BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1972

MÜNCHEN 1973

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Komission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Einführende Bemerkungen (Ludwig Biermann) zu der Vorlage der nachgelassenen Arbeiten von A. Wilkens über die Bewegungen von Planetoiden

„Zur Theorie der nahezu kommensurablen Bewegungen der Planetoiden des Thule-Typus“

und

„Zur Störungstheorie der Planetoiden des Hilda-Typus nebst Erweiterung auf das System der großen Planeten Pluto – Neptun“.

Zwischen den erdähnlichen Planeten und dem Jupiter bewegt sich eine große Zahl von sogenannten kleinen Planeten, deren innerste die Erdbahn noch schneiden, während die Bahn der äußersten etwa mit der Jupiter-Bahn zusammenfällt. Die letzteren, die Gruppe der sogenannten Trojaner, bilden mit dem Jupiter stets ein ungefähr gleichseitiges Dreieck, d. h. sie gehen dem Planeten entweder um etwa 60° voran oder aber sie folgen ihm in diesem Abstand. Die Theorie dieser Bahnen ist im Zusammenhang mit dem Dreikörperproblem schon von Lagrange behandelt worden, und ihre Stabilität ist schon seit langem bekannt.

Die Gesamtzahl der kleinen Planeten ist von der Größenordnung 10^5 (von denen 1% bekannt sind), bei einer Gesamtmasse von etwa $^1/_{1000}$ der Erdmasse. Die mittleren Radien der meisten dürften also nur von der Größenordnung 10 bis 20 km sein, ähnlich den Kernen großer Kometen.

Zwischen einem Sonnenabstand von etwas über 2 a. E. und etwa $3\frac{1}{2}$ a. E. bilden die kleinen Planeten eine ziemlich dichte Verteilung, die nur bei bestimmten Werten durch eine deutliche Lücke unterbrochen ist oder aber einen Häufungspunkt aufweist. Zur genaueren Beschreibung werden die Bahnen zweckmäßig nicht durch den mittleren Abstand von der Sonne, sondern durch ihre mittlere Bewegung charakterisiert, die für den Planeten Jupiter fast genau 300 (genauer 299,13) Bogensekunden pro Tag beträgt.* Es zeigt sich nun, daß, wenn wir zunächst nach innen gehen, bei dem Dreifachen dieses Wertes, 897 Bogensekunden, eine ausgesprochene Lücke beobachtet wird (mittlerer Abstand von der Sonne 2.5 a. E., Hestia-Lücke): Es gibt keinen bekannten kleinen Planeten mit einer mittleren täglichen Bewegung zwischen 887 und 903 Bogensekunden; in den angrenzenden Intervallen befinden sich z. B. jeweils drei kleine Planeten zwischen 903 und 904 Bogensekunden und 885 und 887 Bogensekunden, etwa entsprechend der mittleren Häufigkeit pro Bogensekundenintervall in der weiteren Umgebung dieser Stellen.** – Die nächste Lücke befindet sich bei einer mittleren Bewegung von etwa 750 Bogensekunden pro Tag, dem $2\frac{1}{2}$-fachen der mittleren Bewegung des Jupiter. Hier handelt es sich allerdings, ebenso wie bei der nächstfolgenden Lücke bei etwa 700 Bogensekunden, das sind 7/3 der mittleren Bewegung des Jupiter, nur um eine tiefe Einsenkung der Verteilungsfunktion, nicht um das vollkommene Fehlen von kleinen Planeten mit Werten der mittleren Bewegung, die zu derjenigen des Jupiter kommensurabel sind. – Die nächste Lücke befindet sich in der Umgebung derjenigen Stelle, bei der die mittlere Bewegung das Doppelte derjenigen des Jupiter beträgt. Diese Lücke wird im allgemeinen als Hecuba-Lücke bezeichnet, nach einem kleinen Planeten, der mit 616 Bogensekunden pro Tag eine etwas größere mittlere Bewegung besitzt. Über diesen Planeten gibt es eine Untersuchung von A. Wilkens, die im Jahre 1960 als Abhandlung unserer Akademie erschienen ist und deren Resultate zum Teil in den beiden Untersuchungen, die ich heute vorlege, wieder mit verwendet worden sind. Auch die Hecuba-Lücke ist in der gesamten Statistik durchaus auffällig, obwohl es einen kleinen Planeten gibt, der fast genau die doppelte mittlere Bewegung wie Jupiter hat.

Beim $1\frac{1}{2}$-fachen der mittleren Bewegung des Jupiter, also um den Wert 450 Bogensekunden pro Tag, gibt es nun in der Folge

* Ein ganzzähliges Verhältnis der Perioden oder der mittleren Bewegungen bedeutet offenbar, daß die beiden Planeten nach einer kleinen Zahl von Umläufen wieder dieselbe gegenseitige Stellung einnehmen, so daß die gegenseitigen Störungen im gleichen Sinn wirken können (Resonanz).

** Siehe z. B. die Tabelle auf S. 163, Landolt-Börnstein, neue Serie Band VI/1.

der kleinen Planeten keine Lücke, sondern vielmehr eine Gruppe von 14 kleinen Planeten, die Hilda-Gruppe, die sämtlich Werte zwischen 445 und 454 Bogensekunden pro Tag besitzen. Die eine der beiden heute vorzulegenden Arbeiten A.Wilkens' bezieht sich auf die Theorie dieser Gruppe. Die zweite Arbeit betrifft den Fall der Kommensurabilität von 4 : 3, der bei den kleinen Planeten durch den Planeten Thule mit 400,3 Bogensekunden realisiert ist. Zwischen 444 und 308 Bogensekunden pro Tag (dem größten Wert für einen der Trojaner) ist Thule der einzige Planet in diesem ganzen Bereich. Das Verhältnis 3 : 2 ist übrigens auch deswegen von besonderem Interesse, weil es zufälligerweise das Verhältnis der mittleren Bewegungen von Neptun und Pluto (der eine Art äußerer kleiner Planet ist) wiedergibt.

