

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

---

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1978

MÜNCHEN 1979

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Über gefährliche Annahmen beim Clausenschen und Lambertschen Achtpunktproblem

Von Walter Wunderlich in Wien

Vorgelegt von Herrn Josef Lense am 28. April 1978

## 1. Einleitung

Den Ausgang zur vorliegenden Untersuchung bildet die folgende Fragestellung aus dem Vermessungswesen: Kann man durch Visuren aus einer gewissen Anzahl von Standpunkten unbekannter Situation zu einer hinreichenden Anzahl von ebenfalls unbekanntenen Zielpunkten die gegenseitige Lage sämtlicher Punkte ermitteln? Dabei ist von vornherein klar, daß der Maßstab unbestimmt bleiben muß, weil er durch bloße Winkelmessungen nicht zu erfassen ist. Sieht man überdies von den Höhenunterschieden ab, so kann man sich mit Rücksicht auf die gemessenen Horizontalwinkel grundsätzlich auf ein *ebenes Problem* beschränken.

Stehen also  $m$  Standpunkte  $P_i(x_i, y_i)$  zur Verfügung und werden aus jedem  $n$  Zielpunkte  $Q_j(X_j, Y_j)$  anvisiert, so treten  $m(n-1)$  Winkeldifferenzen auf. Sollen diese Meßdaten ausreichen, um die  $2(m+n)$  Relativkoordinaten festzustellen, wobei mit Hinblick auf die Maßstabsfreiheit  $x_1 = y_1 = y_2 = 0$  und  $x_2 = 1$  angenommen werden darf, so muß die Bilanz

$$(1.1) \quad m(n-1) = 2(m+n) - 4 \text{ oder } (m-2)(n-3) = 2$$

stimmen. Zerlegung des Produkts in die Faktoren  $2 \cdot 1$  oder  $1 \cdot 2$  liefert dann zwei Antworten auf die gestellte Frage:

(1)  $m = n = 4$ . Dies ist das 1765 aufgeworfene und gelöste „Achtpunktproblem von J. H. Lambert“ [1], der an die Vermessung einer Küste aus vier Positionen eines Schiffes dachte, aus welchen vier markante Landpunkte angepeilt werden.

(2)  $m = 3, n = 5$ . Dies ist das 1843 behandelte „Achtpunktproblem von Th. Clausen“ [2], bei welchem aus drei Standpunkten die Visuren nach fünf Zielpunkten erfolgen.

Die beiden *Achtpunktprobleme* erweisen sich zwar bloß als *quadratisch*, doch ist der Lösungsweg jedesmal äußerst verwickelt und aufwendig. Man vergleiche hierzu neben den Originalschriften [1] und [2] die Beiträge von W. Láska [3], N. Herz [4] und M. Lagally [5]. Letzterer führte die Lösung des Clausenschen Problems durch synthetische Betrachtungen auf den Schnitt zweier zirkularer Kurven 3. Ordnung zurück, von deren neun Schnittpunkten sieben bereits bekannt sind; die restlichen zwei stellen die möglichen Lagen eines Standpunktes gegenüber zwei fixierten Zielpunkten dar, worauf alles übrige leicht zu ergänzen ist. – Im Bereich der Meeresgeodäsie haben die beiden fast vergessenen klassischen Aufgaben neuerdings wieder Interesse gefunden.

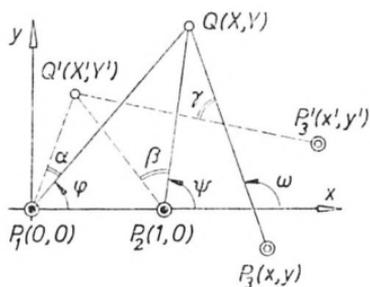
Eine *experimentelle Lösung*, die nützlichen Einblick in die bestehenden Verhältnisse gewährt, wäre in der Weise denkbar, daß man die drei bekannten Zielstrahlenquintupel  $P_1, P_2, P_3$  auf je einem Blatt Transparentpapier aufzeichnet und die nach  $Q_j$  zielenden Visierstrahlen jeweils mit  $j$  beziffert. Die ersten beiden Blätter werden dann in den auf einem Zeichenblatt markierten Punkten  $P_1$  bzw.  $P_2$  mittels Reißzwecken drehbar befestigt; sie sind anschließend so zu verdrehen und gleichzeitig ist das dritte Blatt so aufzulegen, daß je drei gleichbezifferte Strahlen einen Punkt gemeinsam haben. Ist mit einiger Geduld eine solche Position gefunden, so repräsentiert sie (in unbekanntem Maßstab) eine Lösung des Clausenschen Problems.

Da die Aufgabe quadratisch ist, so wird es *zwei Lösungen* geben, zwischen welchen auf Grund zusätzlicher Informationen zu entscheiden wäre. Das Achtpunktproblem ist mithin in gewissem Sinne stets „gefährlich“, allerdings praktisch nur dann, wenn die Schnittpunkte  $Q_j$  gleichbezifferter Strahlentripel in beiden Fällen auf der Zielrichtung entsprechenden *Halbstrahlen* liegen, was durchaus möglich ist (Figur 3). Existiert nun ausnahmsweise eine dritte Lösung, dann ist sie bloß eine aus einer ganzen *Lösungsschar*, denn in einem solchen Fall werden die beiden Lagallyschen Kubiken offenbar identisch und ihr Schnitt ist unbestimmt. Auf diesen merkwürdigen Sachverhalt, der eine *gefährliche Annahme* im eigentlichen Sinn kennzeichnet, wurde bereits in einer vorangegangenen Arbeit hingewiesen [6]. Dieselbe war

in erster Linie bloß dem Auftreten von „infinitesimal benachbarten“ Lösungen gewidmet, so daß eine eingehendere Untersuchung des Fragenkreises unter allgemeinerem Ansatz angezeigt erscheint, welche jetzt erfolgen soll. Die Betrachtung „endlich benachbarter“ Lösungen benötigt zwar nur elementar-algebraische Hilfsmittel, ist jedoch gegenüber der linearisierten Behandlung ungleich schwieriger, weil sie langwierige Entwicklungen erfordert. Die Mühe lohnt allerdings, denn sie führt zu Ergebnissen, die sowohl für den angewandten als auch für den reinen Geometer von Interesse sind.

## 2. Zusammenhang zwischen zwei Lösungen des Clausenschen Problems

Nach dem Gesagten kann der Übergang von einer Lösung des Clausenschen Problems zu einer anderen durch gewisse Lagenwechsel der drei einleitend erwähnten Transparentblätter erfolgen. Das erste wird sich um den Punkt  $P_1(0,0)$  um einen bestimmten Winkel  $\alpha$  drehen, ebenso das zweite um den Punkt  $P_2(1,0)$  um einen Winkel  $\beta$ ; das dritte Strahlbüschel wird hingegen nicht bloß eine Verdrehung um einen Winkel  $\gamma$ , sondern überdies eine Verlagerung seines Scheitels  $P_3(x,y)$  in eine Neu-lage  $P'_3(x',y')$  erfahren (Figur 1). Drei Zielstrahlen, die sich ursprünglich in einem Punkt  $Q$  schnitten, werden nach der Verlagerung im allgemeinen keinen Punkt mehr gemeinsam haben. Man kann also bei vorgegebenen Verlagerungsdaten  $\alpha, \beta, \gamma, x, y, x', y'$  fragen: Gibt es ausgezeichnete („gefährliche“) Zielpunkte  $Q(X,Y)$ , deren Zielstrahlen auch nach der Verlagerung wieder in einem Punkt  $Q'(X',Y')$  zusammenlaufen?



