

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1972

MÜNCHEN 1973

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Einbettung des relativen Wolffhardt-Raumes

Von Klaus-Werner Wiegmann in München

Vorgelegt von Herrn Karl Stein am 4. Februar 1972

Es sei X ein fester komplexer Raum, reduziert oder nicht, $\mathcal{O}_X$ die Strukturgarbe von X . Eine *Unterstruktur* auf X ist eine Garbe $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}_X$ von Unterhalbgebren, so daß auch $(|X|, \tilde{\mathcal{O}})$ ein komplexer Raum ist. $\text{Supp}(\mathcal{O}_X/\tilde{\mathcal{O}})$ heißt der *Träger* von $\tilde{\mathcal{O}}$, das ist eine analytische Menge in $(|X|, \tilde{\mathcal{O}})$, weil $\mathcal{O}_X$ eine kohärente $\tilde{\mathcal{O}}$ -Modulgarbe ist. Die einfachsten Unterstrukturen auf X sind solche mit einpunktigen Trägern. Ist etwa $x \in X$ und $\mathfrak{m}(x) \subset \mathcal{O}_X$ die volle Idealgarbe der analytischen Menge $\{x\} \subset X$, so erhält man für jedes $r \in \mathbb{N}$ eine Unterstruktur $\mathbb{C} + \mathfrak{m}(x)^r \subset \mathcal{O}_X$ mit Träger $\{x\}$; denn ist der Halm $\mathfrak{m}(x)_x = f_1 \cdot \mathcal{O}_{X,x} + \dots + f_k \cdot \mathcal{O}_{X,x}$, so definieren in einer Umgebung U von x die Funktionskeime $f_{i_1} \dots f_{i_\varrho}$ ($i_1, \dots, i_\varrho \in \{1, \dots, k\}$, $\varrho \in \{r, \dots, 2r-1\}$) einen Isomorphismus des geometrischen Raumes $(U, \mathbb{C} + \mathfrak{m}(x)^r|U)$ auf einen abgeschlossenen Unterraum eines Polyzylinders im $\mathbb{C}^n$, $n := \sum_{\varrho=r}^{2r-1} \binom{k+\varrho-1}{\varrho}$.

Andererseits folgt aus dem Hilbertschen Nullstellensatz, daß zu jeder Unterstruktur $\tilde{\mathcal{O}}$ auf X mit $\text{Supp}(\mathcal{O}_X/\tilde{\mathcal{O}}) = \{x\}$ ein $r \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $\mathbb{C} + \mathfrak{m}(x)^r \subset \tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}_X$ gilt; denn $\mathfrak{a} := \text{Ann}_{\tilde{\mathcal{O}}}(\mathcal{O}_X/\tilde{\mathcal{O}}) \subset \mathcal{O}_X$ ist eine kohärente Idealgarbe mit $\{x\}$ als Nullstellenmenge; außerdem hat man $\mathfrak{a} \subset \tilde{\mathcal{O}}$. Deshalb definiert $\tilde{\mathcal{O}}$ einen endlich-dimensionalen komplexen Vektorraum $\tilde{\mathcal{O}}_x/\mathbb{C} + \mathfrak{m}(x)_x^r \subset \mathcal{O}_{X,x}/\mathbb{C} + \mathfrak{m}(x)_x^r$. Es gibt sogar eine bijektive Beziehung zwischen den Unterstrukturen $\tilde{\mathcal{O}}$ von $\mathcal{O}_X$ mit $\text{Supp}(\mathcal{O}_X/\tilde{\mathcal{O}}) = \{x\}$ sowie $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,x}/\tilde{\mathcal{O}}_x) = k$ und den k -codimensionalen Unterhalbgebren von $E^{(2k)} := \mathcal{O}_{X,x}/\mathbb{C} + \mathfrak{m}(x)^{2k}$, d. h. man erhält eine analytische Menge in der Graßmann-Mannigfaltigkeit $\text{Grass}_k(E^{(2k)})$ aller k -codimensionalen Untervektorräume von $E^{(2k)}$. Diese Tatsachen hat WOLFFHARDT [8] benutzt, um für reduziertes X die Menge aller Unterstrukturen mit festem Träger $\{x\}$ zu einem universellen komplexen Raum W zu machen. Die Zu-

sammenhangskomponenten dieses Raumes sind die angegebenen reduzierten Unterräume solcher Graßmann-Mannigfaltigkeiten $\text{Grass}_k(E^{(2k)})$, also projektiv-algebraisch.