A.Wilkens hat sich von Beginn seiner wissenschaftlichen Laufbahn an für die Theorie des Planetensystems interessiert; seine bekanntesten Arbeiten gehören ja in dieses Gebiet. Auch nach seiner Rückkehr nach München hat er wieder Themen aus diesem Bereich aufgegriffen. Auch die in den beiden von F. Schmeidler bearbeiteten Manuskripten dargestellten Untersuchungen, die ich Ihnen heute vorlege, werden wohl immer eine wichtige Ausgangsbasis für weitere Untersuchungen über diesen Gegenstand darstellen, obwohl Wilkens die Frage, warum im einen Fall eine ganze Gruppe von Planeten auf anscheinend stabilen Bahnen umläuft, während in der Mehrzahl der anderen Fälle von Kommensurabilität der Perioden tiefe Lücken in der Verteilungsfunktion vorhanden sind, soweit wir wissen nicht mehr hat klären können. Die nachfolgende Vorbemerkung von Herrn Schmeidler (Universitätssternwarte München), der sich dankenswerterweise mit großer Sorgfalt der nachträglichen Bearbeitung der nachgelassenen Manuskripte angenommen hat, enthält auch eine ausführliche Zusammenfassung der Hauptresultate.

L. B.

Vorbemerkung zu den beiden folgenden Aufsätzen

Von Felix Schmeidler, München

Die Originalmanuskripte der beiden nachfolgenden Arbeiten wurden im Nachlaß des am 27. 1. 1968 verstorbenen Professor Wilkens gefunden und der Bayerischen Akademie der Wissenschaften übergeben; aus schriftlichen Notizen von Herrn Wilkens ging hervor, daß er beabsichtigt hatte, beide Arbeiten in den Schriften der Akademie zu veröffentlichen. Da es sich in beiden Fällen offensichtlich um vorläufige Ausarbeitungen handelte, wurden die Manuskripte zunächst Herrn Kneissl und Herrn Schneider (Technische Hochschule München) zur Bearbeitung übergeben. Beide Herren mußten nach eingehender Prüfung aus Zeitgründen die Aufgabe der Herstellung einer für den Druck geeigneten Formulierung des Textes ablehnen. Daraufhin erklärte sich der Verfasser dieser Zeilen auf Bitte der Herren Schwab und Wellmann zu dieser Aufgabe bereit. Dabei war es mit freundlicher Zustimmung von Herrn Schneider möglich, die von ihm bereits geleisteten Vorarbeiten zu benutzen.

Bei der Bearbeitung wurde der Text zunächst an einigen Stellen stilistisch geändert. Weiter wurden gelegentliche sachliche Wiederholungen ausgemerzt, zu deren Beseitigung Herr Wilkens nicht mehr die Zeit gefunden hatte. Außerdem wurde die Darstellung von entbehrlichen Weitläufigkeiten befreit und hat dadurch, wie ich hoffe, an Verständlichkeit gewonnen. Daß mit diesen Maßnahmen viele technische Arbeiten wie z. B. die Umnumerierung fast sämtlicher Gleichungen verbunden waren, versteht sich von selbst.

Auch in der Sache haften den beiden Arbeiten noch einige Unvollkommenheiten an. So hat Herr Wilkens in der Arbeit über den Thule-Typus nicht mehr die Zeit gefunden, alle drei Fälle der Lösung der entscheidenden Gleichung auszuarbeiten, die die Exzentrizität als Funktion der Zeit angibt. Auch andere kleinere Mängel ähnlicher Art sind stehen geblieben. Bewußt habe ich es unterlassen, diese an sich erforderlichen Ergänzungen von mir aus vorzunehmen. Für das Verständnis des prinzipiellen Gedankengangs sind sie nicht notwendig; wer aber andrerseits die Grundidee von Herrn Wilkens für eigene Untersuchungen anwenden will, wird die fehlenden Ausführungen mit leichter Mühe ergänzen können. An den entsprechenden Stellen des Textes habe ich durch Fußnoten auf fehlende sachliche Überlegungen hingewiesen.

In diesem Zusammenhang scheint es mir nützlich, mit kurzen Worten den Grundgedanken der beiden Aufsätze zu skizzieren, der aus dem von Herrn Wilkens verfaßten Text nur durch ausführliches Studium gefunden werden kann. Sowohl im Fall des Hilda-Typus (genäherte Kommensurabilität 3 : 2) als auch im Fall des Thule-Typus (genäherte Kommensurabilität 4 : 3) werden nur diejenigen Glieder in den Störungsgleichungen berücksichtigt, die von dem langsam veränderlichen Argument ζ abhängen; dabei ist im einen Fall $\zeta = 3l' - 2l - \tilde{\omega}$, im anderen Fall $\zeta = 4l' - 3l - \tilde{\omega}$. Die Koeffizienten der Terme in ζ werden bis zum zweiten Grad der Exzentrizitäten entwickelt. Es werden also alle kurzperiodischen Störungen und unter den langperiodischen Störungen diejenigen vernachlässigt, die von den dritten und höheren Potenzen von e und e' abhängen. Unter diesen Annahmen kann eine Gleichung aufgestellt werden, die die zeitliche Ableitung von e in der Form eines quadratischen Ausdrucks in e selbst darstellt; sie ist also eine Riccati'sche Differentialgleichung. Ihre Lösung ergibt die im Rahmen der Voraussetzungen strenge Darstellung der Exzentrizität als Funktion der Zeit. Die Differentialquotienten der übrigen Bahnelemente werden als Potenzreihen nach e dargestellt, die nach Aufstellung der Integrale über e und über e^2 integriert werden können. Die naheliegende Frage nach der Stabilität der gefundenen Lösungen, die für den Vergleich mit den Beobachtungen wichtig wäre, ist nicht mehr ausdiskutiert worden.

Zur Theorie der nahezu kommensurablen Bewegung der Planetoiden des Thule-Typus

Von A. Wilkens †

Vorgelegt am 11. Juni 1971 durch Ludwig Biermann

Die folgende Untersuchung enthält eine Erweiterung meiner bisherigen Untersuchungen zur Theorie der nahezu kommensurablen Bewegungen der Planetoiden des Hecuba- und Hestia-Typus auf den Verhältnisfall, bei dem die mittlere Bewegung n des Planetoiden zu der des großen Planeten Jupiter nahezu im kritischen Verhältnis 4/3 steht. Dieser Typus wird repräsentiert durch den Planetoiden Thule, der dem Jupiter sehr nahe kommen kann, so daß in jedem Falle besonders große Störungen eintreten können. Die Schwierigkeit der Darstellung eines Planetoiden vom Thule-Typus beruht, wie bei den bisher behandelten Typen, auf der Kommensurabilität im Verhältnis zweier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen, so daß die kritischen Glieder der (die zeitliche Änderung der Bahnelemente bestimmenden) Störungsfunktion bereits in den Termen niedrigsten, d. h. 1. Grades der Exzentrizitäten auftreten und ferner in jedem weiteren Grade der Exzentrizität zur Geltung kommen.