Figur 1: Verlagerung der Zielstrahlbüschel

Bezeichnet man die von der positiven  $x$ -Achse aus gezählten Richtungswinkel der Zielstrahlen  $P_1Q$ ,  $P_2Q$  und  $P_3Q$  der Reihe nach mit  $\varphi$ ,  $\psi$  und  $\omega$  (Figur 1), und deren Tangenten der Kürze halber mit  $u$ ,  $v$  und  $w$ , so bestehen die Beziehungen

$$(2.1) \quad uX - Y = 0, \quad vX - Y = v, \quad wX - Y = wx - y.$$

Die durch Elimination von  $X$  und  $Y$  (mittels Nullsetzen der Koeffizientendeterminante) zu gewinnende Relation

$$(2.2) \quad w[x(u-v) + v] = y(u-v) + uv$$

stellt die Bedingung dafür dar, daß die drei primären Zielstrahlen einen Punkt gemeinsam haben. Nach der Verlagerung tritt an die Stelle von (2.2) für die sekundären Zielstrahlen die analoge Bedingung

$$(2.3) \quad w'[x'(u'-v') + v'] = y'(u'-v') + u'v',$$

wobei mit Benützung der Abkürzungen  $\operatorname{tg}\alpha = a$ ,  $\operatorname{tg}\beta = b$ ,  $\operatorname{tg}\gamma = c$

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u' &= \operatorname{tg}(\varphi + \alpha) = \frac{u + a}{1 - au}, & v' &= \operatorname{tg}(\psi + \beta) = \frac{v + b}{1 - bv}, \\ w' &= \operatorname{tg}(\omega + \gamma) = \frac{w + c}{1 - cw}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke in (2.3) ein, so erhält man unter Verwendung von (2.2) die nachstehende Beziehung zwischen  $u$  und  $v$ :

$$(2.5) \quad \begin{aligned} &[uv + (cx + y)(u - v) + cv] \cdot [(ax' - bx' - a)uv + (x' + \\ &+ abx' - ab)u + (1 - x' - abx')v + (ax' - bx' + b)] + \\ &+ [(cuv - (x - cy)(u - v) - v] \cdot [(ay' - by' + 1)uv + \\ &+ (y' + aby' + b)u + (a - y' - aby')v + (ay' - by' + \\ &+ ab)] = 0. \end{aligned}$$

Jedes Wertepaar  $(u, v)$ , das der Gleichung (2.5) genügt, legt mithin ein Paar von Zielstrahlen durch  $P_1$  und  $P_2$  fest, die sich in einem für die betrachtete Verlagerung gefährlichen Zielpunkt  $Q$  schneiden; dessen Koordinaten haben zufolge (2.1) die Werte

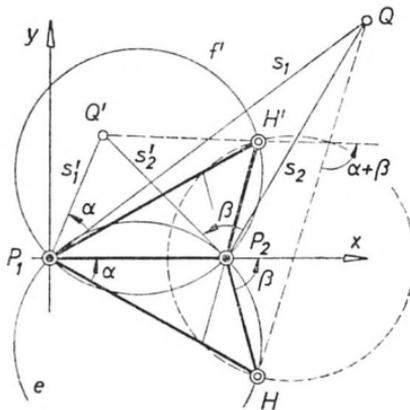
$$(2.6) \quad X = \frac{v}{v-u}, \quad Y = \frac{uv}{v-u}.$$

Ihm entspricht nach der Verlagerung der neue Zielpunkt  $Q'$  mit den Koordinaten

$$\begin{aligned}
 X' &= \frac{v'}{v' - u'} = \frac{(1 - au)(v + b)}{(b - a)(1 + uv) + (1 + ab)(v - u)} = \\
 &= \frac{(X - aY)(bX + Y - b)}{(b - a)(X^2 + Y^2 - X) + (1 + ab)Y}, \\
 (2.7) \quad Y' &= \frac{u'v'}{v' - u'} = \frac{(u + a)(v + b)}{(b - a)(1 + uv) + (1 + ab)(v - u)} = \\
 &= \frac{(aX + Y)(bX + Y - b)}{(b - a)(X^2 + Y^2 - X) + (1 + ab)Y}.
 \end{aligned}$$

Im allgemeinen – d. h. wenn (2.5) keine Identität in  $u$  und  $v$  ist, wovon noch die Rede sein soll – wird es für die durch  $a, b, c, x, y, x', y'$  bestimmte Verlagerung  $\infty^1$  gefährliche Zielpunkte  $Q$  (2.6) geben, die eine gewisse Kurve  $k$ , den zugehörigen „gefährlichen Ort“ erfüllen; hierüber wird der nächste Abschnitt genauere Auskunft geben.

Vorerst möge jedoch die durch (2.7) beschriebene *Abbildung*  $\mathcal{Q}: Q \rightarrow Q'$  näher betrachtet werden. Sie ist offensichtlich schon durch die angenommenen Drehungen der beiden Strahlbüschel  $P_1$  und  $P_2$  erklärt und daher nicht bloß für gefährliche Zielpunkte maßgebend, sondern auf die ganze Ebene ausdehnbar: Um zu einem beliebigen Punkt  $Q$  den Bildpunkt  $Q'$  zu finden, hat man lediglich die Strahlen  $s_1 = P_1Q$  und  $s_2 = P_2Q$  den Drehungen um die Winkel  $\alpha$  bzw.  $\beta$  zu unterwerfen und nachher zu schneiden (Figur 2). Offenbar liegt hier ein metrischer Spezialfall einer *birationalen quadratischen Transformation* in der Auffassung nach F. Seydewitz vor [7, S. 2011 f.], insoferne als die dort vor-



Figur 2: Hauptdreiecke der Newtonschen Abbildung

ausgesetzten Projektivitäten zwischen entsprechenden Ordnerbüscheln durch gleichsinnige Kongruenzen verwirklicht sind. Diese quadratische Abbildung  $\mathcal{Q}$  liegt bereits der klassischen „descriptio organica“ von I. Newton (1687) zugrunde [7, S. 2007f.], so daß es angängig erscheint, sie kurz als „Newtonsche Transformation“ anzusprechen.

Quadratische Punktverwandtschaften der vorliegenden Art besitzen bekanntlich in jedem der beiden Felder *drei Hauptpunkte*, für welche die sonst herrschende Eindeutigkeit der Abbildung  $Q \rightarrow Q'$  bzw. ihrer Umkehrung gestört ist. Zwei dieser Hauptpunkte liegen naturgemäß (für beide Felder) in  $P_1$  und  $P_2$ . Der dritte Hauptpunkt des ersten Feldes sei mit  $H$  bezeichnet; er ergibt sich im Schnitt jener beiden Zielstrahlen, die nach den erfolgten Drehungen um  $\alpha$  bzw.  $\beta$  in der Standlinie  $P_1P_2$  zusammenfallen, so daß ihr Schnitt unbestimmt wird (Figur 2). Der analoge Hauptpunkt  $H'$  im zweiten Feld liegt spiegelbildlich zu  $H$  bezüglich  $P_1P_2$ .<sup>1</sup> Die bekanntermaßen auch zwischen den Ordnerbüscheln  $H$  und  $H'$  bestehende Projektivität ist hier ebenfalls eine gleichsinnige Kongruenz; dies beruht für den Kenner auf der Tatsache, daß die absoluten Kreispunkte selbstentsprechend sind.<sup>2</sup> Der Sachverhalt läßt sich jedoch auch elementar feststellen, indem man zeigt, daß die Ordnerstrahlen  $HQ$  und  $H'Q'$  den festen Richtungsunterschied  $\alpha + \beta$  aufweisen.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Seine Bezeichnung soll keineswegs bedeuten, daß er der Bildpunkt von  $H$  ist; dieser ist ja unbestimmt auf  $P_1P_2$ .

<sup>2</sup> Hierbei ist stillschweigend angenommen, daß  $H$  und  $H'$  eigentliche Punkte sind ( $\alpha \neq \beta$ ), doch gilt die Aussage auch noch im Grenzfall  $\alpha = \beta$  für die Parallelstrahlbüschel  $H$  und  $H'$ .