In [7] wird für beliebiges X mit Hilfe eines Satzes über Zwischenstrukturen [5] ein Modulraum V_x aller Unterstrukturen auf X mit Träger $\{x\}$ konstruiert und gezeigt, daß für reduziertes X die Reduktion von V_x mit dem Wolffhardt-Raum übereinstimmt: $W_x = V_{x, \text{red}} \cup \{\mathbf{O}_X\}$. (Der trivialen Unterstruktur $\mathbf{O}_X$ entspricht ein isolierter und reduzierter Punkt in W_x .) Diese Konstruktion wird in [6] verallgemeinert, relativiert bzgl. $x \in X$. Nach [6, Satz 1] gibt es einen universellen komplexen Raum V mit einer surjektiven holomorphen Abbildung $q: V \rightarrow X$, so daß $|V|$ übereinstimmt mit der Menge aller Unterstrukturen $\tilde{\mathbf{O}} \subset \mathbf{O}_X$, für die gilt $\text{card Supp}(\mathbf{O}_X/\tilde{\mathbf{O}}) = 1$; für $\tilde{\mathbf{O}} \in |V|$ ist $\text{Supp}(\mathbf{O}_X/\tilde{\mathbf{O}}) = \{q(\tilde{\mathbf{O}})\}$. Der Faserraum V_x von $q: V \rightarrow X$ (bei festem $x \in X$) stimmt mit dem Raum aus [7] überein. Die Konstruktion in [7] und [6] gibt keine Auskunft, ob V_x wieder projektiv-algebraisch ist.

In dieser Arbeit wird nun gezeigt, daß jede Zusammenhangskomponente von V_x in eine Graßmann-Mannigfaltigkeit $\text{Grass}_k(\mathbb{C}^d)$ eingebettet werden kann. Diese Abbildungen $V_x \hookrightarrow \text{Grass}_k(\mathbb{C}^d)$ hängen holomorph vom Punkt $x \in X$ ab. Es gilt:

Satz. *Es gibt eine abgeschlossene Einbettung über X von V in eine direkte Summe von relativen Graßmann-Mannigfaltigkeiten G_k ($k \in \mathbb{N}$), d. h. die Fasern $G_{k,x}$ von $G_k \rightarrow X$ sind von der Gestalt $\text{Grass}_k(\mathbb{C}^d)$. Insbesondere sind alle V_x , $x \in X$, projektiv-algebraisch. –*

Beweis des Satzes

Wie in [6] sei $\mathbf{An}$ (bzw. $\mathbf{An}/X$) die Kategorie der komplexen Räume (über X), $\mathbf{Ens}$ die Kategorie der Mengen und

$\mathbf{V}: (\mathbf{An}/X)^\circ \rightarrow \mathbf{Ens}$ der Funktor, den $q: V \rightarrow X$ darstellt.

$\mathbf{V}(q_S: S \rightarrow X)$ ist die Menge aller Unterstrukturen $\mathbf{S}$ auf $S \times X$, für die gilt:

- (α) $pr_S: S \times X \rightarrow S$ läßt sich über $(S \times X, \mathbf{S})$ faktorisieren.
- (β) $\mathbf{O}_{S \times X}/\mathbf{S}$ ist S -platt.
- (γ) $\text{Supp}(\mathbf{O}_{S \times X}/\mathbf{S}) = (id_S, q_S)(S) \subset S \times X$.

Ist $f: T \rightarrow S$ ein Morphismus in $\mathbf{An}/X$, so ordnet

$$\mathbf{V}(f): \mathbf{V}(S) \rightarrow \mathbf{V}(T)$$

jedem $S \in \mathbf{V}(S)$ die Struktur S_T auf dem Faserprodukt $T \times_S (S \times X, S)$ zu.