Beschränken wir uns hier zunächst auf das ebene Problem, wobei Terme bis 4. Grades der Exzentrizität in der Entwicklung der Störungsfunktion berücksichtigt werden sollen. Nach Le Verrier (10. Band der „Annales de l'Observatoire de Paris") ergibt sich, wenn nur die säkularen und die kritischen Terme des Argumentes $\zeta = 4l' - 3l - \bar{\omega}$ angeschrieben werden, wo l' die mittlere Länge des großen Planeten Jupiter, l die mittlere Länge des Planetoiden und $\bar{\omega}$ die Perihellänge des Planetoiden bedeuten:

$$(1\,\mathrm{a})\qquad \begin{aligned} R = N_0 &+ N_1 e^2 + N_1' e^4 \\ &+ (N_2 + N_2' e^2) e \cos \zeta \\ &+ (N_3 + N_3' e^2) e^2 \cos 2\zeta \\ &+ N_4 e^3 \cos 3\zeta + N_5 e^4 \cos 4\zeta . \end{aligned}$$

Die Koeffizienten N_i sind nur abhängig von den großen Achsen a und a'. Nimmt man die Bahn des störenden Körpers (Halbachse a'), des großen Planeten Jupiter, als kreisförmig an und setzt die Gaußsche Konstante $k^2 = 1$, entsprechend einer Zeiteinheit von $\frac{1}{k} = 58.133$ mittleren Tagen, so gilt (m' = Jupitermasse, die A^i sind Integrale, die nur von den Bahnkonstanten abhängen):

(1 b)

$$N_0 = \frac{1}{2} m' A^0; \quad N_1 = \frac{1}{8} m' B^1; \quad N_1' = \frac{3}{16} m' (A_2^0 + A_4^0);$$

$$N_2 = -4 m' (A_0^4 + \frac{1}{8} A_1^4);$$

$$N_2' = \frac{1}{8} m' (180 A^4 + 19.5 A_1^4 - 10 A_2^4 - 3 A_3^4);$$

$$N_3 = \frac{1}{4} m' (108 A_0^8 + 15 A_1^8 + A_2^8);$$

$$N_3' = \frac{1}{16} m' (-6456 A_0^8 - 912 A_1^8 + 20 A_2^8 + 32 A_3^8 + 4 A_4^8);$$

$$N_4 = m' (-1636 A^{12} - 235.5 A_1^{12} - 22 A_2^{12} - A_3^{12});$$

$$N_5 = \frac{1}{16} m' \left(\frac{704688}{24} A_0^{16} + \frac{22944}{6} A_1^{16} + 412 A_2^{16} + 29 A_3^{16} + A_4^{16} \right).$$

Der Koeffizient N_5 ist nicht im 10. Bande der Le Verrierschen „Annales de l'Observatoire de Paris" angegeben, sondern mußte erst nach den Angaben von Le Verrier entwickelt werden. Wir können an die Integration der Differentialgleichungen gehen.

Zunächst folgt auf Grund der Tatsache, daß die Störungsfunktion R nach (1) nur von dem einen Winkelargument $\zeta = 4l' - 3l - \bar{\omega}$ abhängt, daß für die Ableitungen von R nach l und $\bar{\omega}$ die Gleichung besteht

$$\frac{\partial R}{\partial l} = 3 \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}}. \tag{1 c}$$

Wegen des Auftretens von $\partial R / \partial l$ und $\partial R / \partial \bar{\omega}$ in der (auf Lagrange zurückgehenden) Differentialgleichung für e

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}} \left[\frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} + \left(1 - \sqrt{1-e^2}\right) \frac{\partial R}{\partial l} \right] \tag{2}$$

substituieren wir zuerst, der Theorie der Variation der Konstanten entsprechend:

(3) $$\frac{\partial R}{\partial l} = \frac{d\sqrt{a}}{dt}$$

(vgl. A. Wilkens, 1960 Sitzungsberichte p. 231) und ferner nach (1c)

$$\frac{\partial R}{\partial \varpi} = \frac{1}{3}\,\frac{\partial R}{\partial l} = \frac{1}{3}\,\frac{d\sqrt{a}}{dt}.$$

Man erhält für (2) die neue Form

(4) $$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}}\left[\frac{1}{3} + 1 - \sqrt{1-e^2}\right]\frac{d\sqrt{a}}{dt}.$$

Wegen

$$\frac{e\,de}{\sqrt{1-e^2}} = -d\left[\sqrt{1-e^2}\right]$$

kann man auch schreiben

(5) $$\sqrt{a}\,\frac{d\left[\sqrt{1-e^2}\right]}{dt} = \frac{d\sqrt{a}}{dt}\left[\frac{4}{3} - \sqrt{1-e^2}\right]$$

oder bei zweckmäßigerer Anordnung

(5a)
$$\frac{4}{3}\,\frac{d\sqrt{a}}{dt} = \sqrt{1-e^2}\,\frac{d\sqrt{a}}{dt} + \sqrt{a}\,\frac{d\left[\sqrt{1-e^2}\right]}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}\right).$$

Integration über t ergibt nun die zeitunabhängige Beziehung zwischen a und e

(6) $$\frac{4}{3}\sqrt{a} = \sqrt{a(1-e^2)} + \text{const}$$

bzw.

$$\sqrt{a}\left(\frac{4}{3} - \sqrt{1-e^2}\right) = \text{const.}$$

Entwickelt man die Wurzel und bezeichnet die Integrationskonstante mit $\sqrt{a_*}/3$, so folgt bis zu Termen e^2 einschließlich

$$\sqrt{a}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^2\right) = \frac{1}{3}\sqrt{a_*}$$

bzw.