<sup>3</sup> Zum Nachweis beachte man folgendes: Wandert  $Q$  auf einem beliebigen,  $H$  nicht enthaltenden Hilfskreis  $h$  durch  $P_1$  und  $P_2$ , dann variiert  $Q'$  auf einem gleichartigen Kreis  $h'$ , wobei die Punktreihen  $h(Q)$  und  $h'(Q')$  durch eine gleichsinnige Ähnlichkeit  $\mathfrak{H}$  zusammenhängen. Den auf  $P_1H$  bzw.  $P_2H$  liegenden Punkten  $S \neq P_1$  bzw.  $T \neq P_2$  von  $h$  entsprechen hierbei die Hauptpunkte  $S' = P_2$  zbd  $T' = P_1$  auf  $h'$ . Das Dreieck  $STH$  ist gegensinnig-ähnlich zu  $P_2P_1H$ , also gleichsinnig-ähnlich zu  $P_2P_1H'$ . In der auf die ganze Ebene ausgedehnten Ähnlichkeitstransformation  $\mathfrak{H}$  wird mithin dem Punkt  $H$  der Punkt  $H'$  zugewiesen. Die entsprechenden Geraden  $HQ$  und  $H'Q'$  weisen daher denselben Richtungsunterschied auf wie etwa  $HS = HP_1$  und  $H'S' = H'P_2$ , nämlich  $\alpha + \beta$ .

Durchläuft ein Punkt  $Q$  im ersten Feld eine Gerade  $g$ , die keinen Hauptpunkt enthält, dann beschreibt sein Newton-Bild  $Q'$  im zweiten Feld einen Umkegelschnitt  $g'$  des Hauptdreiecks  $P_1P_2H'$ . Insbesondere entspricht der Ferngeraden  $f$  der Umkreis  $f'$  von  $P_1P_2H'$  („Fluchtkreis“). Analoge Aussagen gelten umgekehrt; so ist der Umkreis  $e$  des Hauptdreiecks  $P_1P_2H$  („Verschwindungskreis“) das Urbild der Ferngeraden  $e'$  des zweiten Feldes (Figuren 2 und 3).

Fällt insonderheit  $P_3$  mit  $H$  und  $P'_3$  mit  $H'$  zusammen, so sind *sämtliche Punkte der Ebene als gefährlich* anzusehen, weil nun jedes Zielstrahltripel durch einen Punkt  $Q$  auch nach der Verlagerung wieder einen Punkt  $Q'$  gemeinsam hat. Hier liegt offensichtlich der vorhin erwähnte Fall einer Identität (2.5) vor, bedingt durch die Beziehungen

$$(2.8) \quad x' = x = \frac{b}{b-a}, y' = -y = \frac{ab}{b-a}, c = \frac{a+b}{1-ab}.$$

Die letzte Formel ist gleichbedeutend zur Aussage  $\gamma = \alpha + \beta$  und stützt sich auf die Tatsache, daß bei der vorliegenden Abbildung  $\mathcal{Q}$  den Strahlen  $P_3P_1$  und  $P_3P_2$  die Strahlen  $P'_3P_2$  und  $P'_3P_1$  entsprechen. – Die in Rede stehende Newton-Transformation vermittelt im übrigen den Zusammenhang zwischen den beiden Lösungen des (quadratischen) Achtpunktproblems von Clausen, weil ja hierbei den fünf Zielpunkten  $Q_j$  keinerlei Bedingungen auferlegt sind. Daß die Zweideutigkeit der Auswertung auch bei Beschränkung auf Halbstrahlen bestehen kann, zeigt Figur 3, in welcher der Deutlichkeit zuliebe die beiden Felder getrennt wurden. Widersprüche gegen die Halbstrahlenbedingung treten auf, wenn das Zielgebiet den Verschwindungskreis überschreitet.

Satz 1: Bei festgehaltenen Standpunkten  $P_1$  und  $P_2$  sind die beiden Lösungen des Clausenschen Achtpunktproblems durch eine Newtonsche quadratische Abbildung verknüpft, für welche die Standpunkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  Hauptpunkte sind; die zweite Lagemöglichkeit  $P'_3$  ist zu  $P_3$  bezüglich  $P_1P_2$  spiegelbildlich angeordnet. Die Drehwinkel der Zielstrahlquintupel in  $P_1$  und  $P_2$  sind durch  $\alpha = \sphericalangle P_3P_1P_2$  und  $\beta = \pi - \sphericalangle P_1P_2P_3$  bestimmt. Waren die Standpunkte kollinear, so ist die Lösung zwar eindeutig, jedoch infinitesimal unsicher.

Der Charakter dieser infinitesimalen Unsicherheit wurde in [6] ausführlich erörtert.

### 3. Gefährliche Kubiken

Um die Ortslinie  $k$  der im vorigen Abschnitt nachgewiesenen, zu einer angenommenen Verlagerung der drei Zielstrahlbüschel gehörigen gefährlichen Zielpunkte  $Q(X, Y)$  zu ermitteln, hat man bloß in der entscheidenden Bedingung (2.5) die Größen  $u$  und  $v$  gemäß (2.6) durch

$$(3.1) \quad u = Y/X, \quad v = Y/(X-1)$$

auszudrücken. Nach einiger Rechnung erhält man so als Gleichung des *gefährlichen Ortes*  $k$ :

$$(3.2) \quad K(X, Y) \equiv (X^2 + Y^2)(AX + BY) - (A + E)X^2 + \\ + CXY + DY^2 + EX + FY = 0$$

mit den Koeffizienten

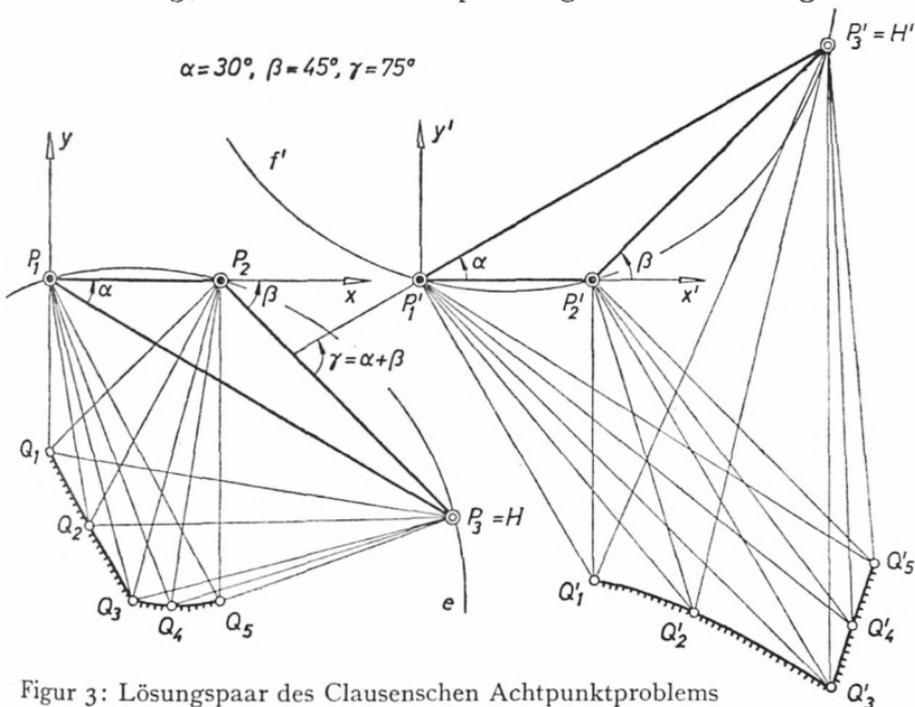
$$(3.3) \quad \begin{aligned} A &= (a - b)(cx' - y') + (c - a)b, \\ B &= (a - b)(x' + cy') + c - a, \\ C &= (b - a)(x' + cy') - (ab + 1)(cx' - y') + \\ &\quad + (a + b)(x - cy) + (ab - 1)(cx + y), \\ D &= (b - a)[x(cx' - y') + y(x' + cy')] - \\ &\quad - (ab + 1)(x' + cy') + (ac + 1)x + (a - c)(y + b), \\ E &= (a - b)[x(cx' - y') + y(x' + cy')] + (c - a)bx + \\ &\quad + (ac + 1)by, \\ F &= (ab + 1)[x(cx' - y') + y(x' + cy')] - (ac + 1)bx + \\ &\quad + (c - a)by. \end{aligned}$$

Auf Grund der Bauart der Gleichung (3.2) handelt es sich bei  $k$  um eine Kurve 3. Ordnung, welche die absoluten Kreispunkte enthält, also um eine *zirkuläre Kubik*. Man überzeugt sich leicht, daß sie durch die drei Standpunkte  $P_1(0,0)$ ,  $P_2(1,0)$  und  $P_3(x,y)$  geht; letzteres erkennt man unmittelbar, wenn man die zu  $P_3$  gehörenden Richtungswerte  $u = y/x$  und  $v = y/(x-1)$  mit jenen von  $Q$  in (3.1) vergleicht. Ähnlich stellt man fest, daß auch der Hauptpunkt  $H$  (2.8) auf  $k$  liegt, weil die zugehörigen Werte  $u = -a$  und  $v = -b$  (bei beliebigem  $c$ ) der Bedingung (2.5)

genügen. – Naturgemäß ist auch das Newton-Bild  $k'$  von  $k$  von gleichem Charakter, denn es umfaßt ja die für die inverse Verlagerung gefährlichen Punkte  $Q'$ ; die Kubik  $k'$  enthält allerdings statt  $P_3$  und  $H$  die Punkte  $P'_3$  und  $H'$ .