Ist $Z := X \times X$ und $p: Z \rightarrow X$ die Projektion auf die erste Koordinate, so ist die Diagonalabbildung $\Delta: X \rightarrow Z$ ein Schnitt von p und deshalb eine abgeschlossene Einbettung. Die zu Δ gehörende Idealgarbe $\mathbf{J} \subset \mathbf{O}_Z$ definiert für jedes $r \in \mathbf{N}$ eine Unterstruktur

$$\mathbf{O}_{Z^{(r)}} := p^{-1}\mathbf{O}_X + \mathbf{J}^r \subset \mathbf{O}_Z,$$

vgl. [6, Hilfssatz 1]. Auch die Unterfunktoren

$$\mathbf{V}^{(r)}(S \rightarrow X) := \{S \in \mathbf{V}(S \rightarrow X) : S \text{ ist ein } \mathbf{O}_{S \times_X Z^{(r)}}\text{-Modul}\}$$

sind darstellbar, und zwar durch abgeschlossene Unterräume $V^{(r)}$ von V (über X).

Die Garben $\mathbf{E}^{(r)} := \mathbf{O}_Z/\mathbf{O}_{Z^{(r)}}$ sind wegen $\text{Supp}(\mathbf{E}^{(r)}) \subset \Delta(X)$ kohärente $\mathbf{O}_X$ -Moduln. Ist $\mathbf{V} \subset \mathbf{O}_{V \times X}$ die universelle Unterstruktur, so ist nach [2, p. 58] oder [7, Satz 1] die Funktion

$$V \rightarrow \mathbf{N}, v \mapsto k(v) := \dim_{\mathbf{C}}(\mathbf{O}_{X, q(v)}/\mathbf{V}_{\{v, q(v)\}}),$$

lokal-konstant, d. h. für $k \in \mathbf{N}$ ist

$$V_k := \{v \in V : k(v) = k\}$$

offen und abgeschlossen in V , oder $V = \bigsqcup_{k \in \mathbf{N}} V_k$.

Mengentheoretisch gilt nach [8, p. 556] $V_{k,x} \subset V_x^{(2k)}$, also:

$$V_k = \bigcup_{x \in X} V_{k,x} \subset \bigcup_{x \in X} V_x^{(2k)} = V^{(2k)},$$

d. h. V_k ist ein offener Unterraum von $V^{(2k)}$.

Der Funktor $\mathbf{Grass}_k(\mathbf{E}^{(r)}): (\mathbf{An}/X)^\circ \rightarrow \mathbf{Ens}$ sei wie bei GROTHENDIECK [3, n° 2] definiert: $\mathbf{Grass}_k(\mathbf{E}^{(r)})(S \rightarrow X) = \text{Grass}(\mathbf{E}_S^{(r)})$ ist die Menge aller lokal-freien Quotienten- $\mathbf{O}_S$ -Moduln von $\mathbf{E}_S^{(r)}$ vom Rang k . Nach [3, Prop. 2.1] ist $\mathbf{Grass}_k(\mathbf{E}^{(r)})$ darstellbar, etwa durch einen Raum $\text{Grass}_k(\mathbf{E}^{(r)}) \rightarrow X$, dessen Fasern Graßmann-Mannigfaltigkeiten sind:

$$\text{Grass}_k(\mathbf{E}^{(r)})_x = \text{Grass}_k(\mathbf{E}_{(x)}^{(r)}), x \in X;$$

dabei ist $\mathbf{E}_{\{x\}}^{(r)} = \mathbf{O}_X/\mathbf{C} + \mathfrak{m}(x)^r$, also ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum, weil $\text{Supp}(\mathbf{E}_{\{x\}}^{(r)}) \subset \{x\}$ ist.

