittetraederecken sind

$$\mathfrak{f}, \mathfrak{f}', \mathfrak{f}'' - 2\mathfrak{f}, \mathfrak{f}''' - \frac{14}{3}\mathfrak{f}' + \frac{8}{3}\mathfrak{f} \quad (24)$$

$$\text{bzw.} \quad \hat{\mathfrak{f}}, \hat{\mathfrak{f}}', \hat{\mathfrak{f}}'' - 2\hat{\mathfrak{f}}, \hat{\mathfrak{f}}''' - \frac{14}{3}\hat{\mathfrak{f}}' + \frac{8}{3}\hat{\mathfrak{f}}. \quad (25)$$

Diese Folgerungen gelten jedoch nicht, wenn die Punkte $\mathfrak{f}$ und $\hat{\mathfrak{f}}$ inzidieren, Fixpunkte sind, eine Gerade oder eine ebene Kurve beschreiben. Die Ermittlung dieser Ausnahmefälle für $\mathfrak{f}$ und $\hat{\mathfrak{f}}$ klärt zugleich die Rolle, welche die Tetraeder R mit den Ecken $\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$ spielen (vgl. (4) für $\alpha = -\beta = \gamma = \delta = 1$).

Bei den D_1 -Paaren sind $\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_2$ die einzigen reellen Fixpunkte $\mathfrak{f}, \hat{\mathfrak{f}}$; außerdem sind $(1 \pm i)\mathfrak{r}_1 + (1 \mp i)\mathfrak{r}_3$ konjugiert komplexe Fixpunkte. Entsprechende Punkte $\mathfrak{f}, \hat{\mathfrak{f}}$ inzidieren genau dann, wenn sie auf der Gerade $(\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_2)$ liegen oder in einen der konjugiert komplexen Fixpunkte $(1 \pm i)\mathfrak{r}_1 + (1 \pm i)\mathfrak{r}_3$ fallen. Die einzigen Punkte $\mathfrak{f}, \hat{\mathfrak{f}}$, die eine Gerade beschreiben, sind die von den Fixpunkten verschiedenen Punkte der Gerade $(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_3)$. Die von $\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_2$ und den Punkten der Gerade $(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_3)$ verschiedenen Punkte der Ebenen $(\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_3), (\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_3)$ sind die einzigen, die ebene W -Kurven mit der Differentialgleichung $\mathfrak{x}^{\text{IV}} = \mathfrak{x}$ durchlaufen.

Der von jedem Tetraedertripel P, Q, R gebildeten desmischen Figur entnimmt man (vgl. (3), (4)): Entsprechende Relativhauptnormalen der W -Kurven eines D_1 -Paares schneiden einander auf der Tetraederkante $(\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_2)$ in $\mathfrak{b}_0$, entsprechende Achsen auf $(\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_2)$ in $\mathfrak{b}_1$. Außerdem schneidet die Achse jedes Begleittetraeders die Relativhauptnormale des entsprechenden Begleittetraeders auf $(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_3)$ in $\mathfrak{b}_2$ bzw. in $\mathfrak{b}_3$. Alle Tetraeder R , die zu entsprechenden

Begleitsystemen eines D_1 -Paares gehören, haben somit die Fixecken $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2$ und die Fixkante $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)$, auf der die Punkte $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ harmonisch liegen (vgl. 1.).

Bei den D_2 -Paaren ist $\mathbf{r}_3$ Fixpunkt; außerdem existieren drei reell verschiedene Fixpunkte in der Gegenebene $(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Die einzigen Punkte $\mathbf{f}$, die mit ihren entsprechenden Punkten $\hat{\mathbf{f}}$ inzidieren, sind die Punkte der Ebene $(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ und der Fixpunkt $\mathbf{r}_3$. Die Verbindungsgeraden und die Verbindungsebenen der Fixpunkte bestimmen die Fixgeraden und Fixebenen, deren Punkte Geraden bzw. ebene Kurven erzeugen. Insbesondere durchlaufen die Punkte $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ in der Ebene $(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ ebene W -Kurven (17) und bestimmen zusammen mit der Fixecke $\mathbf{r}_3$ alle Tetraeder R , die zu entsprechenden Begleitsystemen eines D_2 -Paares gehören.

Abschließend halten wir fest:

Satz 2: Einander entsprechende, nicht inzidente Punkte $\mathbf{f}, \hat{\mathbf{f}}$ der projektiven Begleiträume eines D_i -Paares, die Raumkurven $\mathbf{f}(t), \hat{\mathbf{f}}(t)$ erzeugen, erzeugen D_i -Paare ($i = 1, 2$). Die Ausnahmepunkte $\mathbf{f}, \hat{\mathbf{f}}$, die keine Raumkurven erzeugen, werden durch jenes Tetraeder bestimmt, das die Begleitetetraeder in entsprechenden Punkten des D_i -Paares zu einer desmischen Figur ergänzt.

Literatur:

- [1] W. Blaschke: Projektive Geometrie, 3. Aufl., Birkhäuser Basel/Stuttgart 1954.
- [2] G. Bol: Projektive Differentialgeometrie, 1. Teil, Vandenhoeck & Ruprecht Göttingen 1950.
- [3] G. Bol: Zur projektiven Differentialgeometrie der Kurven in der Ebene und im Raum. Arch. Math. III (1952) 163–170.
- [4] E. Schubarth: Bestimmung der W -Kurven (Dissertation). Verhandl. Naturforsch. Ges. Basel, **38** (1927), 454–475.