Wie zu erwarten war, ist die gefährliche Kubik  $k$  von genau der gleichen Art, wie sie unter der Annahme infinitesimaler Verlagerung der drei Zielstrahlbüschel in [6] festgestellt wurde, wo man auch ihre Konstruktion als Erzeugnis eines Kreisbüschels und eines projektiv darauf bezogenen Geradenbüschels finden mag. – Die Kubik ist im allgemeinen vom Geschlecht 1, kann aber auch rational sein und sogar zerfallen, nämlich für  $A = B = 0$  in einen Kegelschnitt und die Ferngerade, ferner für  $A = E = 0$  in einen Kreis und die Standlinie  $P_1P_2$ , und schließlich für  $AF - BE - CE = BF - DE + E^2 = 0$  in einen Kreis durch  $P_1, P_2$  und eine eigentliche Gerade.

Lagen also beim Clausenschen Achtpunktproblem die fünf Zielpunkte  $Q_1, \dots, Q_5$  zusammen mit den Standpunkten  $P_1, P_2, P_3$  auf der gefährlichen Kubik  $k$ , so existiert außer der stets vorhandenen Nebenlösung gemäß Satz 1 (Figur 3) noch eine *zusätzliche Lösung*, die aus der Hauptlösung mittels der zugrunde-



Figur 3: Lösungspaar des Clausenschen Achtpunktproblems

gelegten Verlagerung der Zielstrahlbüschel abgeleitet werden kann. Daß es sich hierbei bloß um eine von unendlich vielen weiteren Zusatzlösungen handelt, wird sich gleich zeigen.

Greift man nämlich umgekehrt aus der Menge der  $\infty^5$  durch  $P_1$  und  $P_2$  gehenden zirkularen Kubiken, die sämtlich durch den Ansatz (3.2) erfaßt werden, durch Vorgabe der sechs Koeffizienten  $A, \dots, F$  eine beliebige Kurve  $k$  heraus, und wählt man auf ihr willkürlich den dritten Standpunkt  $P_3$  durch Festsetzung seiner Koordinaten  $x$  und  $y$ , so stehen zur Ermittlung der fünf Verlagerungsparameter  $a, b, c, x', y'$  die sechs Gleichungen (3.3) zur Verfügung. Sie führen keineswegs zu einem Widerspruch, da sie *linear abhängig* sind: Ihre dem Polynom  $K(x, y)$  entsprechende Linearkombination reduziert sich wegen  $P_3 \in k$  identisch zu Null. Die Auflösbarkeit des Gleichungssystems bedeutet nun einerseits, daß die gefährliche Kubik  $k$  im Rahmen des linearen Kurvensystems (3.2) keine Sonderstellung einnimmt, andererseits aber auch, daß die Lage des Standpunktes  $P_3$  auf ihr nicht ausgezeichnet ist.

Nun kommt es bei den gewählten Koeffizienten  $A, \dots, F$  bloß auf die Verhältnisse an; man darf sie also mit einem gemeinsamen Faktor  $\tau \neq 0$  multiplizieren, ohne daß sich dadurch die Kubik  $k$  ändert. Auf diese Weise ergeben sich die Verlagerungsparameter als (stetige) Funktionen von  $\tau$ , womit die in [6] vorausgesagte Existenz einer *stetigen Schar von  $\infty^1$  Lösungen* des Acht-punktproblems im Falle einer gefährlichen Annahme zu erkennen ist.

**Satz 2:** Liegen beim Clausenschen Acht-punktproblem die drei Standpunkte zusammen mit den fünf Zielpunkten auf einer (eventuell zerfallenden) zirkularen Kubik, so besitzt es eine einparametrische Schar von Lösungen. Die Anzahl der Zielpunkte dürfte dabei beliebig vermehrt werden, ohne daß die Gefährlichkeit der Annahme für das dann schon überbestimmte Problem aufhört, sofern die zusätzlichen Punkte gleichfalls der genannten Kubik angehören.

#### 4. Analyse der Lösungsschar

Die tatsächliche Auflösung des Gleichungssystems (3.3) ist allerdings schwierig. Setzt man der Übersicht halber

$$(4.1) \quad x' + cy' = \xi, \quad y' - cx' = \eta,$$

so geht es – unter Verzicht auf die letzte Gleichung – um das System

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \tau A &= (b - a)\eta + bc - ab, \\ \tau B &= (a - b)\xi + c - a, \\ \tau C &= (b - a)\xi + (ab + 1)\eta + [(ab - 1)x - (a + b)y]c + \\ &\quad + [(a + b)x + (ab - 1)y], \\ \tau D &= (b - a)(y\xi - x\eta) - (ab + 1)\xi + (ax - y - b)c + \\ &\quad + (x + ay + ab), \\ \tau E &= (a - b)(y\xi - x\eta) + (x + ay)bc - (ax - y)b. \end{aligned}$$

Hierin sind  $A, \dots, E$  sowie  $x$  und  $y$  gegebene Größen, hingegen  $a, b, c, \xi, \eta$  und  $\tau$  die Unbekannten. Die linear auftretenden Größen  $\tau, \xi, \eta$  und  $c$  sind formal leicht zu eliminieren; das in Determinantenform angeschriebene Ergebnis lautet, mit Benützung der vorübergehenden Abkürzung

$$(4.3) \quad (ab + 1)/(a - b) = d,$$

$$(4.4) \quad \begin{vmatrix} A & 0 & -1 & b & -ab \\ B & -1 & 0 & 1 & -a \\ C & 1 & d & (ab - 1)x - (a + b)y & (a + b)x + (ab - 1)y \\ D & y + d & x & ax - y - b & x + ay + ab \\ E & -y - x & (x + ay)b & (y - ax)b & \end{vmatrix} = 0.$$

Die dadurch erklärte Abhängigkeit zwischen  $a = \operatorname{tg} \alpha$  und  $b = \operatorname{tg} \beta$  regelt die Koppelung der Drehungen für die Zielstrahlbüschel  $P_1$  und  $P_2$ . – Nach geeigneter Kombination der letzten beiden Spalten läßt sich (4.4) durch  $a^2 + 1$  kürzen. Weitere Kombinationen führen dann auf die vereinfachte Gestalt

$$(4.5) \quad \begin{vmatrix} A & 0 & -1 & -b & 0 \\ B & -1 & 0 & -1 & 0 \\ C & 1 & d & x + by & bx - y \\ D + By & d & x & b & x \\ E - Ax - y & & 0 & 0 & by \end{vmatrix} = 0.$$

Aus Gründen der Gleichberechtigung ist zu erwarten, daß auch noch die Kürzung durch  $b^2 + 1$  möglich sein wird. Dies bestätigt

sich in der Tat, wenn man (4.5) nach der ersten Spalte entwickelt und  $d'$  wieder durch den Ausdruck (4.3) ersetzt, worauf sich wirklich alle auftretenden Unterdeterminanten restlos durch  $b^2 + 1$  teilen lassen. Nach längerer Rechnung gelangt man so, unter neuerlicher Beachtung von  $K(x, y) = 0$ , zu der wichtigen Relation

$$(4.6) \quad Ab(ab + 1) - Bb^2(a^2 + 1) + (a - b)(Cb - Dab + E - Fa + Fb) = 0.$$

Ihre Bedeutung liegt darin, daß sie die *Auflösbarkeitsbedingung* für das Gleichungssystem (4.2) nach  $c$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\tau$  darstellt.