(6a) $$\sqrt{a} = \sqrt{a_*}\left(1 - \frac{3}{2}e^2 + \ldots\right).$$

Berücksichtigt man auch die Glieder mit e^4 (für Thule beträgt $e = 0{,}08$) dann erhält man

(6b) $$a = a_*(1 - 3e^2 + 6e^4).$$

Die Integrationskonstante a_* berechnet man aus $a = a_0$, $e = e_0$ zum Zeitpunkt $t = t_0$ in ausreichender Näherung gemäß

(6c) $$a_* = a_0(1 + 3e_0^2 + \ldots).$$

Schließlich folgt für die mittlere Bewegung $n = a^{-3/2}$ wegen (6b) $n = n_*\left(1 + \frac{9}{2}e^2 + \ldots\right)$, wobei mit (6c) gilt $n_* = n_0\left(1 - \frac{9}{2}e_0^2 + \ldots\right)$.

Es besteht offensichtlich noch die Beziehung

$$n_0 = n\left(1 + \frac{9}{2}e_0^2 + \ldots\right).$$

Unser Problem reduziert sich also nach Darstellung von a als Funktion von e auf die weitere Darstellung von e als Funktion der Zeit auf Grund der Differentialgleichung (2), die sich wegen (1c) in der Form:

(7) $$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}}\left(\frac{4}{3} - \sqrt{1-e^2}\right)\frac{\partial R}{\partial l}$$

schreiben läßt.

Schreibt man die partielle Ableitung $\partial R/\partial l$ in der Form

(8) $$\frac{\partial R}{\partial l} = \varepsilon_1 e \sin\zeta + \varepsilon_2 e^2 \sin 2\zeta,$$

wobei ε_1 und ε_2 mittels (1) definiert sind durch

(9) $$\varepsilon_1 = 3N_2 \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = 6N_3,$$

und beachtet man noch $\partial\zeta/\partial l = -3$, so lautet die Differentialgleichung (7) bei Berücksichtigung von Gliedern zweiten Grades in e einschließlich:

(10) $$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{3\sqrt{a_*}}\left[\varepsilon_1 \sin\zeta + \varepsilon_2 e \sin 2\zeta + \frac{5}{2}\varepsilon_1 e^2 \sin\zeta\right].$$

Es ist nun ζ von e abhängig wegen der Beziehungen

(11) $$\zeta = 4l' - 3l - \tilde{\omega}$$
$$l = \varepsilon + \int n\,dt.$$

so daß zunächst:

(11a) $$\frac{d\zeta}{dt} = 4n' - 3n - 3\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\tilde{\omega}}{dt};$$

Die in (11a) noch verbleibenden Ableitungen $\frac{d\varepsilon}{dt}$ und $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ lauten nach Tisserands: „Traité de Mécanique Céleste", Bd. I, pg. 169 im Falle der ebenen Bewegung (im Falle Thule beträgt die Neigung gegen die Jupiterbahn ungefähr 1°) folgendermaßen:

(12) $$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{\partial R}{\partial e}$$
$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e}.$$

Es ist also zuerst die Funktion $\frac{\partial R}{\partial a}$ darzustellen, und zwar auf Grund der Darstellung von R in (1), wobei zu beachten ist, daß in R die Koeffizienten an den Thule-Typus gebunden sind, außer den allgemein säkularen Termen N, N_1, N_1'.

In bezug auf $\frac{d\varepsilon}{dt}$ tritt nun nach (12) im 1. Term auf: $-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} = -2\sqrt{a}\frac{\partial R}{\partial a}$ und im 2. Term $\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{\partial R}{\partial e}$, wo R wieder nach (1) zu entnehmen ist, analog in bezug auf $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ in (12), wobei die Koeffizienten N_i und N_i' in (1b) definiert sind. Weiter ist noch in bezug auf $\frac{d\varepsilon}{dt}$ gemäß (6a) der Faktor zu substituieren:

$$\sqrt{a} = \sqrt{a_*}\left(1-\frac{3}{2}e^2\right)$$

und weiter:

(13) $$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{\partial N_0}{\partial a} + e^2\frac{\partial N_1}{\partial a} + e\cos\zeta\frac{\partial N_2}{\partial a} + e^2\cos 2\zeta\frac{\partial N_3}{\partial a}.$$

Dabei ist (vgl. Le Verrier l. c. a.)

$$\frac{\partial N_0}{\partial a} = \frac{1}{2}m'\frac{\partial A_0}{\partial a} = \frac{1}{2}m'\left[\left(\frac{\partial A^0}{\partial a}\right)_* + \left(\frac{\partial^2 A_0}{\partial a^2}\right)_*(a-a_*) + \cdots\right.$$

in (13) zu substituieren.

Ferner ist der Faktor $\frac{2}{na}$ vom 1. Term in (12) zu ersetzen durch

(15) $$\frac{2}{na} = 2\sqrt{a} = 2\sqrt{a_*}\left(1-\frac{3}{2}e^2\right).$$

Die Substitution der benötigten Koeffizienten in die 1. Gleichung (12) ergibt dann:

$$(16)\qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = T_1 + T_2$$

wo nach der Definition von R in (1) bis zum 2. Grade, so daß die Substitution in (16) bis e^2 einschließlich ergibt

$$(17)\qquad T_1 = -2\sqrt{a_*}\left[\left(1 - \frac{3}{2}e^2\right)\left(\frac{\partial N_0}{\partial a}\right) + e^2\left(\frac{\partial N_1}{\partial a}\right)_* + \right.$$
$$\left. + e\cos\zeta\left(\frac{\partial N_2}{\partial a}\right)_* + e^2\cos 2\zeta\left(\frac{\partial N_3}{\partial a}\right)_*\right]$$
$$T_2 = \frac{e}{2}\,\frac{1}{\sqrt{a_*}}\,[N_2\cos\zeta + 2N_1 e + 2N_3 e\cos 2\zeta].$$