Zum Beweis des Satzes genügt es also zu zeigen, daß für alle $k \in \mathbf{N}$ eine abgeschlossene Einbettung $V_k \rightarrow G_k := \text{Grass}_k(\mathbf{E}^{(2k)})$ über X existiert. $\mathbf{V}_k(S \rightarrow X) := \text{Hom}_{\mathbf{An}/X}(S, V_k)$ definiert einen Unterfunctor $\mathbf{V}_k$ von $\mathbf{Grass}_k(\mathbf{E}^{(2k)})$; denn:

$$\mathbf{E}_S^{(2k)} = \mathbf{O}_{S \times X} / \text{Bild}(\mathbf{O}_{S \times XZ^{(2k)}} \xrightarrow{\alpha_S} \mathbf{O}_{S \times XZ});$$

nach Definition von $\mathbf{V}$ ist $\mathbf{V}_k(S \xrightarrow{q_S} X)$ gleich der Menge aller $S \in \mathbf{V}(S \rightarrow X)$, so daß gilt:

$$\dim_{\mathbf{C}}(\mathbf{O}_{X, q_S(s)} / \mathbf{S}_{\{s\}, q_S(s)}) = k \text{ für alle } s \in S;$$

$V_k \subset V^{(2k)}$ impliziert also $S \supset \text{Bild } \alpha_S$; nach [2, p. 58] oder [7, Satz 1] folgt aus (β) und (γ) , daß $\mathbf{O}_{S \times X} / \mathbf{S} = \mathbf{E}_S^{(2k)} / (\mathbf{S} / \text{Bild } \alpha_S)$ eine lokal-freie $\mathbf{O}_S$ -Garbe vom Rang k ist.

Es gibt also einen Monomorphismus $V_k \rightarrow G_k$ in $\mathbf{An}/X$, und diese holomorphe Abbildung ist eine abgeschlossene Einbettung. Beim Beweis wendet man ein Ergebnis von POURCIN [4, Prop. 1] an wie in [5]: Es sei $\mathbf{G} \in \mathbf{Grass}_k(\mathbf{E}^{(2k)})$ (G_k) die universelle Quotientengarbe,

$$\mathbf{G} = \mathbf{E}_{G_k}^{(2k)} / \hat{\mathbf{G}} = \mathbf{O}_{G_k \times X} / \tilde{\mathbf{G}},$$

wobei

$$\mathbf{O}_{G_k \times XZ} = \mathbf{O}_{G_k \times X} \supset \tilde{\mathbf{G}} \supset \text{Bild}(\mathbf{O}_{G_k \times XZ^{(2k)}} \xrightarrow{\alpha_{G_k}} \mathbf{O}_{G_k \times XZ}).$$

Die Menge aller $g \in G_k$ mit $\tilde{\mathbf{G}}_{\{g\}} \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{\{g\}} \subset \tilde{\mathbf{G}}_{\{g\}} \subset \mathbf{O}_X$ ist der Träger eines universellen (abgeschlossenen) Unterraumes von G_k , der nach Definition mit V_k übereinstimmt; q. e. d. . —

Bemerkungen

a) $\text{Grass}_k(\mathbf{C}^d)$ ist die Mannigfaltigkeit aller $(d-k)$ -dimensionalen Untervektorräume des $\mathbf{C}^d$. Nach dem Beweis des Satzes gibt es für jedes $x \in X$ abgeschlossene Einbettungen

$$V_{k,x, \text{red}} \rightarrow V_{k,x} \hookrightarrow \text{Grass}_k(\mathbf{C}^d) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{C}^N) = \text{Grass}_1(\bigwedge^k \mathbf{C}^d)$$

mit $d := \dim_{\mathbf{C}}(\mathcal{O}_{X,x}/\mathbf{C} + \mathfrak{m}(x)_x^{(2k)})$ und $N := \binom{d}{d-k} = \binom{d}{k}$. Auch die Inklusionen $\text{Grass}_k(\mathbf{C}^d) \subset \mathbf{P}(\mathbf{C}^N)$ hängt holomorph von $x \in X$ ab. Man hat nämlich nach GROTHENDIECK [3, n° 2] eine abgeschlossene Einbettung

$$\text{Grass}_k(E^{(2k)}) \rightarrow \mathbf{P}\left(\bigwedge^k E^{(2k)}\right) := \text{Grass}_1\left(\bigwedge^k E^{(2k)}\right)$$