Für jedes der Bedingung (4.6) genügende Wertepaar  $(a, b)$  sind die fünf in  $c$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\tau$  linearen Gleichungen miteinander verträglich, so daß sich diese Größen eindeutig bestimmen lassen, wobei eine der Gleichungen entbehrlich ist. Mit  $\xi$  und  $\eta$  ist sodann zufolge (4.1) auch die Neulage  $P'_3(x', y')$  des Standpunktes  $P_3(x, y)$  bekannt:

$$(4.7) \quad x' = (\xi - c\eta)/(c^2 + 1), \quad y' = (\eta + c\xi)/(c^2 + 1).$$

Den  $\infty^1$  zulässigen Wertepaaren  $(a, b)$  entsprechen die  $\infty^1$  in Satz 2 angeführten Lösungen des Achtpunktpblems.

Jedes solche Zahlenpaar  $(a, b)$  kennzeichnet gemäß Abschnitt 2 eine Newton-Transformation  $\Omega$  (2.7), welche mittels der simultanen Drehungen der Strahlbüschel  $P_1$  und  $P_2$  um die Winkel  $\alpha = \text{arctg } a$  bzw.  $\beta = \text{arctg } b$  die ursprünglichen Zielpunkte  $Q(X, Y)$  in die Neulagen  $Q'(X', Y')$  einer Nebenlösung überführt. Dies geschieht *unabhängig vom Standpunkt*  $P_3(x, y)$ , dessen Koordinaten ja in (4.6) nicht mehr aufscheinen, was eigentlich nicht zu erwarten war. Der Hauptpunkt  $H(x^*, y^*)$  von  $\Omega$ , gemäß (2.8) durch

$$(4.8) \quad x^* = b/(b - a), \quad y^* = ab/(a - b)$$

festgelegt, gehört, wie in Abschnitt 3 festgestellt wurde, der Kubik  $k$  an. Durch Einsetzen der Koordinaten (4.8) in die Gleichung (3.2) von  $k$  ließe sich die grundlegende Bedingung (4.6) einfacher herleiten, was auch deren Unabhängigkeit von  $x$  und  $y$  erklärt.

Eine wichtige Konsequenz dieser Unabhängigkeit besteht darin, daß man neben  $P_3(x, y)$  offenbar noch einen *vierten Standpunkt*

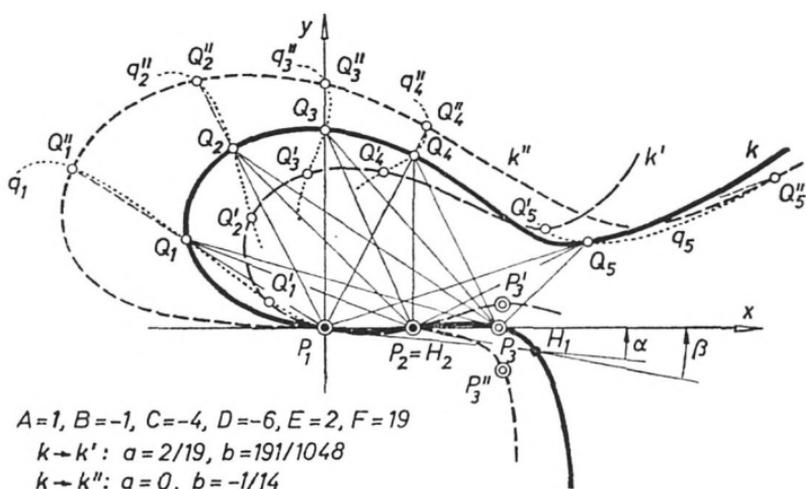
$P_4(\bar{x}, \bar{y})$  auf der gefährlichen Kubik  $k$  hinzunehmen kann. Auch dessen Zielstrahlbüschel gestattet eine bestimmte gleichsinnig-kongruente Verlagerung, die mit denselben Büscheldrehungen um  $P_1$  und  $P_2$  verträglich ist. Die durchgeführten Entwicklungen erfassen mithin gleichzeitig mit dem Clausenschen auch das *Lambertsche Achtpunktproblem*. Die Anzahl der Standpunkte könnte darüber hinaus noch beliebig weiter vermehrt werden – wie dies für die Zielpunkte schon erkannt wurde –, ohne daß die Gefährlichkeit der Annahme für das dann bereits überbestimmte Vermessungsproblem aufhört, sofern nur sämtliche Punkte dem gefährlichen Ort  $k$  angehören.<sup>4</sup>

Unter der Einwirkung der  $\infty^1$  durch die Bedingung (4.6) gesteuerten Newton-Transformationen  $\mathfrak{Q}$  (2.7) verlagert sich jeder Zielpunkt  $Q$  längs einer wohlbestimmten „Zielbahn“  $q$ , die näher untersucht werden soll. Ihre Gleichung in laufenden Koordinaten  $X', Y'$  wäre grundsätzlich aus den Beziehungen (2.7) und (4.6) mit konstanten Werten  $X, Y$  durch Elimination der Parameter  $a, b$  zu gewinnen, doch liefert diese aufwendige Vorgangsweise nur schwer die gewünschten Aufschlüsse.

Eher einladend erscheint die *konstruktive Ermittlung* der Zielbahn  $q$ , indem man die in Betracht kommenden quadratischen Abbildungen  $\mathfrak{Q}: Q \rightarrow Q'$  nach dem aus Figur 2 ersichtlichen Muster auf einen festen Zielpunkt  $Q$  anwendet. Dies ergibt die nachstehende Zeichenvorschrift: Man wähle an beliebiger Stelle der gefährlichen Kubik  $k$  den Hauptpunkt  $H$  und drehe sodann die zu dem ins Auge gefaßten (festen) Zielpunkt  $Q$  weisenden Strahlen  $s_1 = P_1Q$  und  $s_2 = P_2Q$  um die Winkel  $\alpha = \sphericalangle HP_1P_2$  bzw.  $\beta = \pi - \sphericalangle P_1P_2H$  nach  $s'_1$  bzw.  $s'_2$ ; bei Variation von  $H$  längs  $k$  durchläuft der Schnittpunkt  $Q'$  von  $s'_1$  und  $s'_2$  die gesuchte Zielbahn  $q$ . Diese erscheint solcherart als Erzeugnis einer gewissen (2,2)-Korrespondenz zwischen den Strahlbüscheln  $P_1(s'_1)$  und  $P_2(s'_2)$ , wäre also bei allgemeiner Lage von  $Q$  eine (monozirkulare) Quartik mit Doppelpunkten in  $P_1$  und  $P_2$ . Nun liegt aber  $Q$  (als gefährlicher Zielpunkt) auf  $k$ . Dies hat zur Folge, daß in der

<sup>4</sup> In diesem Zusammenhang ist auf eine Arbeit von J. Krames [8] hinzuweisen, der erkannt hat, daß die Standpunktpaare, aus welchen zwei vorgelegte Zielpunktvierecke durch jeweils kongruente Strahlenquadrupel projiziert werden, sich auf zwei zirkuläre Kubiken verteilen.

genannten Korrespondenz  $s'_1 \rightarrow s'_2$  der gemeinsame Büschelstrahl sich selbst entspricht; gelangt nämlich  $H$  nach  $Q$ , so fallen  $s'_1$  und  $s'_2$  in  $P_1P_2$  zusammen. Diese Gerade spaltet sich vom Erzeugnis ab, so daß für die Zielbahn  $q$  im allgemeinen bloß eine *zirkuläre Kubik* überbleibt.<sup>5</sup> Auf diesem Wege wurden in Figur 4 für jene gefährliche Annahme des Clausenschen Problems, welche der Figur 1 in [6] zugrunde lag, Bahnstücke der fünf Zielpunkte eingetragen.