Zwecks Integration der Differentialgleichung für die Perihellänge $\tilde{\omega}$ ist zuerst die zweite Gleichung (12) durch Entwicklung nach e auf die folgende Form zu bringen:

$$(18)\qquad \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(1 - \frac{1}{2}e^2\right)\frac{1}{e}\,\frac{\partial R}{\partial e};$$

darin ist die partielle Ableitung nach e bis zu Gliedern dritten Grades, also R bis e^4 einschließlich zu entwickeln, um das Endresultat bis e^2 einschließlich genau zu erhalten. Ferner ergibt die Entwicklung von $\sqrt{a}$ nach e^2 die Darstellung (6a)

$$\sqrt{a} = \sqrt{a_*}\left(1 - \frac{3}{2}e^2\right),$$

so daß aus Gleichung (18) entsteht

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{1 + e^2}{e\sqrt{a_*}}\,\frac{\partial R}{\partial e}.$$

Benutzt man die in (1) gegebene Entwicklung von R bis zu Gliedern mit e^4 einschließlich, dann ergibt die nach Vielfachen von ζ geordnete Darstellung definitiv:

(19)
$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a_*}}\left[2N_1 + 2e^2(2N_1' + N_1) + \cos\zeta\left(\frac{N_2}{e} + 3eN_2' + eN_2\right) + \right.$$
$$\left. + \cos 2\zeta(2N_3 + 4e^2N_3' + 2e^2N_3) + 3eN_4\cos 3\zeta + 4e^2N_5\cos 4\zeta\right].$$

Der in (19) nur einmal vorkommende Term mit $\frac{1}{e}$ muß auftreten, weil $\tilde{\omega}$ nur in der Verbindung mit e auftreten kann und mit $e = 0$ verschwinden muß.

Nunmehr ist die Differentialgleichung für ζ aufzustellen und zu untersuchen. Aus der Definitionsgleichung $\zeta = 4l' - 3l - \tilde{\omega}$ folgt zunächst

$$(20) \qquad \frac{d\zeta}{dt} = 4n' - 3\left(\frac{d\varepsilon}{dt} + n\right) - \frac{d\tilde{\omega}}{dt}.$$

Da nun die Zeit t in den Differentialgleichungen der Bahnelemente nirgends explizit auftritt, erscheint es zweckmäßig, sie überhaupt zu eliminieren; das geschieht durch Division der Differentialgleichungen durch die Gleichung (2). *Auf diese Weise wird von jetzt an e die unabhängige Variable sein, die zum Schluß des Integrationsverfahrens nach (2) als Funktion der Zeit zu bestimmen sein wird.*

Auf der rechten Seite von (20) sind die Ausdrücke (16) und (19) einzusetzen, so daß sich die zeitliche Ableitung von ζ als Funktion $f(e, \zeta)$ ergibt

$$(21) \qquad \frac{d\zeta}{dt} = z_0 + e^2 z_1 + \left(e z_2 + \frac{z_3}{e}\right)\cos\zeta + (z_4 + e^2 z_5)\cos 2\zeta + \\ + e z_6 \cos 3\zeta + e^2 z_7 \cos 4\zeta.$$

Dabei haben die Koeffizienten z_i die folgende Bedeutung, wobei noch die frühere Beziehung

$$n = n_*\left(1 + \frac{9}{2}e^2\right)$$

berücksichtigt ist:

$$(22) \qquad z_0 = 4n' - 3\left[n_* - 2\sqrt{a_*}\left(\frac{\partial N_0}{\partial a}\right)_*\right] - \frac{2}{\sqrt{a_*}}(N_1)_*$$

$$z_1 = 3\left[2\sqrt{a_*}\left(\frac{\partial N_1}{\partial a}\right)_* - 3\sqrt{a_*}\left(\frac{\partial N_0}{\partial a}\right)_* + 2(N_1)_* - \frac{9}{2}n_*\right]$$

$$z_2 = 3\left[2\sqrt{a_*}\left(\frac{\partial N_2}{\partial a}\right)_* - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a_*}}N_2 + \frac{1}{3\sqrt{a_*}}N_2 + \frac{1}{\sqrt{a_*}}N_2'\right]$$

$$z_3 = 3N_2, \quad z_4 = -\frac{2}{\sqrt{a_*}}N_3$$

$$z_5 = 3\left[2\sqrt{a_*}\left(\frac{\partial N_3}{\partial a}\right)_* + \frac{1}{\sqrt{a_*}}(4N_3' + 2N_3)\right]$$

$$z_6 = -3N_4, \quad z_7 = -4N_5.$$

Mithin ergibt die Division der beiden Gleichungen (21) und (10) die gesuchte von t unabhängige Differentialgleichung:

$$(23) \qquad \frac{d\zeta}{de} = -\frac{1}{\sin\zeta} \times$$

$$\times \frac{z_0 + z_1 e^2 + \left(z_2 e + \frac{z_3}{e}\right)\cos\zeta + (z_4 + z_5 e^2)\cos 2\zeta + z_6 e \cos 3\zeta + z_7 e^2 \cos 4\zeta}{\frac{1}{\sqrt{a_*}}\left(\frac{1}{3}\varepsilon_1 + \frac{2}{3}\varepsilon_2 e \cos\zeta + \frac{5}{6}\varepsilon_1 e^2\right)}$$

so daß bei Transport des Nenners $\sin\zeta$ der rechten Seite nach links eine Riccati'sche Differentialgleichung in Erscheinung tritt. Wenn noch $\sin\zeta \cdot d\zeta = -d(\cos\zeta)$ substituiert wird, so entsteht:

$$(24) \qquad e\frac{d}{de}(\cos\zeta) =$$

$$\frac{\sqrt{a_*}\,[z_0 e + z_1 e^3 + (z_2 e^2 + z_3)\cos\zeta + e(z_4 + z_5 e^2)\cos 2\zeta + e^2 z_6 \cos 3\zeta + z_7 e^3 \cos 4\zeta]}{\frac{1}{3}\varepsilon_1 + \frac{5}{6}\varepsilon_1 e^2 + \frac{2}{3}\varepsilon_2 e \cos\zeta}.$$