über X , und die Fasern von $\mathbf{P}\left(\bigwedge^k E^{(2k)}\right) \rightarrow X$ sind projektive Räume: $\mathbf{P}\left(\bigwedge^k E^{(2k)}\right)_x = \mathbf{P}\left(\bigwedge^k E_{\{x\}}^{(2k)}\right)$.

b) Jede Zusammenhangskomponente von V_x (bzw. $V_{x, \text{red}}$) ist in einem $V_{k,x}$ (bzw. $V_{k,x, \text{red}}$) enthalten. Das bereits erwähnte Ergebnis von WOLFFHARDT [8] lautet: Für reduziertes X und jede Zusammenhangskomponente $\tilde{V}_x$ von $V_{x, \text{red}}$ gibt es eine Einbettung

$$\tilde{V}_x \rightarrow \text{Grass}_k(\mathbf{C}^{d'})$$

mit $k := \dim_{\mathbf{C}}(\mathcal{O}_{X,x}/\mathbf{V}_{\text{red}, \{v\}, x})$, $v \in \tilde{V}_x$, und $d' := \dim_{\mathbf{C}}(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}(x)_x^{2k}) = d + 1$. Diese Aussage ist schwächer als in a); jede Projektion $\mathbf{C}^{d+1} \rightarrow \mathbf{C}^d$ induziert eine abgeschlossene Einbettung $\text{Grass}_k(\mathbf{C}^d) \rightarrow \text{Grass}_k(\mathbf{C}^{d+1})$, vgl. [3, n° 2]. Mit Hilfe der Methoden aus [8, p. 557] erhält man aber auch $\tilde{V}_x \subset \text{Grass}_k(\mathbf{C}^d)$.

c) Wie in [6, Satz 2] kann man zeigen, daß $\text{Grass}_k(E^{(2k)}) \rightarrow X$ und $\mathbf{P}\left(\bigwedge^k E^{(2k)}\right) \rightarrow X$ lokal-trivial sind, falls X eine Mannigfaltigkeit ist.

d) Die Darstellbarkeit des Funktors $\text{Grass}_k(E^{(r)})$ folgt auch aus dem (relativen) Theorem von DOUADY [1] (bzw. [4]). Andererseits kann man mit Hilfe von [3, Prop. 2.1] die Existenz des (relativen) Wolffhardt-Raumes wie in [7] (bzw. [6]) beweisen ohne Verwendung der Ergebnisse über Zwischenstrukturen, die mit dem (relativen) Theorem von DOUADY gezeigt werden, vgl. [5]. Man benötigt nur den Satz von POURCIN [4, Prop. 1], also „Platitude et Privilège“ und keine banach-analytischen Räume.

Literatur

- [1] DOUADY, A.: Le problème des modules pour les sous-espaces analytique compacts d'une espace analytique donné. Ann. Inst. Fourier 16, 1-95 (1966).

- [2] – Flatness and privilege. *L'Ens. Math.* **14**, 47–74 (1968/70).
- [3] GROTHENDIECK, A.: Technique de construction en géométrie analytique. Exposé 12: *Sém. H. CARTAN* **13**, E. N. S., Paris 1960/61.
- [4] POURCIN, G.: Théorème de DOUADY au-dessus de S . *Annali Scuol. Norm. Sup. Pisa* **23**, 451–459 (1969).
- [5] SCHUSTER, H. W. und K.-W. WIEGMANN: Ein Modulproblem für kohärente Unteralgebren. Erscheint in: *Annali Scuol. Norm. Sup.* (1972).
- [6] – – Komplexe Unterstrukturen mit endlichen Trägern. Erscheint in: *Math. Ann.* (1972/73).
- [7] WIEGMANN, K.-W. und K. WOLFFHARDT: Komplexe Unterstrukturen mit einem festen Punkt als Träger. *Manusc. math.* **5**, 385–394 (1971).
- [8] WOLFFHARDT, K.: Variation of a complex structure in a point. *Amer. J. Math.* **90**, 553–567 (1968).