Figur 4: Gefährliche Annahme beim Clausenschen Problem

Die geschilderte Methode läßt sich nun auch rechnerisch nachvollziehen. Haben  $u, v$  und  $u', v'$  dieselbe Bedeutung wie in Abschnitt 2, so hat man bloß in (4.6) die mit (2.4) übereinstimmende Substitution

$$(4.9) \quad a = (u' - u)/(uu' + 1), \quad b = (v' - v)/(vv' + 1)$$

vorzunehmen. Die so gewonnene Beziehung

$$(4.10) \quad \begin{aligned} & A(uu' + 1)(v' - v)[(uv + 1)(u'v' + 1) + (u - v)(u' - v')] - B(u^2 + 1)(u'^2 + 1)(v' - v)^2 + [(v - u)(u'v' + 1) + (uv + 1)(u' - v')] \times [C(uu' + 1)(v' - v) - \\ & - D(u' - u)(v' - v) + E(uu' + 1)(vv' + 1) + F(u - v)(u'v' + 1) - F(uv + 1)(u' - v')] = 0 \end{aligned}$$

<sup>5</sup> Die Zirkularität von  $q$  erkennt man, wenn man  $H$  in einem der beiden absoluten Kreispunkte annimmt, die ja  $k$  angehören.

stellt dann bei festem  $u$  und  $v$  den analytischen Ausdruck für die erwähnte  $(2,2)$ -Korrespondenz  $s'_1(u') \rightarrow s'_2(v')$  dar. Der gemeinsame Büschelstrahl  $u' = v' = 0$  ist selbstentsprechend, falls

$$(4.11) \quad Av(uv + 1) + B(u^2 + 1)v^2 + (v - u)(Cv + Duv - E + Fu - Fv) = 0,$$

und dies ist, wie man leicht nachprüft, gerade die Bedingung dafür, daß der betrachtete Zielpunkt  $Q(X, Y)$  auf der gefährlichen Kubik  $k$  (3.2) liegt, also voraussetzungsgemäß erfüllt. Die Gleichung der Zielbahn  $q$  würde man anschließend erhalten, wenn man in (4.10) die Ausdrücke  $u' = Y'/X'$  und  $v' = Y'/(X' - 1)$  einsetzt, worauf jedoch verzichtet werden soll.

In Erweiterung von Satz 2 gilt nach allem:

Satz 3: Liegen beim Clausenschen oder Lambertschen Achtpunktproblem sämtliche Stand- und Zielpunkte auf einer (eventuell zerfallenden) zirkularen Kubik, so besitzt das Problem eine stetige Schar von Lösungen. Werden zwei Standpunkte festgehalten, so variieren die Zielpunkte unabhängig von den übrigen Standpunkten auf gewissen (eventuell zerfallenden) zirkularen Kubiken, welche die beiden Fixpunkte enthalten. Die Anzahl der Stand- und Zielpunkte auf der gefährlichen Kubik kann beliebig vermehrt werden, ohne daß die Gefährlichkeit für das dann überbestimmte Problem aufgehoben würde.

Natürlich wäre es erwünscht, auch etwas über die Wanderung der nicht fixierten *Standpunkte* zu erfahren, doch muß die Frage wegen allzu großer Schwierigkeit im allgemeinen Fall noch offen bleiben. Für einen bemerkenswerten Sonderfall wird sie aber im nächsten Abschnitt beantwortet werden.

## 5. Gefährliche Kegelschnitte

Statt einer ausführlichen Diskussion der mannigfachen Möglichkeiten des Zerfalls der gefährlichen Kubik und aller denkbaren Verteilungen der Stand- und Zielpunkte auf die Bestandteile soll jener wichtige, für  $A = B = 0$  eintretende Sonderfall eingehend erörtert werden, in welchem sich der gefährliche Ort unter Abspaltung der Ferngeraden  $f$  auf einen *Kegelschnitt*  $k$

$$(5.1) \quad -EX^2 + CXY + DY^2 + EX + FY = 0$$

reduziert. Dieser ist regulär, falls  $E(DE - CF - F^2) \neq 0$ , was hiermit vorausgesetzt sei.

Aus den ersten beiden Gleichungen des grundlegenden Systems (4.2) folgt

$$(5.2) \quad a = b = c,$$

sofern sie linear unabhängig sind, d. h. wenn nicht

$$(5.3) \quad b\xi + \eta = 0.$$

Dementsprechend sind zwei Unterfälle zu berücksichtigen, die auf *zwei verschiedene Lösungsscharen* führen.

Fall I ( $a = b = c$ )

Diese Annahme bedeutet  $\alpha = \beta = \gamma$ , d. h. die drei Zielstrahlbüschel  $P_1, P_2, P_3$  erfahren Verdrehungen um gleiche Winkel. Der Hauptpunkt  $H$  (4.8) liegt für jede der zur Herleitung von Nebenlösungen anzuwendenden Newton-Transformationen  $\mathfrak{Q}$  (2.7) im Unendlichen, variiert also auf dem uneigentlichen Bestandteil  $f$  der zerfallenden gefährlichen Kubik. Weil der Kegelschnitt  $k$  die Hauptpunkte  $P_1$  und  $P_2$  von  $\mathfrak{Q}$  enthält, ist sein Newton-Bild  $k'$ , auf welches sich die Neulagen  $Q'$  aller Zielpunkte  $Q \in k$  verteilen, wiederum ein gleichartiger Kegelschnitt. Er ist im allgemeinen sogar zu  $k$  *ähnlich*, da beide Fernpunkte von  $k$  die gleiche Drehung um  $\alpha$  erfahren; auszunehmen sind lediglich die beiden ausgearteten Exemplare der Schar  $\{k'\}$ , die sich einstellen, wenn  $H$  mit einem Fernpunkt von  $k$  zusammenfällt.

Die (2,2)-Korrespondenz (4.10) reduziert sich mit  $A = B = 0$  auf die gleichsinnige Kongruenz

$$(5.4) \quad (v-u)(u'v' + 1) + (uv + 1)(u' - v') = 0 \text{ mit } u, v = \text{const},$$

so daß die *Zielbahnen*  $q$  der gefährlichen Punkte  $Q \in k$  zu *Kreisen*

$$(5.5) \quad (X'^2 + Y'^2 - X')Y = (X^2 + Y^2 - X)Y' \text{ mit } X, Y = \text{const}$$

durch die Fixpunkte  $P_1, P_2$  werden, was mittels des Peripheriewinkelsatzes auch unmittelbar einzusehen ist.

Der Rest des Gleichungssystems (4.2) vereinfacht sich, wenn man überdies  $\tau$  durch  $(a^2 + 1)\tau'$  ersetzt, zu



Figur 5 illustriert den Sachverhalt für das Lambertsche Acht-punktproblem unter der Voraussetzung einer gefährlichen *Para-bel*  $k$  mit der Gleichung  $(X - Y)^2 = X + Y$ . Außer der Ori-ginalsituation ( $a = 0$ ) wurden zwei Nebenlösungen eingetragen: Zum Parameterwert  $a = 1$  ( $\alpha = \pi/4$ ) gehört wieder eine *Para-bel*  $k'$  ( $X'^2 = X' + Y'$ ), zu  $a = -1$  ( $\alpha = -\pi/4$ ) hingegen ein *Parallelenpaar*, bestehend aus der Standlinie  $Y'' = 0$  und der die Zielpunkte tragenden Geraden  $k''$  ( $Y'' = 1$ ).