Da die Koeffizienten ε_1 und ε_2 im Nenner von (24) absolut von derselben Größenordnung sind, die Exzentrizität e aber als klein vom 1. Grade zu betrachten ist, kann der erste Term im Nenner als absolut größer als die beiden anderen Terme angesehen werden; folglich kann der Nenner auf die Form

$$N = \frac{1}{3}\varepsilon_1\left(1 + \frac{5}{2}e^2 + 2\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}e\cos\zeta\right)$$

gebracht werden. Die Potenzentwicklung nach den Termen in e und e^2 in (24) ergibt die Darstellung

$$e\frac{d}{de}(\cos\zeta) = \frac{3\sqrt{a_*}}{\varepsilon_1}\,[z_0 e + (z_2 e^2 + z_3)\cos\zeta + z_4 e \cos 2\zeta +$$

$$+ z_6 e^2 \cos 3\zeta] \times \left[1 - \frac{5}{2}e^2 - 2\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}e\cos\zeta + 4\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2 e^2\cos^2\zeta\right].$$

Bei geordneter Potenz-Entwicklung nach e bis e^2 einschließlich folgt unmittelbar:

$$(25) \qquad e\frac{d}{de}(\cos\zeta) = \frac{3\sqrt{a_*}}{\varepsilon_1}\left[z_3\cos\zeta + z_0 e - 2\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}e z_3\cos^2\zeta + \right.$$

$$+ z_4 e \cos 2\zeta + e^2(z_2\cos\zeta + z_6\cos 3\zeta) - \frac{5}{2}z_3 e^2\cos\zeta -$$

$$\left. - 2\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}z_0 e^2\cos\zeta - 2\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}z_4 e^2\cos\zeta\cos 2\zeta + 4\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2 e^2 z_3\cos^3\zeta\right].$$

Wenn $\cos\zeta = y$, folglich $\cos 2\zeta = 2y^2 - 1$ und analog $\cos 3\zeta = 4y^3 - 3y$ substituiert wird, ergibt sich folgende Darstellung unserer Gleichung

$$(26)\quad e\frac{dy}{de} = \frac{3\sqrt{a_*}}{\varepsilon_1}\Big[z_3 y + e\left(\alpha + 2z_4 y^2 - 2\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} z_3 y^2\right) + e^2(z_2 y - 3z_6 y + 4\beta y^3) - e^2\left(\frac{5}{2} z_3 + 2\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\alpha_0\right) y\Big]$$

$$\text{mit } \alpha = z_0 - z_4 \quad \beta = z_6 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} z_4 + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2 z_3.$$

Zweckmäßig ist es, der rechten Seite von (26), als Potenzreihe nach e und y aufgefaßt, die abgekürzte Form

$$(27)\qquad e\frac{dy}{de} = K_0 + 3K_1 e + K_2 e^2$$

zu geben, wobei die Koeffizienten K unmittelbar aus (26) ablesbar zu entnehmen sind. Die so zwischen y und e erlangte Differentialgleichung fixiert nun die Normalform einer Briot-Bouquet'schen Differentialgleichung, deren Lösung unter der Voraussetzung erfolgt, daß der Koeffizient von y keine positive ganze Zahl sein darf; das ist hier offenbar erfüllt, da die Koeffizienten beliebig kompliziert sind. Zwecks Lösung der Differentialgleichung entwickeln wir die Lösung für $y = \cos\zeta$ in eine Potenzreihe nach e und setzen:

$$(28)\quad y = \cos\zeta = y_0 + (e - e_0)\left(\frac{dy}{de}\right)_0 + \frac{(e-e_0)^2}{2}\left(\frac{d^2y}{de^2}\right)_0 + \cdots.$$

Die Ableitung von y nach e folgt unmittelbar aus (26) für $e = e_0$; analog folgt der zweite Differentialquotient durch Differentiation von (26) nach e:

(29)

$$e\frac{d^2y}{de^2} + \frac{dy}{de} = \frac{3\sqrt{a_*}}{\varepsilon_1}\Big[z_3\frac{dy}{de} + \alpha + 2z_4 y^2 - 2\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} z_3 y^2 - 4\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} z_3 y\frac{dy}{de} + 2e(z_2 y - 3z_6 y + 4\beta y^3) + e^2\left(z_2\frac{dy}{de} - 3z_6\frac{dy}{de} + 12\beta y^2\frac{dy}{de}\right) - e^2\frac{dy}{de}\left(\frac{5}{2}z_3 + 2\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\alpha_0\right) - 2e\left(\frac{5}{2}z_3 + 2\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\alpha_0\right) y\Big].$$

Aus den Gleichungen (26), (28) und (29) können auf elementarem Wege die Koeffizienten der Potenzreihe, die y als Funktion von $e - e_0$ darstellt, berechnet werden, die nicht explizit angeschrieben werden sollen.

Es verbleibt also die zeitliche Darstellung von e als Funktion von ζ und e, indem nach (10) gilt:

$$(30)\qquad \frac{de}{dt} = -\frac{1}{3\sqrt{a_*}}\sqrt{1-\cos^2\zeta}\left(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 e\cos\zeta + \frac{5}{2}\varepsilon_1 e^2\right).$$

Darin ist zu substituieren

$$(31)\qquad \cos\zeta = y = c_0 + c_1 e + c_2 e^2,$$

wo die Koeffizienten c_0, c_1, c_2 nach (28) als Funktionen der Ableitungen von y nach e anzusetzen sind; der Vergleich mit (28) ergibt

(32)

$$c_0 = y_0 + e_0\left(\frac{dy}{de}\right)_0 + e_0^2\left(\frac{d^2y}{de^2}\right)_0,\ c_1 = \left(\frac{dy}{de}\right)_0 - 2e_0\left(\frac{d^2y}{de^2}\right)_0,\ c_2 = \left(\frac{d^2y}{de^2}\right)_0.$$

Damit geht die Differentialgleichung (30) in die folgende über:

(33)

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{3\sqrt{a_*}}\sqrt{d_0 + d_1 e + d_2 e^2}\left(\varepsilon_1 + 2c_0\varepsilon_2 e + \frac{5}{2}\varepsilon_1 e^2 + 2c_1\varepsilon_2 e^2\right).$$

Für die Koeffizienten d_i gilt dabei

$$\begin{aligned} d_0 &= 1 - c_0^2 \\ d_1 &= -2c_0c_1 \\ d_2 &= -2c_0c_2 - c_1^2. \end{aligned}$$

In (33) ist noch der Wurzelausdruck rechts zu entwickeln; bei Ordnung nach Potenzen von e folgt:

$$(34)\qquad \frac{de}{dt} = g_0 + g_1 e + g_2 e^2$$

mit folgender Bedeutung der Koeffizienten g_i[1]

$$g_0 = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{d_0}{a_*}}\,\varepsilon_1,\quad g_1 = -\sqrt{\frac{d_0}{a_*}}\left(\frac{1}{6}\frac{d_1}{d_0}\varepsilon_1 + \frac{2}{3}\varepsilon_2 c_0\right),$$

$$g_2 = -\sqrt{\frac{d_0}{a_*}}\left[\frac{1}{6}\frac{\varepsilon_1}{d_0^2}\left(d_2 d_0 - \frac{1}{4}d_1^2\right) + \frac{1}{3}c_0\varepsilon_2\frac{d_1}{d_0} + \frac{5}{6}\varepsilon_1 + \frac{2}{3}c_1\varepsilon_2\right].$$

Es verbleibt dann die Diskussion des aus (34) folgenden Integrals

$$(35)\qquad I = \int\frac{de}{g_0 + g_1 e + g_2 e^2} = t - t_0.$$

[1] Der Ausnahmefall $d_0 = 0$ verdient besondere Aufmerksamkeit. F. S.

Der Nenner N des Integrals (35) ergibt bei Zerlegung $N = g_2(e - e_1)(e - e_2)$, wo die beiden Wurzeln resp. Koeffizienten e_1 und e_2 (welche die Grenzen des Variationsbereichs von e darstellen, s. unten) durch folgende Ausdrücke definiert werden:

$$e_{1,2} = -\frac{1}{2g_2}\left(g_1 \mp \sqrt{g_1^2 - 4g_0g_2}\right). \tag{36}$$

Folglich ist das Integral (35) mittels der folgenden Darstellung definiert:

$$I = \frac{1}{g_2}\int \frac{de}{(e-e_1)(e-e_2)} = t - t_0 + \text{const}$$

woraus bei Integration folgt:[1]

$$\frac{1}{g_2(e_1 - e_2)} \ln\left(\frac{e-e_1}{e-e_2}\right) = t - t_0 + \text{const}$$

Daraus ergibt sich für e (die Zahl 2,71828 wird hier E genannt):

$$\frac{e-e_1}{e-e_2} = E^{g_2(t-t_0+\text{const})(e_1-e_2)}. \tag{37}$$

Die Integrationskonstante folgt nach (37) aus der Bedingung, daß $e = e_0$ für $t = t_0$ sein muß, also

$$\frac{e_0-e_1}{e_0-e_2} = E^{\text{const}(e_1-e_2)g_2} \text{ und } \quad \text{const} = \frac{1}{g_2(e_1-e_2)} \ln\left(\frac{e_0-e_1}{e_0-e_2}\right).$$

Damit ergibt sich als Darstellung von e als Funktion der Zeit schließlich

$$e = \frac{e_1 - e_2\, E^{g_2(t-t_0+\text{const})(e_1-e_2)}}{1 - E^{g_2(t-t_0+\text{const})(e_1-e_2)}}. \tag{38}$$

An den zeitlichen Grenzen $t = \pm\infty$ wird dann die Grenze für e gleich e_2 resp. e_1, je nach dem Vorzeichen des Exponenten der E-Funktion, von $e_1 - e_2$ und von g_2.

Es verbleiben nun noch die Darstellungen von ε (in Gl. (12)) und $\tilde{\omega}$ als Funktionen der Zeit, nachdem die Funktion $y = \cos\zeta$ bereits in (31) als Funktion von e dargestellt ist. Die Differentialgleichung für die mittlere Länge ε der Epoche war bereits in (16)

[1] Eine genauere Diskussion der Lösung müßte hier die drei Fälle unterscheiden, ob die in (36) auftretende Größe $g_1^2 - 4g_0g_2$ positiv, negativ oder gleich Null ist. F. S.

angegeben worden, wo die Ausdrücke T_1 und T_2 in (17) als Funktionen von e und $\cos\zeta$ dargestellt sind. Es ist demnach noch die Darstellung von $\cos 2\zeta$ als Funktion von e zu vollziehen, für die sich aus (31) ergibt

$$\cos 2\zeta = 2\cos^2\zeta - 1 = 2(c_0 + c_1 e + c_2 e^2)^2 - 1, \text{ also}$$

$$(39) \qquad \cos 2\zeta = \Theta_0 + \Theta_1 e + \Theta_2 e^2$$

$$\text{mit } \Theta_0 = 2c_0^2 - 1, \quad \Theta_1 = 4c_0 c_1, \quad \Theta_2 = 2c_1^2 + 4c_0 c_2.$$

Die zeitliche Ableitung von $\tilde{\omega}$ ist bereits in (19) als Funktion von e dargestellt. Schließlich wird auch die große Halbachse a nach (6b) in eine Funktion von e übergeführt.

Zur Darstellung der Elemente ε und $\tilde{\omega}$ sind die folgenden Integrale nach der Zeit darzustellen

(40)

$$\int e\cos\zeta\,dt, \int e^2 dt, \int\frac{1}{e}\cos\zeta\,dt, \int e^2\cos\zeta\,dt, \int\cos 2\zeta\,dt, \int e^2\cos 2\zeta\,dt.$$

Wir beginnen mit dem Integral

$$(41) \qquad K = \int e^2 dt = \frac{1}{\alpha}\int\left(\frac{e_1 - e_2 E^\tau}{1 - E^\tau}\right)^2 d\tau$$

in welchem

$$\tau = \alpha(t - t_0) + \beta \text{ mit } \alpha = g_2(e_1 - e_2) \text{ und } \beta = \text{Const.}\ g_2(e_1 - e_2)$$

gesetzt und e^2 nach (38) berechnet ist. Die Integration basiert auf der Substitution $E^\tau = z$, so daß das Integral sich wie folgt reduziert

$$(42) \qquad K = \int\frac{(e_1 - e_2 z)^2}{\alpha z(1-z)^2}\,dz = \int\frac{e_1^2\,dz}{\alpha z(1-z)^2} - \int\frac{2e_1 e_2\,dz}{\alpha(1-z)^2} + $$

$$+ \int\frac{e_2^2 z\,dz}{\alpha(1-z)^2} = \frac{1}{\alpha}(K_1 + K_2 + K_3).$$

Sämtliche 3 Integrale sind elementare Integrale, deren Ermittlung ergibt

$$K_1 = e_1^2\left(\frac{1}{1 - E^\tau} + \tau + \ln(1 - E^\tau)\right)$$

$$K_2 = -2e_1 e_2\frac{1}{1 - E^\tau}$$

$$K_3 = e_2^2\left[\ln(1 - E^\tau) + \frac{1}{1 - E^\tau}\right].$$

Damit sind diese Integrale erledigt.