Fall II ( $b\xi + \eta = 0$ )

Hier reduziert sich die Koppelbedingung (4.6) auf die bilineare Relation

$$(5.9) \quad Dab + Fa - (C + F)b - E = 0,$$

im Einklang mit dem Umstand, daß der Hauptpunkt  $H$  (4.8) jetzt auf dem Kegelschnitt  $k$  (5.1) selbst variiert. Weil der Kegel-schnitt  $k$  alle drei Hauptpunkte  $P_1, P_2, H$  enthält, wird sein New-ton-Bild  $k'$  diesmal eine *Gerade*

$$(5.10) \quad UX' + VY' + W = 0.$$

Nach Eintragen der Ausdrücke (2.7) für  $X'$  und  $Y'$  und anschlie-ßendem Koeffizientenvergleich mit (5.1) erhält man unter Be-achtung von (5.9) nach einiger Rechnung für die Geradenkoordi-naten  $U, V, W$  die Bestimmungsformeln

$$(5.11) \quad U : V : W = -(La^2 - 2Ma + N) : [Ma^2 + (L - N)a - M] : \frac{LN - M^2}{L + N}(a^2 + 1),$$

wobei

$$(5.12) \quad \begin{aligned} L &= D^2 + DE - CF, & M &= CD + DF + EF, \\ N &= C^2 + CF + DE + E^2. \end{aligned}$$

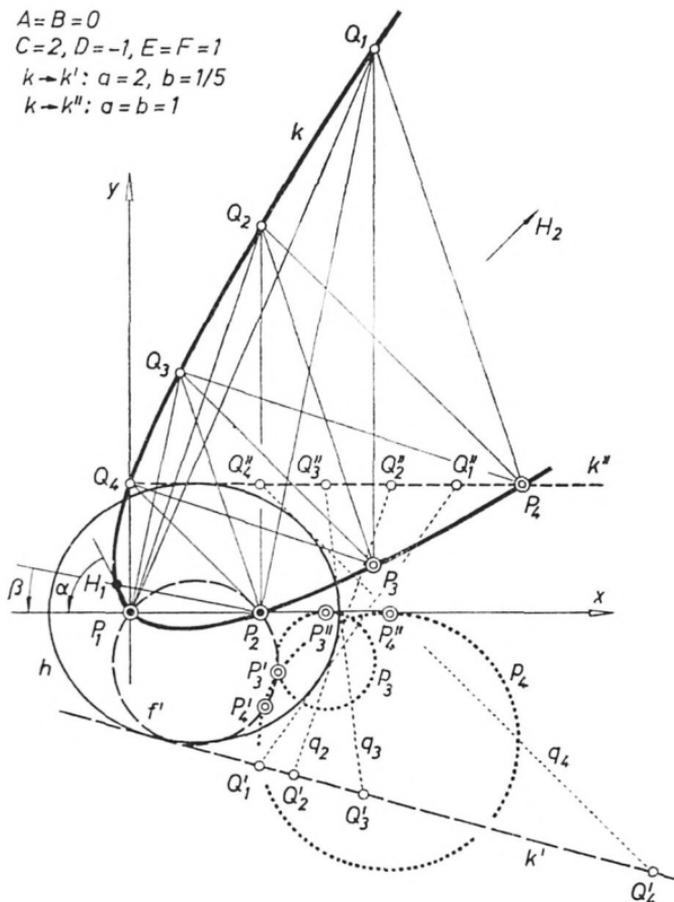
Diese  $\infty^1$  Geraden  $k'$ , die jeweils die Neulagen  $Q'$  der Ziel-punkte  $Q \in k$  tragen, haben gemäß (5.11) quadratisch vom freien Parameter  $a$  abhängende Koordinaten, sind also Tangenten eines *Hüllkegelschnittes*  $h$ . Unter den Tangenten kommen für  $a = \pm i$

so gleitet der Strahl  $Q_1P_3$  auf Grund des Peripheriewinkelsatzes durch einen festen Punkt  $R_1$  auf  $q_1$  (Figur 5). Die gleiche Überlegung für einen zweiten Zielpunkt  $Q_2$  ergibt dann als Erzeugnis der gleichsinnig-kongruenten Strahl-büschel  $R_1$  und  $R_2$  - wieder mittels des Peripheriewinkelsatzes - einen *Kreis*  $k_3$  durch  $R_1$  und  $R_2$  als Ortslinie des Punktes  $P_3$ .

auch die vom Ursprung ausgehenden Minimalstrahlen  $U:V:W = 1: \pm i: 0$  vor;  $P_1$  ist also ein *Brennpunkt* von  $h$ , und ebenso natürlich auch  $P_2$ . Zur Bestätigung mag man nachprüfen, ob das Produkt der Abstände von  $P_1$  und  $P_2$  für alle Geraden  $k'$  (5.10) denselben Wert annimmt, was bekanntlich die Tangentenscharen von Ellipsen und Hyperbeln kennzeichnet. Man findet tatsächlich für dieses Produkt

$$(5.13) \quad \frac{W(U+W)}{U^2+V^2} = \frac{M^2-LN}{(L+N)^2} = \frac{CF+F^2-DE}{C^2+(D+E)^2} = \text{const.}$$

Damit hat man nicht nur das Quadrat der Nebenhalbachse von  $h$ , sondern auch eine parameterfreie Darstellung in Geradenkoordinaten. – Figur 6 illustriert die Verhältnisse für dieselbe Annahme, die Figur 5 zugrunde lag.



Figur 6: Lambertsches Problem mit gefährlichem Kegelschnitt;  
2. Lösungsschar

Die (2,2)-Korrespondenz (4.10) reduziert sich im Einklang mit (5.9) auf die bilineare Beziehung

$$(5.14) \quad [Euv + (C + F)u - Fv - D] u' v' - [(C + F)uv - Eu - Dv + F] u' + (Fuv + Du + Ev + C + F)v' = 0 \text{ mit } u, v = \text{const.}$$

Die daraus mittels der Substitutionen  $u' = Y'/X'$  und  $v' = Y'/(X' - 1)$  zu gewinnenden *Zielbahnen*  $q$  erweisen sich als *Geraden*

$$(5.15) \quad U'X' + V'Y' + W' = 0,$$

mit

$$(5.16) \quad \begin{aligned} U' &= -Cuv + (D + E)(u + v) + C, \\ V' &= Euv + (C + F)u - Fv - D, \\ W' &= (C + F)uv - Eu - Dv + F. \end{aligned}$$

Nach Elimination von  $v$  mittels der zu (5.1) äquivalenten Koppelbedingung  $Duv - Fu + (C + F)v - E = 0$  ergibt sich mit Benützung der Abkürzungen (5.12):

$$(5.17) \quad \begin{aligned} U' : V' : W' &= (Lu^2 + 2Mu + N) : [Mu^2 + \\ &+ (N - L)u - M] : \frac{M^2 - LN}{L + N} (u^2 + 1). \end{aligned}$$

Der Vergleich mit (5.11) lehrt, daß die Zielbahnen  $q$  denselben Hüllkegelschnitt  $h$  berühren wie die Trägergeraden  $k'$ , denn für  $u = -a$  hat man  $U' : V' : W' = U : -V : W$ , wobei der Vorzeichenunterschied bei  $V$  wegen der Symmetrie von  $h$  bezüglich der  $x$ -Achse ohne Belang ist.

Zur Erfassung der *Standpunktsverlagerung*  $P_3(x, y) \rightarrow P'_3(x', y')$  beachte man vorerst die aus den ersten beiden Gleichungen von (4.2) mit  $A = B = 0$  folgenden Formeln

$$(5.18) \quad \xi = (a - c)/(a - b), \quad \eta = b(c - a)/(a - b).$$

Geht man damit in die letzten beiden Gleichungen von (4.2) ein, so erhält man für  $c = \text{tg } \gamma$  den Ausdruck

$$(5.19) \quad c = \frac{(a - b)[Ex(ab - 1) + Dy(a + b)] + Ea(b^2 + 1)}{(a - b)[Ex(a + b) - Dy(ab - 1)] + E(b^2 + 1)}.$$

Damit könnte man nun gemäß (4.7) die gesuchten Koordinaten

$$(5.20) \quad x' = \frac{bc + 1}{c^2 + 1} \cdot \frac{a - c}{a - b}, \quad y' = \frac{c - b}{c^2 + 1} \cdot \frac{a - c}{a - b}$$

berechnen. Vorteilhafter ist es jedoch, die Richtungsgrößen der Strahlen  $P_1P'_3$  und  $P_2P'_3$  heranzuziehen. Man findet hierfür un-  
schwer:

$$(5.21) \quad \begin{aligned} u^* &= \frac{y'}{x'} = \frac{c - b}{bc + 1} = \frac{(b - a)(Ex - Dya - E)}{(a - b)(Exa + Dy) + E(ab + 1)}, \\ v^* &= \frac{y'}{x' - 1} = \frac{c - a}{ac + 1} = \frac{(b - a)(Ex - Dyb)}{(a - b)(Exb + Dy) + E(b^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Schon ohne Kenntnis des Wertes von  $c$  läßt sich hieraus die Konstanz des Winkels  $P_1P'_3P_2$  bei festem  $a, b$  folgern, denn es ist

$$(5.22) \quad \frac{v^* - u^*}{u^*v^* + 1} = \frac{(c - a)(bc + 1) - (c - b)(ac + 1)}{(c - b)(c - a) + (ac + 1)(bc + 1)} = \frac{b - a}{ab + 1},$$

also  $\sphericalangle P_1P'_3P_2 = \beta - \alpha = \text{const.}$  Hieraus folgt mit dem Peripheriewinkelsatz, daß  $P'_3$  auf dem *Fluchtkreis*  $f'$

$$(5.23) \quad x'^2 + y'^2 - x' = \frac{ab + 1}{b - a} y'$$

liegt; ebenso tun dies natürlich auch die Neulagen allfälliger weiterer Standpunkte. Dies ist nicht allzu überraschend, da ja die Neulagen sämtlicher Ziel- und Standpunkte auf dem Newton-Bild der zerfallenden Kubik  $k \cup f$  liegen müssen, also auf  $k' \cup f'$ ; nachdem die Zielpunkte der Geraden  $k'$  angehören, können sich die Standpunkte nur auf dem Kreis  $f'$  befinden (Figur 6).

Für die Frage nach der *Wanderung des Standpunktes*  $P'_3$  beim Durchlaufen der Lösungsschar ist die Kenntnis des Wertes (5.19) von  $c$  jedoch vonnöten. Mit Benützung der Koppelbedingung (5.9) kann man der Darstellung (5.21) noch folgende übersichtlichere Gestalt geben:

$$(5.24) \quad \begin{aligned} u^* &= \frac{(Da^2 - Ca - E)y}{Exa^2 + (D + E)ya + Ex - Cy}, \\ v^* &= \frac{(Db^2 - Cb - E)y}{E(x - 1)b^2 + (D + E)yb + E(x - 1) - Cy}. \end{aligned}$$

Die damit über die Koppelung (5.9) erklärte (2,2)-Korrespondenz zwischen den Strahlbüscheln  $P_1$  und  $P_2$  erzeugt die gesuchte *Standpunktbahn*  $p_3$ , für welche man vermöge

$$(5.25) \quad x' = v^*/(v^* - u^*), \quad y' = u^*v^*/(v^* - u^*)$$

eine Parameterdarstellung gewinnen könnte. In der Korrespondenz ist der gemeinsame Büschelstrahl  $u^* = v^* = 0$  selbstentsprechend, und da dies doppelt zählt – der Annahme des Hauptpunktes  $H$  in den Fernpunkten des Kegelschnitts  $k$  entsprechend –, so reduziert sich das Erzeugnis um zwei Einheiten auf eine Kurve 2. Ordnung, und zwar auf einen *Kreis*, denn für  $c = \pm i$  stellen sich parallele Minimalstrahlenpaare  $u^* = v^* = \pm i$  ein, so daß  $p_3$  die absoluten Kreispunkte enthalten muß.

Zwecks Lokalisierung dieses Kreises  $p_3$  betrachte man vorerst die beiden zu  $a = b$  gehörigen Grenzlagen auf der  $x$ -Achse. Mit Hilfe von (5.21) findet man

$$(5.26) \quad x' : (x' - 1) = v^* : u^* = (Ex - Dya) : (Ex - Dya - E),$$

also

$$(5.27) \quad x' = x - \frac{Dya}{E} \text{ mit } Da^2 - Ca - E = 0.$$

Auf diese Weise wird zunächst der gesuchte Kreis  $p_3$  eingebettet in das Büschel

$$(5.28) \quad x'^2 + y'^2 - (2x - \frac{Cy}{E})x' + x + \frac{Fy}{E} = \lambda y'.$$

Um ihn daraus auszusondern, mag etwa der zu  $a = \infty, b = -F/D$  gehörige Punkt  $P'_3$  herangezogen werden, dessen Koordinaten sich gemäß (5.21) und (5.22) mit

$$(5.29) \quad x' = \frac{Ex(Ex + Fy)}{E^2x^2 + D^2y^2}, \quad y' = \frac{Dy(Ex + Fy)}{E^2x^2 + D^2y^2}$$

ergeben. Eintragen dieser Werte in (5.28) liefert dann den fehlenden Faktor  $\lambda = (D - E)y/E$ . Die Gleichung des *Bahnkreises*  $p_3$  lautet schließlich:

$$(5.30) \quad E(x'^2 + y'^2) - (2Ex - Cy)x' - (D - E)yy' + Ex + Fy = 0.$$

Die Mittelpunktskoordinaten und der Radius von  $p_3$  betragen demnach:

$$(5.31) \quad x_0 = x - \frac{Cy}{2E}, \quad y_0 = \frac{(D-E)y}{2E}, \quad r = \frac{y}{2E} \sqrt{C^2 + (D+E)^2}.$$

In Zusammenfassung der Ergebnisse gilt mithin

Satz 4: Liegen beim Achtpunktproblem die Stand- und Zielpunkte auf einem regulären Kegelschnitt, so wird die Lösung unbestimmt und es existieren zwei einparametrische Lösungsscharen. Bei der ersten befinden sich die acht Punkte stets auf untereinander ähnlichen Kegelschnitten (von denen zwei in Geradenpaare ausarten können); bei der zweiten verteilen sich die Zielpunkte auf Geraden, während die Standpunkte jeweils einem Kreis angehören (der zu einer Geraden abflachen kann). Werden zwei Standpunkte fixiert, so wandern beim Durchlaufen der Schar die Zielpunkte im ersten Fall auf Kreisen durch das Fixpunktpaar, im zweiten Fall auf den Tangenten eines Kegelschnittes, der die Fixpunkte zu Brennpunkten hat und auch von den Trägergeraden der Zielpunktgruppen eingehüllt wird. Jeder bewegliche Standpunkt variiert auf einem Kreis.

Damit hat man offensichtlich auch jene gefährlichen Annahmen erfaßt, bei welchen die Zielpunkte auf einer Geraden und die Standpunkte auf einem Kreis liegen. Die umgekehrte Verteilung bedürfte einer eigenen Untersuchung, die jedoch dem Leser überlassen sei. Als Korollar hat man jedenfalls

Satz 5: Sind beim Clausenschen Achtpunktproblem die fünf Zielpunkte kollinear, dann liegt eine gefährliche Annahme mit zwei Scharen von je  $\infty^1$  Lösungen vor.

#### Literatur:

- [1] J. H. Lambert: Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, I. Berlin 1765, S. 186–194.
- [2] Th. Clausen: Auflösung einer geometrischen Aufgabe. Astron. Nachr. 20 (1843), 69–74.
- [3] W. Láska: Über ein Problem der photogrammetrischen Küstenaufnahme. Monatsh. Math. Phys. 12 (1901), 172–176.
- [4] N. Herz: Eine Verallgemeinerung des Problems des Rückwärtseinschneidens; Problem der acht Punkte. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien (IIa) 113 (1904), 355–379.

- [5] M. Lagally: Über eine dem Lambertschen Problem der acht Punkte verwandte Aufgabe. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. 1912, 261–272.
- [6] W. Wunderlich: Über die gefährlichen Örter bei zwei Achtpunktproblemen und einem Fünfpunktproblem. Österr. Z. Vermessungswesen u. Photogrammetrie 64 (1977), 119–128.
- [7] L. Berzolari: Algebraische Transformationen und Korrespondenzen. Enzykl. Math. Wiss. III C 11.
- [8] J. Krames: Die Pseudofokalkurven zweier ebenen Vierecke. Österr. Z. Vermessungswesen 53 (1965), 33–40.