Weiterhin ist das Integral

$$I = \int \frac{\cos \zeta}{e}\, dt$$

zu bilden, für das sich nach (31) ergibt

$$(43)\quad I = c_0 \int \frac{dt}{e} + c_1(e - e_0) + c_2 \int e\, dt = c_0 I_1 + c_1(e - e_0) + c_2 I_2.$$

Für das erste der Integrale auf der rechten Seite erhält man nach (38) die neue Form

$$(44)\qquad I_1 = \frac{1}{\alpha} \int \frac{1 - E^\tau}{e_1 - e_2 E^\tau}\, d\tau$$

in der τ wieder die in (41) definierte Variable ist. Die Integration ergibt

$$(45)\qquad I_1 = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{e_1} \ln \frac{E^\tau}{e_1 - e_2 E^\tau} + \frac{1}{e_2} \ln (e_1 - e_2 E^\tau) \right].$$

Der nächste Term bei der Darstellung von $\tilde{\omega}$ durch Integration der rechten Seite von (19) ist der Term in $e \cos \zeta = e(c_0 + c_1 e + \cdots)$, so daß die beiden Integrale $\int e\, dt$ und $\int e^2 dt$ als Funktionen der Zeit darzustellen sind. Das zweite dieser beiden Integrale ist bereits in (41) und (42) dargestellt, so daß noch das erste darzustellen ist. Nach (38) ergibt sich

$$\int e\, dt = \frac{1}{\alpha} \int \frac{e_1 - e_2 E^\tau}{1 - E^\tau}\, d\tau.$$

Die Integration kann wiederum mittels der Substitution $E^\tau = z$ vollzogen werden und ergibt:

$$(46)\qquad \int e\, dt = \frac{1}{\alpha} \left[e_1 \tau + (e_2 - e_1) \ln (1 - E^\tau) \right].$$

Weiterhin ist zu integrieren der Term in $\cos 2\zeta$, wo der Integrand dargestellt wird durch (39). Diese Integration ergibt

$$(47)\qquad \int \cos 2\zeta\, dt = \Theta_0 (t - t_0) + \Theta_1 \int e\, dt + \Theta_2 \int e^2\, dt$$

wobei die beiden rechts auftretenden Integrale bereits in den vorangehenden Ausführungen erledigt sind.

Bei der Bildung des Integrals

$$\int e^2 \cos 2\zeta \, dt$$

kann nach (39) für $\cos 2\zeta$ einfach Θ_0 gesetzt werden, weil die höheren Terme Glieder ergeben würden, die proportional zu e^3 oder zu noch höheren Potenzen von e wären. Also ist das Integral

$$\int e^2 \cos 2\zeta \, dt = \Theta_0 \int e^2 \, dt \tag{48}$$

bereits durch (41) gegeben.

Der nächste Term zur Integration von (19) ist das Glied mit $e \cos 3\zeta$, in dem $\cos 3\zeta$ bis e^1 inklusive zu entwickeln bleibt; man findet

$$\begin{aligned} \cos 3\zeta &= \cos \zeta \cos 2\zeta - \sin \zeta \sin 2\zeta \\ &= (c_0 + c_1 e)(\Theta_0 + \Theta_1 e) + e \sin 2\zeta \sqrt{1 - (c_0 + c_1 e)^2} \\ &= c_0 \Theta_0 + (c_1 \Theta_0 + c_0 \Theta_1) e + e \sin 2\zeta \sqrt{1 - c_0^2 + z} \end{aligned} \tag{49}$$

mit $z = -2 c_0 c_1 e$.

Hier bleibt noch $e \sin 2\zeta$ zu entwickeln; es ist nach (39)

$$e \sin 2\zeta = e \sqrt{1 - (\Theta_0 + \Theta_1 e)^2} = e \sqrt{1 - \Theta_0^2} + \cdots.$$

Einsetzung in (49) ergibt die Darstellung von $e \cos 3\zeta$ als Funktion von e bis e^2 genau. Die dadurch bei Integration von (19) entstehenden Integrale sind durch die vorhergehenden Rechnungen bereits dargestellt.

Es verbleibt noch als letzter Term in (19) das Glied mit $4 e^2 N_5 \cos 4\zeta$; in diesem Glied ist für $\cos 4\zeta$ wegen (31) der Ausdruck

$$\begin{aligned} \cos 4\zeta = 8 \cos^4 \zeta - 8 \cos^2 \zeta + 1 &= \\ = 1 - 8 c_0^2 + 8 c_0^4 + 16 e c_0 c_1 (2 c_0^2 - 1) & \\ + 8 e^2 (4 c_0^3 c_2 + 6 c_0^2 c_1^2 - 2 c_0 c_2 - c_1^2) & \end{aligned}$$

einzusetzen; da aber das Glied bereits mit e^2 multipliziert ist, genügt es,

$$\cos 4\zeta = 1 - 8 c^2 + 8 c_0^4 \tag{50}$$

einzusetzen.

Schließlich ist die Ableitung von ε durch (16) soweit explizit fixiert, daß nur noch die Substitutionen

$$\begin{aligned} \cos \zeta &= c_0 + c_1 e + c_2 e^2 \\ \cos 2\zeta &= \Theta_0 + \Theta_1 e + \Theta_2 e^2 \end{aligned}$$

benötigt werden; die rechte Seite von (16) ist dann als Funktion von e bis e^2 einschließlich gegeben.

Als Hauptresultat der Untersuchung ergibt sich somit:

Da die Exzentrizität e nach (38) zwischen den festen Grenzen e_1 und e_2 variiert*, schwanken, sofern e_1 und e_2 reell sind, auch $\cos \zeta$, folglich auch ζ sowie die mittlere Halbachse a und die mittlere Bewegung n zwischen zwei endlichen Grenzen, innerhalb von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$.

---

* Vgl. hierzu nochmal S. 39 Fußnote. F. S.